

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ
ТИПОВИХ ЗАДАЧ
З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання курсової роботи**

Частина 1

Київ
«Політехніка»
2003

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Методичні вказівки
до виконання курсової роботи
з дисципліни «Опір матеріалів»
для студентів технічних спеціальностей
усіх форм навчання

Частина I

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
«Політехніка»
2003

Приклади розв'язання типових задач з опору матеріалів: Метод. вказівки до викон. курс. роботи з дисц. «Опір матеріалів» для студ. техн. спец. усіх форм навчання / Уклад.: Б. І. Ковальчук, С. М. Шукаєв, О. П. Заховайко, Д. Ю. Шпак. – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2003. – Ч. I. – 68 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 2 від 23.10.2003 р.)

Укладачі: *Б. І. Ковальчук*, д-р техн. наук, проф.
С. М. Шукаєв, д-р техн. наук, проф.
О. П. Заховайко, канд. техн. наук, доц.
Д. Ю. Шпак, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *М. І. Бобир*, д-р техн. наук, проф.

Рецензент *А. Є. Бабенко*, д-р техн. наук, проф.

Зміст

Вступ.....	4
Задача № 1.....	5
Задача № 2.....	8
Задача № 3.....	12
Задача № 4.....	21
Задача № 5.....	25
Задача № 6.....	29
Задача № 7.....	31
Задача № 8.....	38
Задача № 9.....	41
Задача № 10.....	45
Задача № 11.....	51
Задача № 12.....	56
Задача № 13.....	63
Список рекомендованої літератури.....	66

Вступ

Опір матеріалів – одна з базових загальнотехнічних дисциплін, яка відіграє важливу роль у підготовці інженерних кадрів. Значне місце в практичній діяльності інженерів посідають розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість – основні завдання опору матеріалів.

У вивченні курсу опору матеріалів найефективніший метод навчання прийомом розв'язування задач – самостійна робота студентів. Тому в програмах курсу опору матеріалів для студентів НТУУ «КПІ» передбачено виконання протягом навчального року курсової роботи, мета якої – закріпити та поглибити знання, набуті під час вивчення теоретичного курсу, засвоїти методики розрахунків елементів конструкцій з вибором відповідного матеріалу і розрахункової схеми, навчитися користуватися довідковою літературою.

Курсова робота складається з двох частин і охоплює найтипівіші для практики задачі, що відповідають усім основним розділам опору матеріалів [1]. Завдання до курсової роботи з планами розв'язання задач містяться в методичних вказівках [2, 3].

Досвід показує, що під час самостійного виконання курсової роботи у студентів виникає ряд труднощів. Це зумовлює потребу детально розглянути задачі курсової роботи на практичних заняттях і тим самим обмежує, за браком часу, можливість розв'язання інших важливих з теоретичного і практичного боку задач, що не увійшли до курсової роботи.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання задач першої частини курсової роботи і охоплюють такі розділи теоретичного курсу: «Розтяг і стиск», «Основи теорії напруженого і деформованого стану», «Критерії міцності», «Зсув», «Кручення», «Згинання».

Використовуючи наведені в умовах задач дані, слід мати на увазі таке. Якщо навантаження подано з від'ємним знаком, то на рисунку його напрям потрібно змінити на протилежний і знак «мінус» опустити.

Розв'язання задач супроводжується роз'ясненням складних теоретичних положень, формулюванням правил, за якими знаходять ті чи ті величини. Це дає можливість студентам після уважного вивчення певних розділів теоретичного курсу [1] і детального розгляду прикладів розв'язання задач самостійно виконати курсову роботу.

У підготовці методичних вказівок використано розробки колективу кафедри, зокрема [4].

Задача 1 Розрахунок на міцність східчастого стрижня в умовах розтягу-стиску

Спроекувати східчастий стрижень (рис. 1.1) з круглим поперечним перерізом. Вагу стрижня не враховувати.

Дано: $l = 2$ м; $a = 0,8$ м; $b = 0,3$ м; $P_1 = -20$ кН; $P_2 = -20$ кН; $P_3 = 40$ кН; матеріал – сталь 20; $\sigma_r = 250$ МПа; $n_r = 1,5$ – коефіцієнт запасу за границею текучості.

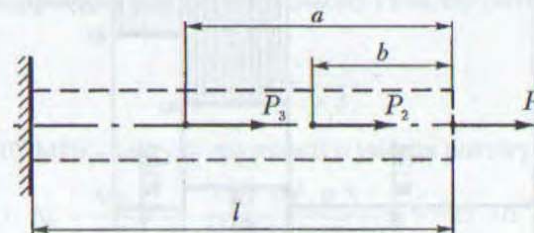


Рис. 1.1

План розв'язування задачі

1. Зобразити розрахункову схему.
2. Побудувати епюру поздовжніх сил N .
3. Обчислити діаметри стрижня на всіх ділянках виходячи з умов міцності.
4. Накреслити ескіз стрижня та поставити розміри.
5. Визначити абсолютні деформації окремих ділянок Δl_i та всього стрижня Δl і побудувати епюру переміщень λ .

Розв'язання задачі

1. Розрахункову схему відповідно до даних подано на рис. 1.2.
2. Знаходимо значення поздовжньої сили на кожній ділянці.

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 0,3$ м;

$$N_1(x) = -P_1 = -20 \text{ кН.}$$

Ділянка 2: $0,3 \text{ м} \leq x \leq 0,8$ м;

$$N_2(x) = -P_1 - P_2 = -20 - 20 = -40 \text{ кН.}$$

Ділянка 3: $0,8 \text{ м} \leq x \leq 2$ м;

$$N_3(x) = -P_1 - P_2 + P_3 = -20 - 20 + 40 = 0.$$

За отриманими результатами будемо епюру поздовжніх сил (рис. 1.2).

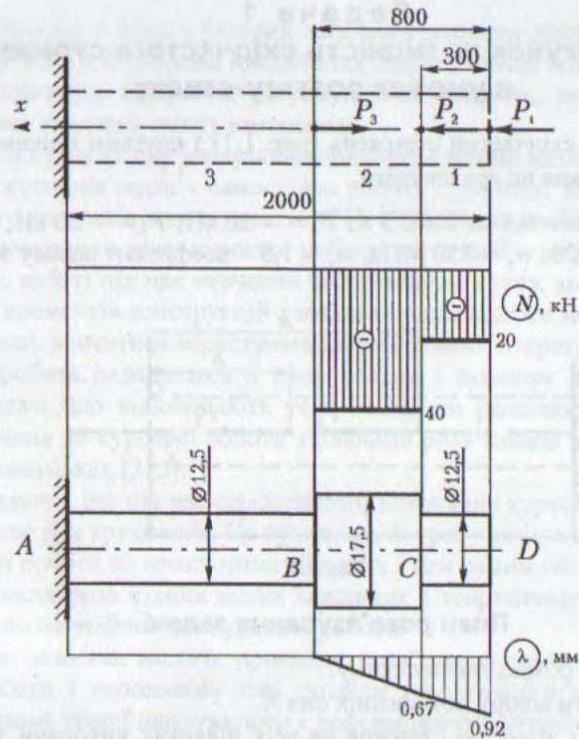


Рис. 1.2

3. Визначаємо діаметри стрижня на всіх ділянках виходячи з умови міцності, яку для розтягу-стиску записуємо у вигляді

$$\sigma = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma].$$

Допустиме напруження для сталі 20 обчислюємо за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{250}{1,5} = 167 \text{ МПа},$$

де $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$ – границя текучості для сталі 20.

$$\text{Ділянка 1: } F_1 = \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{167 \cdot 10^6} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 120 \text{ мм}^2;$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120}{3,14}} = 12,36 \text{ мм} \approx 12,5 \text{ мм}.$$

$$\text{Ділянка 2: } F_2 = \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{167 \cdot 10^6} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 240 \text{ мм}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 240}{3,14}} = 17,48 \text{ мм} \approx 17,5 \text{ мм}.$$

Ділянка 3: оскільки $N_3 = 0$, то з конструктивних міркувань припустимо, що d_3 дорівнює найменшому одержаному діаметрові. Отже:

$$d_3 = d_1 = 12,5 \text{ мм}.$$

4. Зобразимо ескіз стрижня та зазначимо його розміри на рис. 1.2.

5. Визначаємо абсолютні деформації окремих ділянок стрижня Δl_i і всього стрижня Δl , використовуючи формулу закону Гука для розтягу-стиску в абсолютній формі

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i},$$

де $E_i = E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ – модуль пружності в умовах розтягу для сталі 20.

$$\text{Ділянка 1: } \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{-20 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}} = -25 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,25 \text{ мм}.$$

$$\text{Ділянка 2: } \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,24 \cdot 10^{-3}} = -67 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,67 \text{ мм};$$

$$\text{Ділянка 3: } \Delta l_3 = 0.$$

Деформація всього стрижня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,25 - 0,67 - 0 = -0,92 \text{ мм}.$$

Епору переміщень будемо, починаючи з лівого кінця, оскільки відомо, що в защемленні переміщення дорівнює нулеві. Визначаємо величину переміщень у характерних перерізах:

$$\lambda_A = 0;$$

$$\lambda_B = \Delta l_3 = 0;$$

$$\lambda_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0 - 0,67 = -0,67 \text{ мм};$$

$$\lambda_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0 - 0,67 - 0,25 = -0,92 \text{ мм}.$$

За цими значеннями будемо епору переміщень λ (див. рис. 1.2).

Задача 2

Розрахунок на міцність шарнірно-стрижневої системи в умовах розтягу-стиску

Обчислити розміри поперечних перерізів сталевих стрижнів AB і BC заданої стрижневої системи, навантаженої силою P (рис. 2.1), і визначити вертикальне переміщення вузла B .

Дано: $l = 1$ м; $[\sigma] = 160$ МПа; $P = 70$ кН; $\alpha = 15^\circ$; $\beta = 35^\circ$.

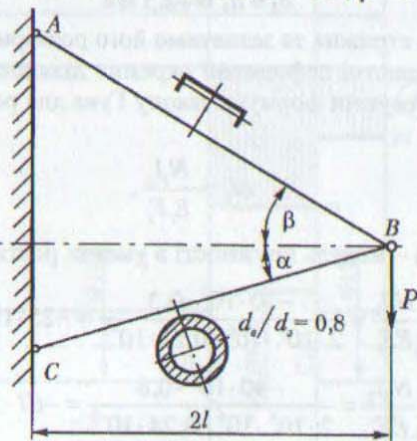


Рис. 2.1

План розв'язування задачі

1. Визначити зусилля в стрижнях AB і BC за рівняннями рівноваги вузла B .
2. Обчислити площі поперечних перерізів стрижнів виходячи з умови міцності.
3. Знайти розміри перерізів відповідно до заданої форми.
4. Визначити абсолютні деформації стрижнів і вертикальне переміщення вузла B .

Розв'язання задачі

1. Розглянемо рівновагу вузла B . Вирізаємо цей вузол і проектуємо всі сили на осі координат (рис. 2.2).

Умова рівноваги вузла B :

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} -N_{AB} \cdot \cos \beta + N_{BC} \cdot \cos \alpha = 0, \\ N_{AB} \cdot \sin \beta + N_{BC} \cdot \sin \alpha - P = 0; \end{cases}$$

$$N_{AB} = \frac{N_{BC} \cdot \cos \alpha}{\cos \beta};$$

$$\frac{N_{BC} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta} + N_{BC} \cdot \sin \alpha - P = 0;$$

$$N_{BC} \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \beta} = P;$$

$$N_{BC} = \frac{P \cdot \cos \beta}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{70 \cdot \cos 35^\circ}{\sin(35^\circ + 15^\circ)} = 74,85 \text{ кН};$$

$$N_{AB} = \frac{74,85 \cdot \cos 15^\circ}{\cos 35^\circ} = 88,26 \text{ кН}.$$

Оскільки поздовжня сила N_{AB} розтягальна, а N_{BC} – стискна, запишемо $N_{AB} = 88,26$ кН, $N_{BC} = -74,85$ кН.

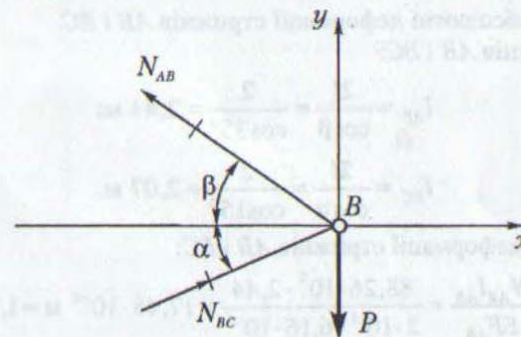


Рис. 2.2.

2. Площі поперечних перерізів стрижнів AB і BC знайдемо з умови міцності

$$\sigma = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma].$$

Звідси площа поперечного перерізу стрижня AB :

$$F_{AB} = \frac{|N_{AB}|}{[\sigma]} = \frac{88,26 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 551 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \approx 550 \text{ мм}^2.$$

Площа поперечного перерізу стрижня BC :

$$F_{BC} = \frac{|N_{BC}|}{[\sigma]} = \frac{74,85 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 467,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \approx 470 \text{ мм}^2.$$

3. Відповідно до заданої форми визначаємо розміри поперечних перерізів.
Стрижень AB : із таблиць сортаменту прокатних профілів вибираємо швелер № 5, у якого $F = 6,16 \text{ см}^2 = 616 \text{ мм}^2$.

Стрижень BC : площа кільця

$$F = \frac{\pi d_3^2}{4} \left(1 - \frac{d_n^2}{d_3^2} \right),$$

тобто

$$F_{BC} = \frac{\pi d_3^2}{4} (1 - 0,8^2).$$

Звідси

$$d_3 = \sqrt{\frac{4F_{BC}}{\pi(1-0,8^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 470}{3,14(1-0,8^2)}} = 40,8 \text{ мм};$$

$$d_n = 0,8d_3 = 0,8 \cdot 40,8 = 32,6 \text{ мм}.$$

4. Визначаємо абсолютні деформації стрижнів AB і BC .

Довжини стрижнів AB і BC :

$$l_{AB} = \frac{2l}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos 35^\circ} = 2,44 \text{ м};$$

$$l_{BC} = \frac{2l}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos 15^\circ} = 2,07 \text{ м}.$$

Тоді абсолютні деформації стрижнів AB і BC :

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EF_{AB}} = \frac{88,26 \cdot 10^3 \cdot 2,44}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6,16 \cdot 10^{-4}} = 17,48 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 1,75 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EF_{BC}} = \frac{-74,85 \cdot 10^3 \cdot 2,07}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4,7 \cdot 10^{-4}} = -16,48 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -1,65 \text{ мм}.$$

Знайдемо вертикальне переміщення вузла B — $w_B^{\text{вєр}}$.

Вертикальне переміщення вузла B можна визначити геометричним способом, побудувавши план переміщень. Але у зв'язку з тим, що це переміщення збігається за напрямком із зовнішньою силою P , то його легше знайти, використовуючи принцип можливих переміщень. Згідно з цим принципом сумарна робота зовнішніх і внутрішніх сил в умовах статичного деформування пружної системи дорівнює нулеві.

У цій задачі робота зовнішніх сил на своїх переміщеннях

$$A_3 = \frac{1}{2} P w_B^{\text{вєр}},$$

а робота внутрішніх сил, яка завжди від'ємна,

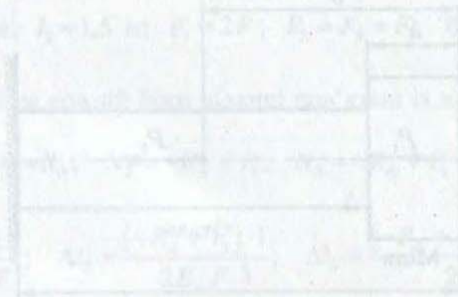
$$A_u = - \left[\frac{1}{2} N_{AB} \Delta l_{AB} + \frac{1}{2} N_{BC} \Delta l_{BC} \right].$$

Тому

$$A_3 + A_u = \frac{1}{2} P w_B^{\text{вєр}} - \left[\frac{1}{2} N_{AB} \Delta l_{AB} + \frac{1}{2} N_{BC} \Delta l_{BC} \right] = 0.$$

Звідси

$$w_B^{\text{вєр}} = \frac{N_{AB} \Delta l_{AB} + N_{BC} \Delta l_{BC}}{P} = \frac{88,26 \cdot 1,75 + (-74,85)(-1,65)}{70} = 3,97 \text{ мм}.$$



Задача 3

Розрахунок на міцність статично невизначеного стрижня в умовах розтягу-стиску

Східчастий стрижень, що складається зі сталевих і мідних частин, защемлено з обох кінців і навантажено зосередженими силами (рис. 3.1). Після прикладання навантаження температура стрижня змінюється. Визначити напруження на всіх ділянках стрижня до і після зміни температури і перевірити його на міцність в обох випадках, указати ступінь недовантаження або перевантаження (у відсотках) на кожній ділянці. Побудувати епюри поздовжніх сил N , напружень σ і переміщень λ . Взяти $F_{ст} = F$; $F_{м} = 2F$. Для сталі границя текучості $\sigma_{т} = 240$ МПа; для міді $\sigma_{т} = 120$ МПа. Коефіцієнт запасу міцності $n_{т} = 1,5$.

Дано: $l = 3$ м; $a = 0,5$ м; $b = 1,5$ м; $P_1 = 65$ кН; $P_2 = 80$ кН; $F = 550$ мм²; $\Delta t = -20$ °С; $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_{м} = 1 \cdot 10^5$ МПа.

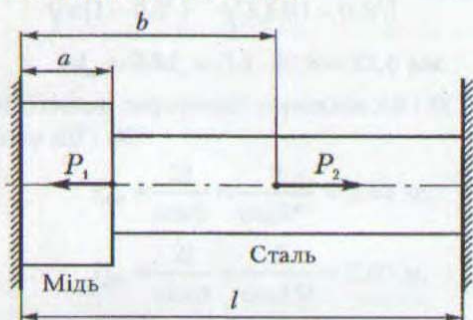


Рис. 3.1

План розв'язування задачі

1. Скласти рівняння рівноваги.
2. Скласти рівняння сумісності деформацій.
3. Записати фізичні рівняння, які виражають видовження ділянок стрижня через зусилля, що виникають до зміни його температури.
4. Розв'язати систему рівнянь (пп. 1–3) і визначити реакції опор.
5. Побудувати епюру поздовжніх сил.
6. Визначити напруження на кожній ділянці стрижня і побудувати епюру напружень. Перевірити міцність стрижня та вказати ступінь недовантаження або перевантаження на кожній ділянці.
7. Визначити абсолютні видовження кожної ділянки стрижня. Обчислити переміщення перерізів, які слугують межами ділянок, і побудувати епюру переміщень.

8. Вважаючи, що зовнішні сили не діють, виконати всі обчислення і побудови згідно з пп. 1–7 для стрижня після зміни його температури.
9. Побудувати сумарні епюри N , σ , λ , склавши результати обчислень пп. 5, 6, 7 та 8.

Розв'язання задачі

1. Рівняння рівноваги згідно з розрахунковою схемою (рис. 3.2):

$$\sum X = R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0. \quad (3.1)$$

2. Рівняння сумісності деформацій (опори абсолютно жорсткі):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0. \quad (3.2)$$

3. Фізичні рівняння:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i},$$

де $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 1$ м; $l_3 = 1,5$ м; $F_1 = 2F$; $F_2 = F_3 = F$; $E_1 = E_m$; $E_2 = E_3 = E_{ст} = 2E_m$.

Зусилля в стрижні на кожній його ділянці пов'язані із зовнішніми силами рівняннями:

$$N_1 = -R_A; \quad N_2 = -R_A + P_1; \quad N_3 = -R_A + P_1 - P_2;$$

тоді

$$\Delta l_1 = \frac{-R_A \cdot 0,5}{E_m \cdot 2F}; \quad \Delta l_2 = \frac{(-R_A + P_1) \cdot 1}{2E_{ст} F}; \quad \Delta l_3 = \frac{(-R_A + P_1 - P_2) \cdot 1,5}{2E_{ст} F}. \quad (3.3)$$

4. Розв'яжемо систему рівнянь (3.1) – (3.3) і визначимо реакції опор.

Підставляючи вирази (3.3) в рівняння (3.2), одержимо:

$$\frac{-R_A \cdot 0,5}{E_m \cdot 2F} + \frac{(-R_A + P_1) \cdot 1}{2E_{ст} F} + \frac{(-R_A + P_1 - P_2) \cdot 1,5}{2E_{ст} F} = 0;$$

$$-3R_A + 2,5P_1 - 1,5P_2 = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{3}(2,5 \cdot 65 - 1,5 \cdot 80) = 14,167 \text{ кН.}$$

- З рівняння рівноваги (3.1) знаходимо R_B

$$R_B = R_A - P_1 - P_2 = 14,167 - 65 - 80 = 29,167 \text{ кН.}$$

5. Для побудови епюри поздовжніх сил визначаємо їх значення на кожній ділянці

$$N_1 = -R_A = -14,167 \text{ кН;}$$

$$N_2 = -R_A + P_1 = -14,167 + 65 = 50,833 \text{ кН;}$$

$$N_3 = -R_A + P_1 - P_2 = -14,167 + 65 - 80 = -29,167 \text{ кН.}$$

За цими даними будемо епюру N (див. рис. 3.2).

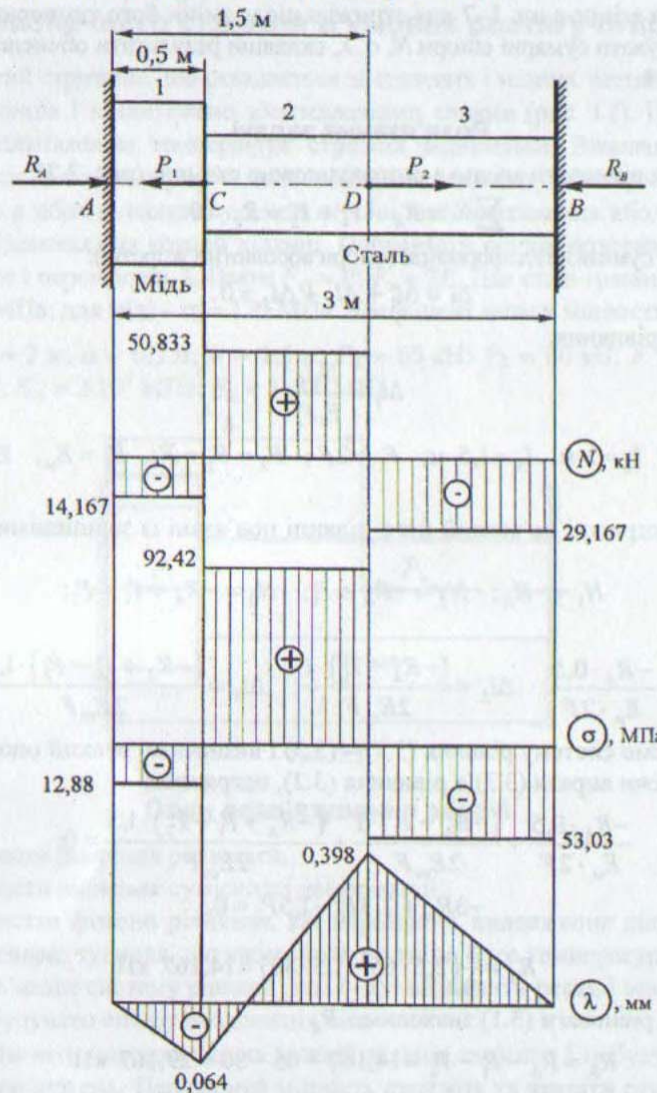


Рис. 3.2

6. Напруження на кожній ділянці визначимо за формулою

$$\sigma_{(i)} = \frac{N_i}{F_i}$$

Отримаємо:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-14,167 \cdot 10^3}{2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} = -12,88 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{50,833 \cdot 10^3}{5,5 \cdot 10^{-4}} = 92,42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-29,167 \cdot 10^3}{5,5 \cdot 10^{-4}} = -53,03 \text{ МПа}.$$

Епюру напружень σ подано на рис. 3.2.

Перевіримо міцність і визначимо ступінь перевантаження або недовантаження стрижня на кожній ділянці. Цю величину (у відсотках) визначаємо за формулою

$$\delta_i = \frac{|\sigma_{(i)}| - [\sigma]_i}{[\sigma]_i} \cdot 100.$$

Визначимо спочатку величину допустимих напружень для сталі та міді:

$$[\sigma]_m = [\sigma]_1 = \frac{(\sigma_T)_m}{n_T} = \frac{120}{1,5} = 80 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_{ст} = [\sigma]_2 = [\sigma]_3 = \frac{(\sigma_T)_{ст}}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\delta_1 = \frac{|-12,88| - 80}{80} \cdot 100 = -83,9 \%;$$

$$\delta_2 = \frac{92,42 - 160}{160} \cdot 100 = -42,24 \%;$$

$$\delta_3 = \frac{|-53,03| - 160}{160} \cdot 100 = -66,86 \%.$$

Тобто на всіх ділянках маємо недовантаження і міцність стрижня забезпечено.

7. Визначимо абсолютні видовження кожної ділянки стрижня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{-14,167 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} = -6,4 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{50,833 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} = 46,2 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3} = \frac{-29,167 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} = -39,8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l = (-6,4 + 46,2 - 39,8) \cdot 10^{-5} = 0.$$

Обчислюємо переміщення перерізів, які слугують межами ділянок:

$\lambda_A = 0$, оскільки тут має місце жорстке защемлення;

$$\lambda_C = \lambda_A + \Delta l_1 = \Delta l_1 = -0,064 \text{ мм};$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_2 = -0,064 + 0,462 = 0,398 \text{ мм};$$

$$\lambda_B = \lambda_D + \Delta l_3 = 0,398 - 0,398 = 0.$$

Переміщення кінця третьої ділянки знайдено правильно, оскільки цей переріз відповідає точці B , у якій стрижень жорстко защемлено.

Епюру переміщень λ подано на рис. 3.2.

8. Вважаючи, що зовнішні сили не діють, виконаємо всі обчислення і побудови згідно з пп. 1–7 для стрижня після зміни його температури (рис. 3.3).

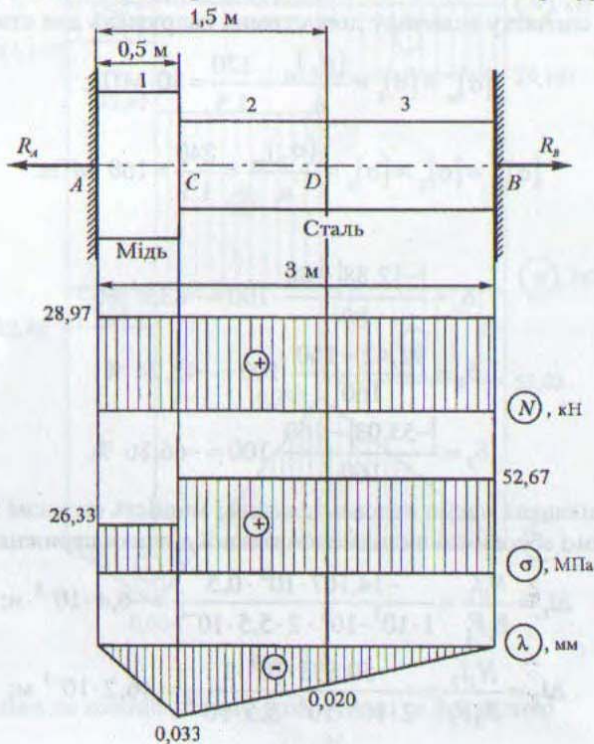


Рис. 3.3

8.1. Рівняння рівноваги:

$$\sum X = R_A - R_B = 0, \text{ звідси } R_A = R_B.$$

8.2. Рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

8.3. Фізичні рівняння, які виражають видовження ділянок стрижня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_A l_1}{E_m 2F} + \alpha_m \Delta t l_1;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_A l_2}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_2;$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_A l_3}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_3,$$

де $N_1 = N_2 = N_3 = R_A$; α_m та $\alpha_{ст}$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення відповідно для міді та сталі: $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}$; $\alpha_{ст} = 125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}$.

8.4. Розв'язуємо систему рівнянь (пп. 8.1–8.3) і визначасмо реакції опор:

$$\frac{R_A l_1}{E_m 2F} + \alpha_m \Delta t l_1 + \frac{R_A l_2}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_2 + \frac{R_A l_3}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_3 = 0;$$

$$R_A (l_1 + l_2 + l_3) = -E_m \cdot 2F \Delta t [\alpha_m l_1 + \alpha_{ст} (l_2 + l_3)];$$

$$R_A = -\frac{2E_m F \Delta t}{l} [\alpha_m l_1 + \alpha_{ст} (l_2 + l_3)] =$$

$$= -\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4} \cdot (-20)}{3} [165 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 + 125 \cdot 10^{-7} (1 + 1,5)] = 28,967 \text{ кН};$$

$$R_B = 28,967 \text{ кН}.$$

8.5. На всіх ділянках стрижня значення поздовжньої сили N однакове:

$$N = N_1 = N_2 = N_3 = 28,966 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 3.3).

8.6. Визначасмо напруження на кожній ділянці:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N}{2F} = \frac{28,967 \cdot 10^3}{2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} = 26,33 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = \frac{N}{F} = \frac{28,967 \cdot 10^3}{5,5 \cdot 10^{-4}} = 52,67 \text{ МПа};$$

Епюру напружень σ подано на рис. 3.3.

8.7. Визначаємо абсолютні видовження кожної ділянки стрижня:

$$\Delta l_1 = \frac{Nl_1}{E_m \cdot 2F} + \alpha_m \Delta t l_1 = \frac{28,966 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} + 165 \cdot 10^{-7} \cdot (-20) \cdot 0,5 = -0,33 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,033 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{Nl_2}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_2 = \frac{28,967 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot (-20) \cdot 1 = 0,13 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,013 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{Nl_3}{E_{ст} F} + \alpha_{ст} \Delta t l_3 = \frac{28,967 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot (-20) \cdot 1,5 = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,02 \text{ мм}.$$

Обчислимо переміщення характерних перерізів:

$$\lambda_A = 0;$$

$$\lambda_C = \Delta l_1 = -0,033 \text{ мм};$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_2 = -0,033 + 0,013 = -0,02 \text{ мм};$$

$$\lambda_B = \lambda_D + \Delta l_3 = -0,02 + 0,02 = 0.$$

Епюру переміщень λ подано на рис. 3.3.

9. Побудуємо сумарні епюри N , σ і λ для сумісної дії зовнішніх навантажень P_1 і P_2 та зміни температури. Для цього підсумовуємо відповідні епюри, зображені на рис. 3.2 та 3.3.

Епюра поздовжніх сил N :

$$N_1 = -1,167 + 28,967 = 14,8 \text{ кН};$$

$$N_2 = 50,833 + 28,967 = 79,8 \text{ кН};$$

$$N_3 = -29,167 + 28,967 = -0,2 \text{ кН}.$$

Епюра напружень σ :

$$\sigma_{(1)} = -12,88 + 26,33 = 13,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = 92,42 + 52,67 = 145,09 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = -53,03 + 52,67 = -0,36 \text{ МПа}.$$

Епюра переміщення λ характерних перерізів:

$$\lambda_A = 0;$$

$$\lambda_C = -0,064 - 0,033 = -0,097 \text{ мм};$$

$$\lambda_D = 0,398 - 0,020 = 0,378 \text{ мм};$$

$$\lambda_B = 0.$$

Сумарні епюри N , σ та λ подано на рис. 3.4.

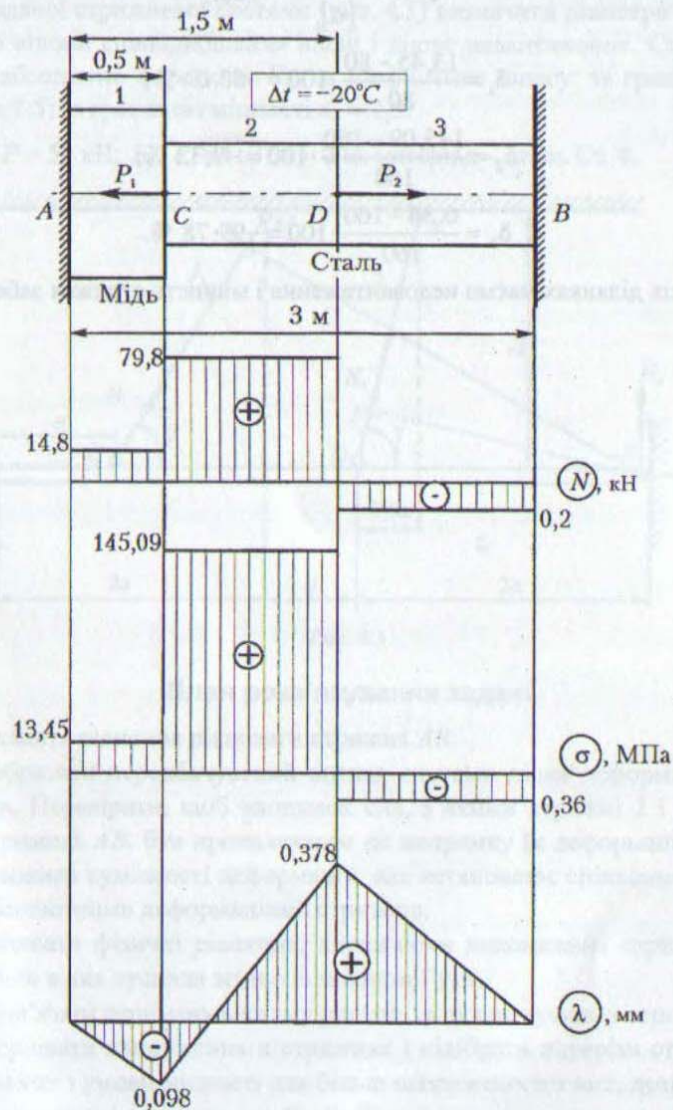


Рис. 3.4

10. Визначаємо ступінь недовантаження або перевантаження (у відсотках) на кожній ділянці за формулою

$$\delta_i = \frac{|\sigma_{(i)}| - [\sigma]_i}{[\sigma]_i} \cdot 100.$$

$$\delta_1 = \frac{13,45 - 80}{80} \cdot 100 = -83,19 \%;$$

$$\delta_2 = \frac{145,09 - 160}{160} \cdot 100 = -9,32 \%;$$

$$\delta_3 = \frac{0,36 - 160}{160} \cdot 100 = -99,78 \%.$$

Тобто на всіх ділянках маємо недовантаження і міцність стрижня забезпечено.

Задача 4

Розрахунок на міцність статично невизначної стрижневої системи в умовах розтягу-стиску

Для заданої стрижневої системи (рис. 4.1) визначити діаметри стрижнів 1 і 2, якщо відомо співвідношення площ і діюче навантаження. Стрижень AB вважати абсолютно жорстким. Узяти коефіцієнти запасу: за границею текучості $n_T = 1,5$; за границею міцності $n_B = 2,5$.

Дано: $P = 50$ кН; $F_1 : F_2 = 1 : 3$; $a = 2$ м; матеріал – сталь Ст. 4.

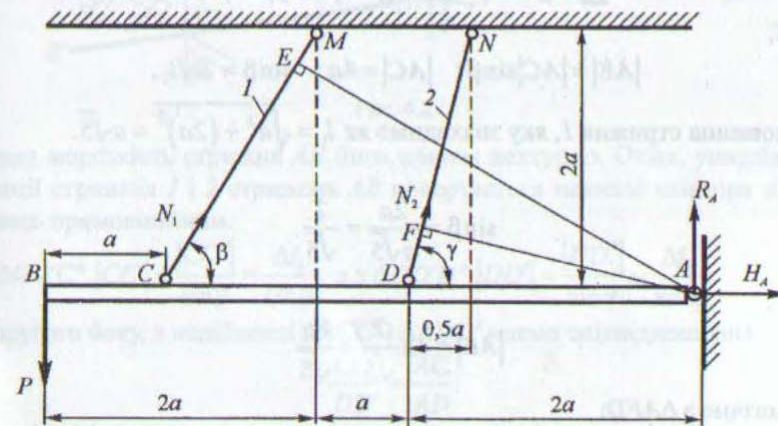


Рис. 4.1

План розв'язування задачі

1. Скласти рівняння рівноваги стрижня AB .
2. Зобразити передбачуваний вигляд системи після деформації стрижнів. Перевірити, щоб напрямки сил, з якими стрижні 1 і 2 діють на стрижень AB , був протилежним до напрямку їх деформацій. Скласти рівняння сумісності деформацій, яке встановлює співвідношення між абсолютними деформаціями стрижнів.
3. Записати фізичні рівняння, виражаючи видовження стрижнів через діючі в них зусилля згідно із законом Гука.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь відносно зусиль у стрижнях 1 і 2.
5. Порівняти напруження в стрижнях і підібрати перерізи стрижнів виходячи з умови міцності для більш напруженого з них, дотримуючись заданого співвідношення $F_1 : F_2$.

Розв'язання задачі

1. Статичні рівняння рівноваги. Ця стрижнева система один раз статично невизначна, оскільки містить чотири невідомі сили (N_1 , N_2 , R_A , H_A) за трьох рівнянь рівноваги для плоскої системи сил: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$. Рівняння рівноваги $\sum X = 0$ і $\sum Y = 0$ писати недоцільно, тому що вони містять невідомі R_A і H_A , непотрібні для розв'язання задачі.

Складемо рівняння рівноваги стрижня AB як суму моментів усіх сил відносно шарніра A :

$$\sum M_A = P|AB| - N_1|AE| - N_2|AF| = 0.$$

Із $\triangle ACE$:

$$|AE| = |AC|\sin\beta; \quad |AC| = 4a; \quad \sin\beta = 2a/l_1,$$

де l_1 – довжина стрижня 1, яку знаходимо як $l_1 = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Звідси

$$\sin\beta = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Тоді

$$|AE| = 4a \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8a}{\sqrt{5}}.$$

Аналогічно з $\triangle AFD$:

$$|AF| = |AD|\sin\gamma; \quad AD = 2a; \quad \sin\gamma = 2a/l_2,$$

де l_2 – довжина стрижня 2;

$$l_2 = \sqrt{(0,5)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{4,25};$$

$$\sin\gamma = \frac{2a}{a\sqrt{4,25}} = \frac{2}{\sqrt{4,25}};$$

$$AF = 2a \frac{2}{\sqrt{4,25}} = \frac{4a}{\sqrt{4,25}}.$$

Рівняння рівноваги набуде вигляду

$$5P - \frac{8}{\sqrt{5}}N_1 - \frac{4}{\sqrt{4,25}}N_2 = 0. \quad (4.1)$$

2. Геометричні рівняння. Складемо рівняння сумісності деформацій, яке встановлює співвідношення між абсолютними деформаціями стрижнів.

На рис. 4.2 подано можливий вид системи після деформації.

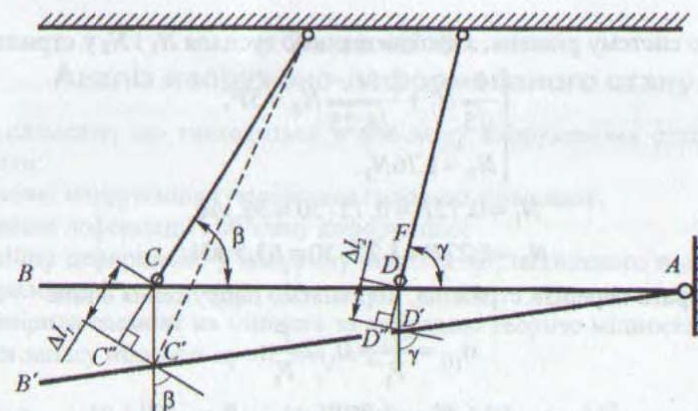


Рис. 4.2

Через жорсткість стрижня AB його згином нехтуємо. Отже, унаслідок деформації стрижнів 1 і 2 стрижень AB повертається навколо шарніра A , залишаючись прямолінійним.

$$\text{Із } \triangle CC'C'' \quad |CC'| = \frac{|CC''|}{\sin\beta} = \frac{\Delta l_1}{\sin\beta}, \quad \text{а з } \triangle DD'D'' \quad |DD'| = \frac{|DD''|}{\sin\gamma} = \frac{\Delta l_2}{\sin\gamma}.$$

З другого боку, з подібності $\triangle ACC'$ і $\triangle ADD'$ маємо співвідношення

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{AC}{AD}.$$

$$\text{Звідки } \frac{\Delta l_1 \sin\gamma}{\sin\beta \Delta l_2} = \frac{4a}{2a} = 2 \quad \text{або} \quad \Delta l_1 \sin\gamma = 2\Delta l_2 \sin\beta.$$

Підставивши значення, отримаємо рівняння сумісності деформацій

$$\sqrt{5}\Delta l_1 = 2 \cdot \sqrt{4,25} \cdot \Delta l_2. \quad (4.2)$$

3. Фізичні рівняння. Виразимо видовження стрижнів через зусилля за законом Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \quad (4.3)$$

4. Розв'яжемо систему рівнянь (4.1) – (4.3). Підставимо (4.3) у співвідношення (4.2):

$$\frac{5N_1 l_1}{EF_1} = 2\sqrt{4,25} \cdot \frac{N_2 l_2}{EF_2}.$$

Враховуючи, що $F_2 = 3F_1$, $l_1 = a\sqrt{5}$, $l_2 = a\sqrt{4,25}$, отримаємо

$$N_2 = 1,76N_1.$$

Запишемо систему рівнянь, з якої визначимо зусилля N_1 і N_2 у стрижнях:

$$\begin{cases} \frac{8}{\sqrt{5}} N_1 + \frac{4}{\sqrt{4,25}} N_2 = 5P, \\ N_2 = 1,76N_1. \end{cases}$$

$$N_1 = 0,72P = 0,72 \cdot 50 = 36 \text{ кН};$$

$$N_2 = 1,27P = 1,27 \cdot 50 = 63,5 \text{ кН}.$$

Щоб підібрати перерізи стрижнів, порівняємо напруження в них.

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{F_1} = 0,72 \frac{P}{F_1};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1,26P}{3F_1} = 0,42 \frac{P}{F_1}.$$

Оскільки $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$, площі поперечних перерізів стрижнів визначаємо з умови міцності першого стрижня:

$$\frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma].$$

Для сталі Ст. 4 допустиме напруження $[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$.

Тоді

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{36 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 225 \text{ мм}^2;$$

$$F_2 = 3F_1 = 3 \cdot 225 = 675 \text{ мм}^2.$$

За площами визначаємо діаметри стрижнів:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 225}{\pi}} = 16,9 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 675}{\pi}} = 29,3 \text{ мм}.$$

Беремо $d_1 = 17 \text{ мм}$ і $d_2 = 30 \text{ мм}$.

Задача 5

Аналіз напружено-деформованого стану

Для елемента, що знаходиться в плоскому напруженому стані (рис. 5.1) визначити:

- головні напруження і положення головних площадок;
- головні деформації і об'ємну деформацію;
- лінійну деформацію у напрямку відрізка AB , нахилоного під кутом α до горизонталі.

Перевірити елемент на міцність за вибраною теорією міцності. Узяти коефіцієнти запасу міцності $n_r = 1,5$; $n_n = 2,5$.

Дано $\sigma_{гор} = 40 \text{ МПа}$; $\sigma_{вер} = -10 \text{ МПа}$; $\tau = 80 \text{ МПа}$; $\alpha = 30^\circ$; матеріал – бронза БрА5.

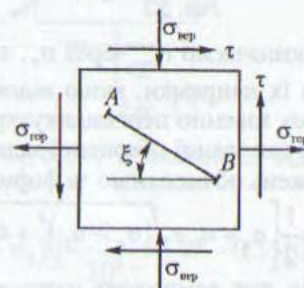


Рис. 5.1

План розв'язування задачі

1. Накреслити елемент за числовими даними шифру. Виписати з довідників потрібні характеристики матеріалу.
2. Позначити задані напруження через σ_α , σ_β , τ_α , τ_β , беручи $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$.
3. Обчислити значення головних напружень і визначити їх напрямки. Зобразити всередині заданого елемента головні площадки і головні напруження.
4. Обчислити головні деформації ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 і об'ємну деформацію ϵ_V .
5. Знайти кут α_1 між нормаллю n_{AB} до площадки AB і напруженням σ_1 та обчислити напруження в напрямку нормалі n_{AB} і перпендикулярному до нього – $\sigma_{\alpha 1}$, $\sigma_{\beta 1}$, $\tau_{\alpha 1}$, $\tau_{\beta 1}$.
6. Визначити деформацію $\epsilon_{\beta 1}$ в напрямку відрізка AB .
7. Вибрати відповідно до матеріалу теорію міцності і перевірити елемент на міцність.

Розв'язання задачі

1. Накреслимо елемент за числовими даними шифру (рис. 5.2) та випишемо потрібні характеристики матеріалу [2, дод. 1]: $E = 10^5$ МПа; $\sigma_T = 160$ МПа; $\mu = 0,35$.

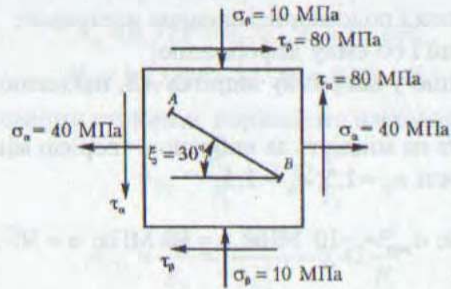


Рис. 5.2

2. Оскільки $\sigma_{гор} > \sigma_{вер}$, то позначаємо $\sigma_{гор}$ через σ_a , а $\sigma_{вер}$ через σ_b (рис. 5.2).

3. Головні напруження та їх напрямки, якщо відомо нормальні і дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках, визначаємо за схемою розв'язання так званої оберненої задачі.

Значення головних напружень обчислюємо за формулою

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[\sigma_a + \sigma_b \pm \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2 + 4\tau_a^2} \right].$$

Нагадаємо правила знаків для компонент напружень. *Нормальні напруження вважають додатними, якщо вони спричинюють розтяг елемента, та від'ємними – якщо стиск.* У разі лінійного та плоского напруженого стану для дотичних напружень можна застосовувати таке правило: *дотичне напруження на площадці елемента вважають додатним, якщо воно намагається повернути елемент відносно будь-якої точки, узятій всередині елемента, за годинниковою стрілкою.*

Звідси маємо:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[40 - 10 + \sqrt{(40 - (-10))^2 + 4(-80)^2} \right] = 98,82 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[40 - 10 - \sqrt{(40 - (-10))^2 + 4(-80)^2} \right] = -68,82 \text{ МПа}.$$

Для визначення положення головних площадок знайдемо тангенс кута α_0 , на який треба повернути нормаль n_a , щоб знайти напрямок алгебрично більшого головного напруження. Значення кута α_0 можна знаходити двома способами:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_a}{\sigma_1 - \sigma_b} = \frac{-(-80)}{98,82 - (-10)} = 0,735, \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}(0,735) = 36^\circ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_a}{\sigma_a - \sigma_b} = \frac{-2(-80)}{40 - (-10)} = 3,2, \quad \alpha = 0,5 \operatorname{arctg}(3,2) = 36^\circ.$$

Цей кут відкладаємо від горизонталі (напрямок нормалі n_a) проти годинникової стрілки (якщо значення кута α_0 від'ємне, то відкладаємо за годинниковою стрілкою) і знаходимо напрямок напруження σ_1 та напрямок σ_3 , перпендикулярний до нього. Зображаємо головні площадки і напруження, що на них діють, усередині заданого елемента (рис. 5.3).

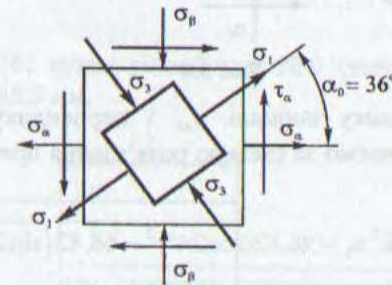


Рис. 5.3

4. Головні деформації $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ обчислюємо відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{10^5} [98,82 - 0,35(0 - 68,82)] = 1,23 \cdot 10^{-3};$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{10^5} [0 - 0,35(98,82 - 68,82)] = -0,105 \cdot 10^{-3};$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{10^5} [-68,82 - 0,35(98,82 + 0)] = -1,034 \cdot 10^{-3}.$$

Об'ємну деформацію ϵ_V можна знайти як суму головних деформацій

$$\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = (1,23 - 0,105 - 1,034) \cdot 10^{-3} = 9,1 \cdot 10^{-5}$$

або через головні напруження:

$$\epsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2 \cdot 0,35}{10^5} (98,82 - 68,82) = 9,1 \cdot 10^{-5}.$$

5. Знаходимо кут α_1 між нормаллю n_{AB} до площадки AB і напруженням σ_1 (рис. 5.4):

$$\alpha_1 = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ.$$

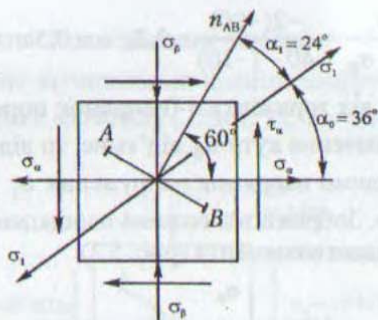


Рис. 5.4

Напруження в напрямку нормалі n_{AB} і перпендикулярному до нього (σ_{α_1} , σ_{β_1} , τ_{α_1} , τ_{β_1}) обчислюємо за схемою розв'язання прямої задачі в плоскому напруженому стані.

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 = 98,82(\cos 24^\circ)^2 - 68,82(\sin 24^\circ)^2 = 71,087 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\beta_1} = \sigma_1 \sin^2 \alpha_1 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_1 = 98,82(\sin 24^\circ)^2 - 68,82(\cos 24^\circ)^2 = -41,087 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_1 = \frac{98,82 - (-68,82)}{2} \sin(2 \cdot 24^\circ) = 62,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\beta_1} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_1 = -\frac{98,82 - (-68,82)}{2} \sin(2 \cdot 24^\circ) = -62,06 \text{ МПа}.$$

Нагадуємо, що стискні головні напруження підставляють у ці формули із знаком «мінус».

6. Визначаємо деформацію ϵ_{β_1} в напрямку відрізка AB :

$$\epsilon_{\beta_1} = \frac{1}{E} [\sigma_{\beta_1} - \mu \sigma_{\alpha_1}] = \frac{1}{10^5} [-41,087 - 0,35 \cdot 71,087] = -6,597 \cdot 10^{-4}.$$

7. Перевіряємо елемент на міцність за третьою теорією міцності (критерій найбільших дотичних напружень):

$$\sigma_{\text{скв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{скв}}^{\text{III}} = 98,82 + 68,82 = 167,64 \text{ МПа} > [\sigma] = \frac{\sigma_a}{n_b} = \frac{160}{1,5} = 106,7 \text{ МПа}.$$

Як бачимо, цього разу умова міцності не виконується.

Задача 6 Розрахунок зварних з'єднань

Розрахувати зварне з'єднання, виконане валиковими швами, визначивши довжини зварних швів з умови рівної міцності розтягнутих елементів і зварного шва (рис. 6.1). Висоту швів узяти рівною товщині накладок з листа або товщині полиці прокатного профілю. Для розрахунків узяти значення допустимих напружень на розтяг $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ та зріз $[\tau_e] = 80 \text{ МПа}$; K_A – двосторонній шов.

Дано: швелер № 16; кутик рівнобокий № 9 (товщина полиці $t = 7 \text{ мм}$); $z_0 = a = 24,7 \text{ мм}$; $c = 65,3 \text{ мм}$.

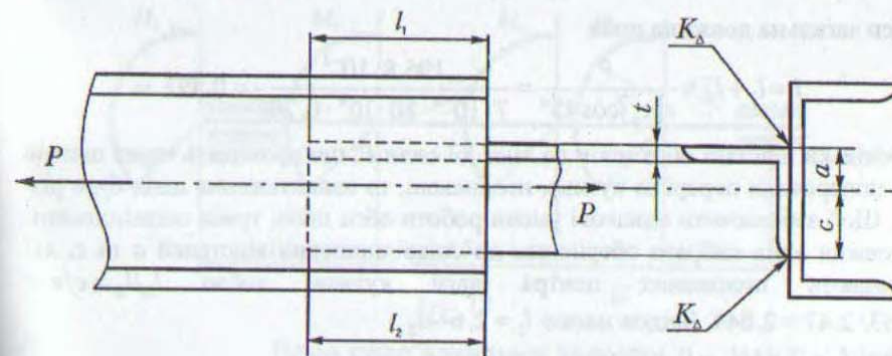


Рис. 6.1

План розв'язування задачі

1. Визначити значення допустимого навантаження P із розрахунку на розтяг зварних елементів.
2. Використовуючи значення допустимої сили P , із розрахунку на міцність зварних швів визначити їх довжину.

Розв'язання задачі

1. Визначасмо значення допустимого навантаження P із розрахунку на розтяг швелера і кутика.

Умова міцності для розтягу:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

Площі поперечних перерізів швелера та кутика визначасмо з таблиць сортименту за ГОСТ 8509–86. Площа перерізу швелера № 16 – $18,1 \text{ см}^2$, а ку-

тика № 9 – 12,3 см². Із цих двох значень обираємо менше і підставляємо його в умову міцності.

$$\text{Тоді } \sigma = \frac{P}{F_L} \leq [\sigma], \text{ де } F_L - \text{ площа поперечного перерізу кутика.}$$

Звідси

$$P = F_L [\sigma] = 12,3 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 196,8 \text{ кН.}$$

2. Обчислимо довжину зварних швів.

Умова міцності на зріз для валикових швів має вигляд

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2) t \cos 45^\circ} \leq [\tau_e].$$

Звідси загальна довжина швів

$$l = l_1 + l_2 = \frac{P}{t [\tau_e] \cos 45^\circ} = \frac{196,8 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 0,707} = 0,497 \text{ м.}$$

Оскільки відстані обох швів до лінії дії сили P , що проходить через центри ваги поперечних перерізів кутика, неоднакові, то навантаження швів буде різним. Щоб забезпечити однакові умови роботи обох швів, треба співвідношення довжин швів вибрати оберненим до співвідношення відстаней a та c , які визначають положення центра ваги кутика, тобто $l_1/l_2 = c/a = 6,53/2,47 = 2,644$. Звідси маємо $l_1 = 2,644l_2$.

$$\text{Тоді } l_2 + 2,644l_2 = 0,497 \text{ м.}$$

Остаточно отримаємо

$$l_2 = 0,497/3,644 = 0,136 \text{ м;}$$

$$l_1 = 2,644l_2 = 0,361 \text{ м.}$$

Задача 7 Розрахунок вала на кручення

Визначити розміри заданого вала (рис. 7.1) на кожній ділянці. Побудувати епюру кутів повороту перерізів вала. Взяти $a = 0,5$ м. Визначити також розміри поперечного перерізу вала на третій ділянці, вважаючи, що його виконано квадратним і трубчастим з відношенням діаметрів $d_4 : d_3 = 1 : 2$. Порівняти витрати матеріалу на 1 м довжини вала різного профілю.

Дано: $N_1 = 20$ кВт; $N_2 = 20$ кВт; $N_3 = 30$ кВт; $n_r = 1,5$; $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$; матеріал – сталь 50; модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Допустимі напруження $[\sigma] = 250$ МПа та $[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 250 = 150$ МПа; допустимий відносний кут закручування вала $[\Theta] = 0,5 \text{ град/м} = 8,73 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$.

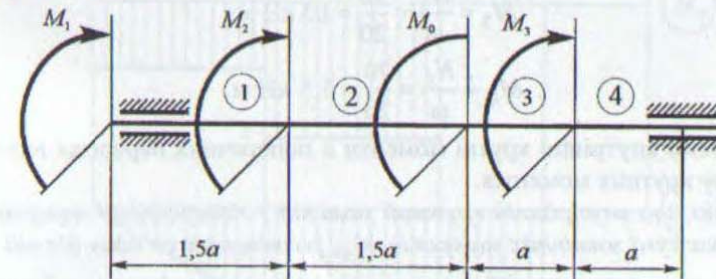


Рис. 7.1

План розв'язування задачі

1. За умови рівномірного обертання вала, нехтуючи тертям у підшипниках, визначити потужність на шківу N_0 .
2. Користуючись формулою $M_k = \frac{N \text{ кВт}}{\omega \text{ с}^{-1}} (\text{кН} \cdot \text{м})$, обчислити зовнішні крутні моменти M_i і побудувати епюру внутрішніх крутних моментів $M_{кр}$ у поперечних перерізах вала.
3. Обчислити діаметри окремих ділянок вала виходячи з умов міцності і жорсткості, округливши отримані результати до стандартних значень у більший бік.
4. Визначити величину кутів закручування окремих ділянок і всього вала.
5. Побудувати за цими даними епюру кутів повороту перерізів, беручи за нерухомий переріз один з кінців вала.
6. Визначити виходячи з умови міцності та жорсткості розміри квадратного вала на третій ділянці.
7. Підібрати виходячи з умови міцності та жорсткості розміри трубчастого вала з відношенням діаметрів $d_4/d_3 = 0,5$ на третій ділянці.
8. Порівняти витрати матеріалу на 1 м для круглого суцільного, трубчастого і квадратного валів.

Розв'язання задачі

1. Визначаємо невідому потужність N_0 :

$$-N_1 - N_2 - N_3 + N_0 = 0;$$

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 = 20 + 20 + 30 = 70 \text{ кВт.}$$

2. Визначаємо зовнішні крутні моменти:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{20}{20} = 1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{20}{20} = 1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_0 = \frac{N_0}{\omega} = \frac{70}{20} = 3,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Обчислюємо внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах вала і будемо епюру крутних моментів.

Нагадаємо, що внутрішній крутний момент у поперечному перерізі вала $M_{кр}$ дорівнює сумі зовнішніх моментів M_k , розміщених по один бік від перерізу. Будь-який з напрямків дії моменту (за чи проти годинникової стрілки) можна вважати додатним.

У цьому разі як додатний узято напрямок проти годинникової стрілки.

$$\text{Ділянка 1: } M_{1кр} = -M_1 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Ділянка 2: } M_{2кр} = -M_1 - M_2 = -1 - 1 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Ділянка 3: } M_{3кр} = -M_1 - M_2 + M_0 = -1 - 1 + 3,5 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Ділянка 4: } M_{4кр} = -M_1 - M_2 + M_0 - M_3 = -1 - 1 + 3,5 - 1,5 = 0.$$

Епюру крутних моментів подано на рис. 7.2.

3. Обчислимо діаметри окремих ділянок вала виходячи з умови міцності і жорсткості.

За умови міцності вала $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]$, урахувавши, що полярний момент опору перерізу вала $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, знаходимо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}}$$

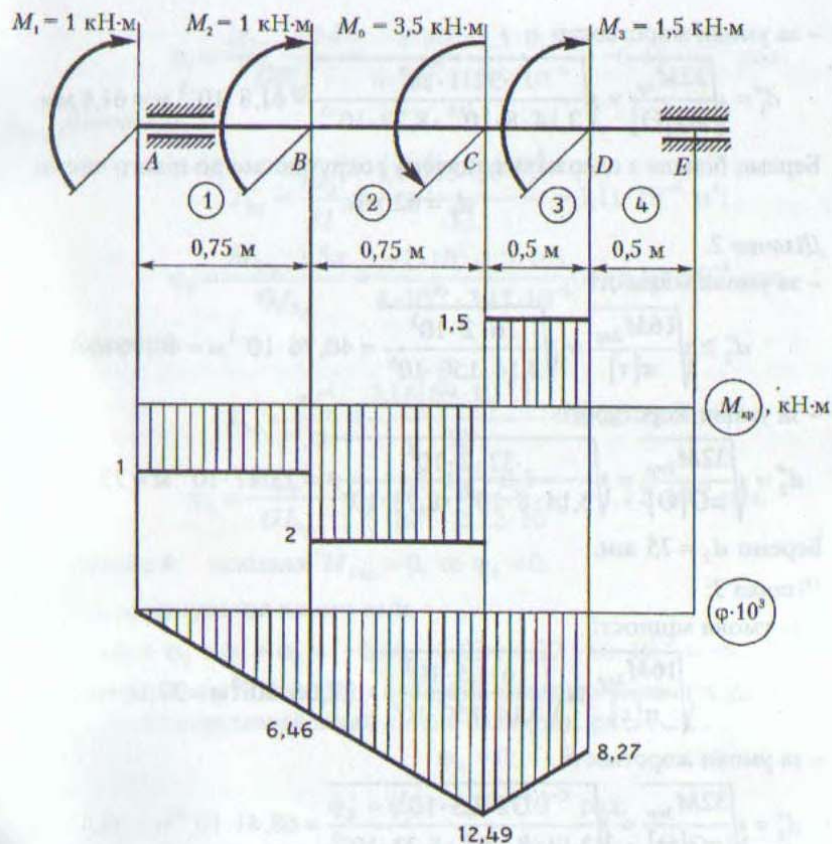


Рис. 7.2

За умови жорсткості вала $\Theta = \frac{M_{кр}}{GJ_{Ip}} \leq [\Theta]$, урахувавши, що полярний момент інерції перерізу вала $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, знаходимо

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\Theta]}}$$

Ділянка 1:

– за умови міцності

$$d'_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{1кр}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 32,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 32,4 \text{ мм};$$

– за умови жорсткості

$$d_1'' = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 8,73 \cdot 10^{-3}}} = 61,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 61,8 \text{ мм.}$$

Беремо більше з одержаних значень і округлюємо до цілого числа:

$$d_1 = 62 \text{ мм.}$$

Ділянка 2:

– за умови міцності

$$d_2' \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{2кр}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 40,76 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 40,76 \text{ мм;}$$

– за умови жорсткості

$$d_2'' = \sqrt[4]{\frac{32M_{2кр}}{\pi G[\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 8,73 \cdot 10^{-3}}} = 73,47 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 73,47 \text{ мм.}$$

Беремо $d_2 = 75 \text{ мм.}$

Ділянка 3:

– за умови міцності

$$d_3' \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{3кр}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 37,06 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 37,06 \text{ мм;}$$

– за умови жорсткості

$$d_3'' = \sqrt[4]{\frac{32M_{3кр}}{\pi G[\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 8,73 \cdot 10^{-3}}} = 68,41 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 68,41 \text{ мм.}$$

Беремо $d_3 = 69 \text{ мм.}$

Ділянка 4: оскільки $M_{4кр} = 0$, діаметр ділянки призначимо з конструктивних міркувань, наприклад візьмемо його рівним найменшому з одержаних діаметрів $d_4 = d_1 = 62 \text{ мм.}$

4. Визначимо величини кутів закручування окремих ділянок і всього вала.

Абсолютний кут закручування ділянки вала з постійним крутним моментом і поперечним перерізом визначаємо за формулою

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}$$

Ділянка 1:

$$J_{1p} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14(62 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{1кр} \cdot 1,5a}{GJ_{1p}} = \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,45 \cdot 10^{-6}} = -6,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка 2:

$$J_{2p} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14(75 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 3,11 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{2кр} \cdot 1,5a}{GJ_{2p}} = \frac{-2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,11 \cdot 10^{-6}} = -6,03 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка 3:

$$J_{3p} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14(69 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 2,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{3кр} \cdot a}{GJ_{3p}} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2,22 \cdot 10^{-6}} = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ділянка 4: оскільки $M_{4кр} = 0$, то $\varphi_4 = 0$.

Кут закручування всього вала

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (-6,46 - 6,03 + 4,22 + 0) \cdot 10^{-3} = -8,27 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

5. Обчислимо кути повороту перерізів вала, що збігаються з межами ділянок, беручи як нерухомий лівий кінець вала (див. рис. 7.2):

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_1 = -6,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_2 = (-6,46 - 6,03) \cdot 10^{-3} = -12,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_3 = (-12,49 + 4,22) \cdot 10^{-3} = -8,27 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_4 = -8,27 \cdot 10^{-3} + 0 = -8,27 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

За цими даними будемо епюру кутів повороту перерізів вала (див. рис. 7.2).

6. Визначимо виходячи з умов міцності та жорсткості розміри квадратного вала на третій ділянці.

За умови міцності:

$$W_{3к} = \frac{M_{3кр}}{[\tau]} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3; W_k = \alpha a^3; a^3 = \frac{W_k}{\alpha}$$

Для квадрата ($\frac{h}{b} = 1$) $\alpha = 0,208$. У результаті отримаємо:

$$a = \sqrt[3]{\frac{W_k}{\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 10^{-5}}{0,208}} = 0,0364 \text{ м} = 36,4 \text{ мм.}$$

За умови жорсткості:

$$J_k = \frac{M_{3кр}}{G[\Theta]} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 8,73 \cdot 10^{-3}} = 2,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$J_k = \beta a^4; \quad \beta = 0,141.$$

Звідси маємо:

$$a = \sqrt[4]{\frac{J_k}{\beta}} = \sqrt[4]{\frac{2,16 \cdot 10^{-6}}{0,141}} = 0,0626 \text{ м} = 62,6 \text{ мм}.$$

Беремо $a = 63 \text{ мм}$.

7. Визначимо виходячи з умов міцності та жорсткості розміри трубчастого вала на третій ділянці з відношенням діаметрів $d_n/d_3 = 0,5$.

За умови міцності $W_{3p} = W_{3к} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$.

$$W_{3p} = \frac{\pi d_{33}^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d_n}{d_3} \right)^4 \right) = \frac{\pi}{16} (1 - 0,5^4) d_{33}^3 = \frac{\pi}{16} \cdot 0,938 d_{33}^3 = 0,184 d_{33}^3;$$

$$0,184 d_{33}^3 \geq 1 \cdot 10^{-5};$$

$$d_{33} \geq \sqrt[3]{\frac{10^{-5}}{0,184}} \geq 37,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 37,9 \text{ мм}.$$

Беремо $d_{33} = 38 \text{ мм}$.

$$d_{3н} = 0,5 d_{33} = 0,5 \cdot 38 = 19 \text{ мм}.$$

За умови жорсткості $J_{3p} = 2,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$.

$$J_{3p} = \frac{\pi d_3^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d_n}{d_3} \right)^4 \right) = \frac{\pi}{32} (1 - 0,5^4) d_{33}^4 = 0,092 d_{33}^4.$$

Отримаємо:

$$0,092 d_{33}^4 \geq 2,22 \cdot 10^{-6};$$

$$d_{33} \geq \sqrt[4]{\frac{2,22 \cdot 10^{-6}}{0,092}} = 69,52 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 69,52 \text{ мм}.$$

Беремо $d_{33} = 70 \text{ мм}$.

Тоді: $d_{3н} = 0,5 d_{33} = 0,5 \cdot 70 = 35 \text{ мм}$.

Беремо $d_{33} = 70 \text{ мм}$, $d_{3н} = 35 \text{ мм}$.

8. Порівняння витрат матеріалу на 1 м для суцільного круглого, трубчастого і квадратного валів.

Вагу стрижнів можна визначити за формулою $P = \gamma l F$. Оскільки $\gamma l = \text{const}$ для всіх стрижнів, доцільно порівняти площі поперечних перерізів, щоб отримати співвідношення витрат матеріалу на 1 м різного профілю.

Тип перерізу:

$$\text{— круглий: } F_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 69^2}{4} = 3739,28 \text{ мм}^2;$$

$$\text{— трубчастий: } F_{\text{труб}} = \frac{\pi d_{33}^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{\pi \cdot 70^2}{4} \cdot 0,75 = 2886,34 \text{ мм}^2;$$

$$\text{— квадратний: } F_{\text{кв}} = a^2 = 63^2 = 3969 \text{ мм}^2.$$

$$F_{\text{труб}} : F_{\text{круг}} : F_{\text{кв}} = P_{\text{труб}} : P_{\text{круг}} : P_{\text{кв}} = 2886,34 : 3739,28 : 3969 = 1 : 1,29 : 1,37.$$

За отриманим результатом можна зробити висновок, що найбільшу вагу має профіль з квадратним перерізом, а найменшу – трубчастий профіль. Отже, найменше матеріалу потрібно для виготовлення трубчастого профілю.

Задача 8

Розрахунок гвинтових циліндричних пружин

Перевірити міцність заданої статично невизначної системи пружин (рис. 8.1) і обчислити переміщення точки, що знаходиться посередині довжини вказаної пружини, якщо відомо середні діаметри пружин $D_1 = 50$ мм, $D_2 = 10$ мм, $D_3 = 15$ мм і діаметри дроту кожної з пружин $d_1 = 5$ мм, $d_2 = 10$ мм, $d_3 = 15$ мм. Усі пружини сталеві. Допустиме напруження $[\tau] = 300$ МПа.

Дано: $P = 1,5$ кН; пружина 2; модуль пружності для зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Кількість витків пружин $n_1 = 40$; $n_2 = 40$; $n_3 = 20$.

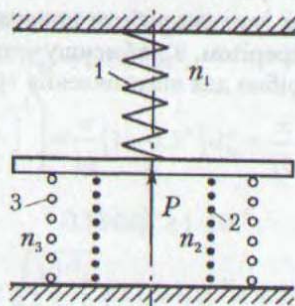


Рис. 8.1

План розв'язування задачі

1. Визначити ступінь статичної невизначності системи.
2. Записати відповідні рівняння статки.
3. Скласти рівняння сумісності деформацій і виразити деформації пружин через зусилля.
4. Розв'язати сукупно рівняння статки та рівняння сумісності деформацій і визначити навантаження кожної пружини.
5. Знайти напруження в кожній пружині і, визначивши найбільш напружену пружину, перевірити її на міцність.
6. Визначити переміщення вказаної точки.

Розв'язання задачі

1. Визначимо ступінь статичної невизначності системи. Позначимо через P_1 , P_2 , P_3 сили, які припадають на кожну з пружин і підлягають визначенню. Оскільки осі пружин у нашому прикладі збігаються, маємо лінійну систему сил (рис. 8.2), а отже, одне рівняння рівноваги. Тобто система двічі статично невизначна.

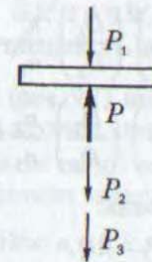


Рис. 8.2

2. Статичні рівняння рівноваги. Запишемо їх у вигляді:

$$\sum Y = 0; \quad P_1 + P_2 + P_3 = P. \quad (8.1)$$

3. Геометричні рівняння. Щоб скласти рівняння сумісності деформацій, розглянемо систему у zdeформованому стані (рис. 8.3).

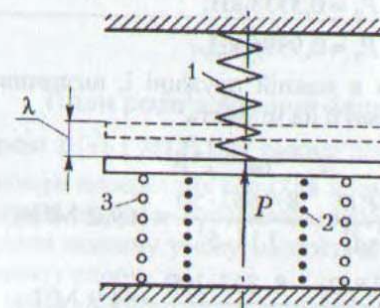


Рис. 8.3

Через повну осьову симетрію системи жорстка перекладина переміщується паралельно сама собі, як показано на рисунку. Тоді рівняння сумісності деформацій запишемо так:

$$|\lambda_1| = \lambda_2 = \lambda_3, \quad (8.2)$$

де λ_1 , λ_2 , λ_3 – величини деформацій пружин.

4. Фізичні рівняння. Виразимо деформації пружин через сили, які на них діють:

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4}; \quad \lambda_2 = \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4}; \quad \lambda_3 = \frac{8P_3 D_3^3 n_3}{G d_3^4}. \quad (8.3)$$

5. Розв'язуємо систему рівнянь (8.1) – (8.3).

Розв'язуючи спільно рівняння (8.3) і (8.2), отримаємо:

$$\begin{cases} P_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \frac{n_1}{n_2} = P_2, \\ P_2 \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4 \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^3 \frac{n_2}{n_3} = P_3. \end{cases}$$

Після підстановки числових значень:

$$\begin{cases} P_2 = 2P_1, \\ P_3 = 3P_2 = 6P_1. \end{cases}$$

Рівняння рівноваги (8.1) набуває вигляду

$$P_1 + 2P_1 + 6P_1 = 1,5 \text{ кН.}$$

Звідси

$$P_1 = 0,1667 \text{ кН;}$$

$$P_2 = 0,3333 \text{ кН;}$$

$$P_3 = 0,9996 \text{ кН.}$$

6. Знайдемо напруження в кожній пружині i , визначивши найбільш напружену пружину, перевіримо її на міцність:

$$\tau_{\max} \leq [\tau];$$

$$\tau_1 = \frac{8P_1D_1}{\pi d_1^3} = \frac{8 \cdot 1667 \cdot 50}{3,14 \cdot 5^3} = 169,2 \text{ МПа;}$$

$$\tau_2 = \frac{8P_2D_2}{\pi d_2^3} = \frac{8 \cdot 333 \cdot 100}{3,14 \cdot 10^3} = 84,9 \text{ МПа;}$$

$$\tau_3 = \frac{8P_3D_3}{\pi d_3^3} = \frac{8 \cdot 996 \cdot 150}{3,14 \cdot 15^3} = 113,1 \text{ МПа.}$$

Найбільш напружена перша пружина:

$$\tau_1 = 169,2 \text{ МПа} < 300 \text{ МПа.}$$

Умова міцності виконується.

7. Визначимо переміщення вказаної точки, що знаходиться посередині довжини другої пружини. Для цього у відповідне з рівнянь (8.3) підставимо $n = 0,5n_2$:

$$\lambda_2 = \frac{8P_2D_2^3 \cdot 0,5n_2}{Gd_2^4} = \frac{8 \cdot 333,3 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 40}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^4} = 66,7 \text{ мм.}$$

Задача 9 Розрахунок на міцність консольних балок

Для заданої сталеві балки (рис. 9.1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, підібрати круглий, прямокутний (з відношенням $h/b = 2$) і двотавровий перерізи. Порівняти вагу 1 м довжини кожного профілю. Довжина балки $l = 2$ м. Узяти коефіцієнт запасу міцності $n_T = 1,5$.

Дано: $P = -30$ кН; $q = -15$ кН/м; $n = 0,5$; $M = -50$ кН·м; матеріал – сталь 40.

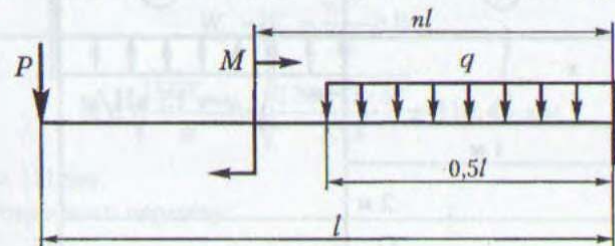


Рис. 9.1

План розв'язування задачі

1. Записати вирази $Q(x)$ і $M(x)$ для кожної ділянки консольної балки та побудувати епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M . Перевірити побудовані епюри за допомогою диференціальних залежностей.
2. Використовуючи основну умову міцності для згину, знайти потрібне значення моменту опору.
3. Підібрати розміри круглого, прямокутного та двотаврового перерізів.
4. Порівняти вагу 1 м довжини кожного профілю, вважаючи, що матеріал для всіх профілів однаковий.

Розв'язання задачі

1. Запишемо вирази $Q(x)$ і $M(x)$ для кожної ділянки консольної балки та побудуємо епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M (рис. 9.2).

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 1$.

$$Q(x) = P = 30 \text{ кН;}$$

$$M(x) = Px;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(1) = 30 \text{ кН·м.}$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 1$.

$$Q(x) = P + qx; \quad Q(0) = 30 \text{ кН; } Q(1) = 30 + 15 \cdot 1 = 45 \text{ кН.}$$

$$M(x) = P(1+x) + \frac{qx^2}{2} - M;$$

$$M(0) = 30 \cdot 1 - 50 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(1) = 30 \cdot 2 + \frac{15 \cdot 1}{2} - 50 = 17,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

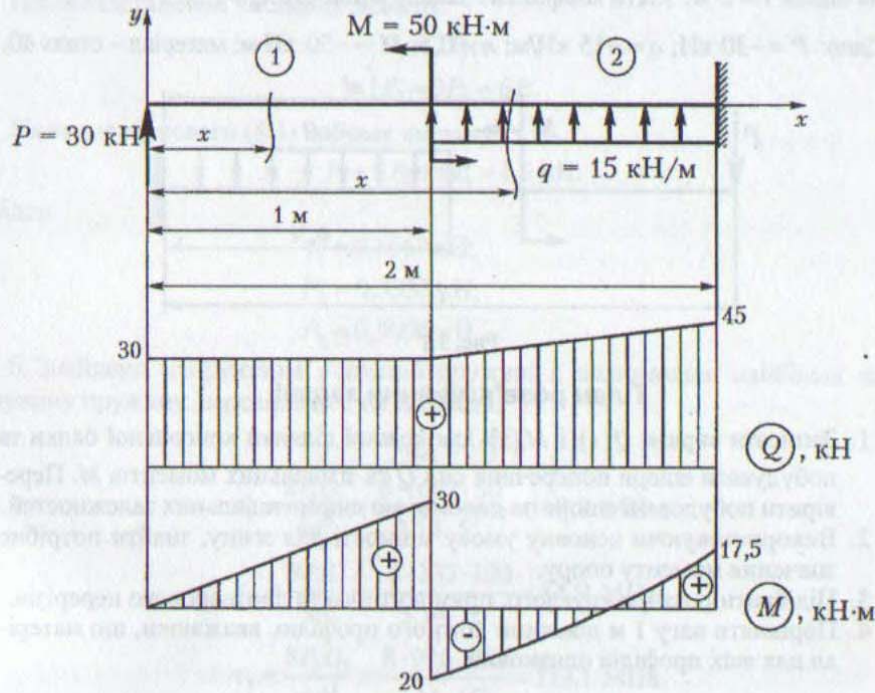


Рис. 9.2

2. Використовуючи основну умову міцності для згину, визначимо потрібне значення моменту опору.

Основна умова міцності для згину:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

Для сталі 40 границя текучості $\sigma_{\tau} = 340$ МПа.

Допустиме напруження

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{340}{1,5} = 226,7 \text{ МПа}.$$

Тоді маємо:

$$W_{\text{роз}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^3}{226,7 \cdot 10^6} = 1,32333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 132,33 \cdot 10^3 \text{ мм}^3,$$

де M_{\max} – максимальний згинальний момент.

3. Підберемо розміри круглого, прямокутного та двотаврового перерізів.

Для круглого перерізу:

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} \geq W_{\text{роз}};$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_{\text{роз}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{132333 \cdot 32}{3,14}} = 110,46 \text{ мм}.$$

Беремо $d = 111$ мм.

Площа поперечного перерізу:

$$F_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (111)^2}{4} = 9672 \text{ мм}^2.$$

Для прямокутного перерізу ($h/b = 2$) найбільший момент опору

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3.$$

Звідси

$$\frac{2}{3} b^3 \geq W_{\text{роз}};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} W_{\text{роз}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 132333} = 0,058 \text{ м} = 58 \text{ мм}.$$

Беремо $b = 58$ мм. Тоді $h = 2b = 2 \cdot 58 = 116$ мм.

Площа поперечного перерізу:

$$F_{\text{пр}} = bh = 58 \cdot 116 = 6728 \text{ мм}^2.$$

Для двотаврового перерізу. Оскільки розрахункове значення моменту опору $W_{\text{роз}} = 132,33 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$, то за довідником вибираємо двотавр № 18, у якого

$W_x = 148 \text{ см}^3$.

Площа поперечного перерізу:

$$F_{\text{двт}} = 23,8 \text{ см}^2 = 2380 \text{ мм}^2.$$

4. Порівняємо вагу 1 м довжини кожного профілю.

Вагу можна обчислити за формулою $P = \gamma l F$. Оскільки для всіх перерізів питома вага матеріалу γ і довжина балки l однакові, то доцільно порівняти площі поперечних перерізів, щоб отримати відношення витрат матеріалу на один погонний метр профілю:

$$F_{\text{круг}} : F_{\text{пр}} : F_{\text{двг}} = P_{\text{круг}} : P_{\text{пр}} : P_{\text{двг}} = 9\,672 : 6\,728 : 2\,380 = 4,06 : 2,83 : 1.$$

Із цього можна зробити висновок, що найбільшу вагу має балка круглого перерізу, а найменшу – двотаврового перерізу. Отже, найменше матеріалу потрібно для виготовлення балки двотаврового профілю.

Задача 10

Розрахунок на міцність шарнірно опертих балок

Для заданої сталеві балки (рис. 10.1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. Перевірити балку на міцність. Узяти коефіцієнт запасу міцності $n_t = 1,5$. Відстань між опорами $l = 4$ м. Складений переріз працює як одне ціле.

Дано: $n = 0,5$; $q = 20$ кН/м; $P = 50$ кН; $M = 15$ кН·м; матеріал – сталь 50. Переріз балки складається з двох двотаврів № 18:

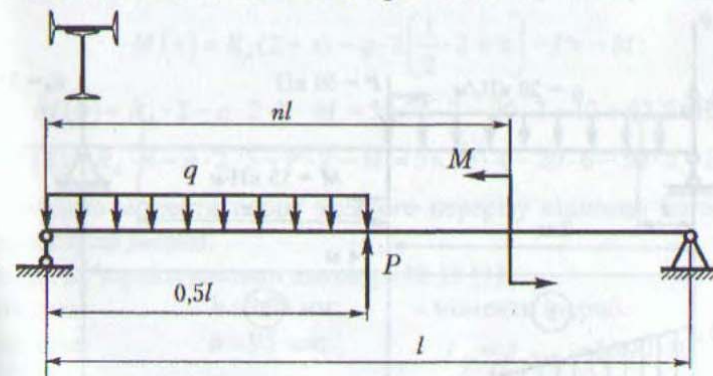


Рис. 10.1

План розв'язування задачі

1. Скласти рівняння рівноваги та визначити опорні реакції.
2. Записати вирази $Q(x)$ і $M(x)$ для кожної ділянки балки та побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M . Перевірити побудовані епюри за допомогою диференціальних залежностей.
3. Обчислити моменти опору заданого перерізу відносно головних центральних осей та раціонально розмістити переріз.
4. Перевірити міцність балки за основною умовою міцності для згину; укажати ступінь недовантаження або перевантаження балки (у відсотках).
5. Дати рекомендації щодо раціонального номера профілів поперечного перерізу.

Розв'язання задачі

1. Складемо рівняння рівноваги та визначимо опорні реакції.

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_A = q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + P \cdot 2 - R_B \cdot 4 - M = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2 + P \cdot 2 - M}{4} = \frac{20 \cdot 2 + 50 \cdot 2 - 15}{4} = 31,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = R_A \cdot 4 - q \cdot 2 \left(4 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) - P \cdot 2 - M = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 + M}{4} = \frac{20 \cdot 6 + 50 \cdot 2 + 15}{4} = 58,75 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0; \sum Y = 58,75 - 20 \cdot 2 - 50 + 31,25 = 0.$$

2. Будемо епори поперечних сил Q і згинальних моментів M (рис. 10.2).

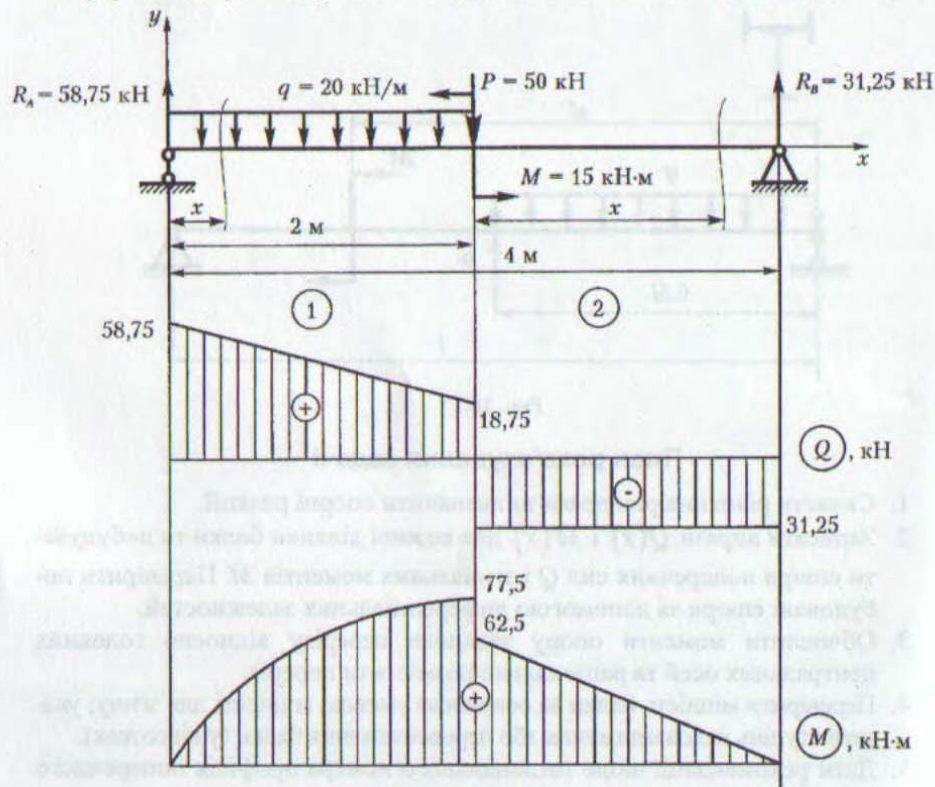


Рис. 10.2

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 2$.

$$Q(x) = R_A - qx;$$

$$Q(0) = R_A = 58,75 \text{ кН};$$

$$Q(2) = R_A - q \cdot 2 = 58,75 - 20 \cdot 2 = 18,75 \text{ кН};$$

$$M(x) = R_A x - q \frac{x^2}{2};$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2) = 58,75 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 77,5 \text{ кН·м}.$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 2$.

$$Q(x) = R_A - q \cdot 2 - P = 58,75 - 20 \cdot 2 - 50 = -31,25 \text{ кН};$$

$$M(x) = R_A(2+x) - q \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + x\right) - Px - M;$$

$$M(0) = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - M = 58,75 \cdot 2 - 20 \cdot 2 - 15 = 62,5 \text{ кН·м};$$

$$M(2) = R_A \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - P \cdot 2 - M = 58,75 \cdot 4 - 20 \cdot 6 - 50 \cdot 2 - 15 = 0.$$

3. Обчислимо моменти опору заданого перерізу відносно його головних центральних осей інерції.

Геометричні характеристики двотавра № 18 [1]:

- висота: $h = 180 \text{ мм};$ - моменти інерції:
- ширина: $b = 95 \text{ мм};$ $J_{z1} = J_{y2=y_c} = 1290 \cdot 10^4 \text{ мм}^4,$
- площа: $F = 2340 \text{ мм}^2;$ $J_{y1=y_c} = J_{z2} = 82,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$
- товщина стояка: $d = 5,1 \text{ мм};$

Щоб знайти моменти опору, виконаємо такі дії.

3.1. Знайдемо положення головних центральних осей інерції перерізу (рис. 10.3).

Переріз має вісь симетрії Y_C . Отже, вона головна центральна вісь інерції. Друга головна вісь інерції буде до неї перпендикулярною і проходитиме через центр ваги.

Щоб знайти положення центра ваги перерізу на осі Y_C , виберемо допоміжну систему координат $Y_C O z$. Статичний момент площі перерізу відносно допоміжної осі z обчислюємо за формулою

$$S_z = y_C F_{\text{пер}},$$

де $F_{\text{пер}}$ - площа всього перерізу, y_C - відстань від його центра ваги до осі z .

Звідси

$$y_C = \frac{S_z}{F_{\text{пер}}}.$$

З другого боку, статичний момент складного перерізу відносно будь-якої осі дорівнює сумі статичних моментів його складових відносно цієї самої осі. Для нашого перерізу матимемо

$$S_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = y_c^{(1)} F_1 + y_c^{(2)} F_2,$$

де $y_c^{(1)}$, $y_c^{(2)}$ – відстані центрів ваги відповідно першого і другого двотаврів від допоміжної осі z :

$$y_c^{(1)} = \frac{h}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ мм};$$

$$y_c^{(2)} = h + 0,5d = 180 + 0,5 \cdot 5,1 = 182,55 \text{ мм};$$

$F_1 = F_2 = 2340 \text{ мм}^2$ – їх площі поперечних перерізів.

У результаті

$$S_z = 90 \cdot 2340 + 182,55 \cdot 2340 = 637\,767 \text{ мм}^3.$$

$$F_{\text{пер}} = F_1 + F_2 = 2340 + 2340 = 4\,680 \text{ мм}^2.$$

Тоді

$$y_c = \frac{S_z}{F_{\text{пер}}} = \frac{637\,767}{4\,680} = 136,275 \text{ мм}.$$

Позначимо центр ваги перерізу точкою C і проведемо через неї другу головну вісь інерції Z_C .

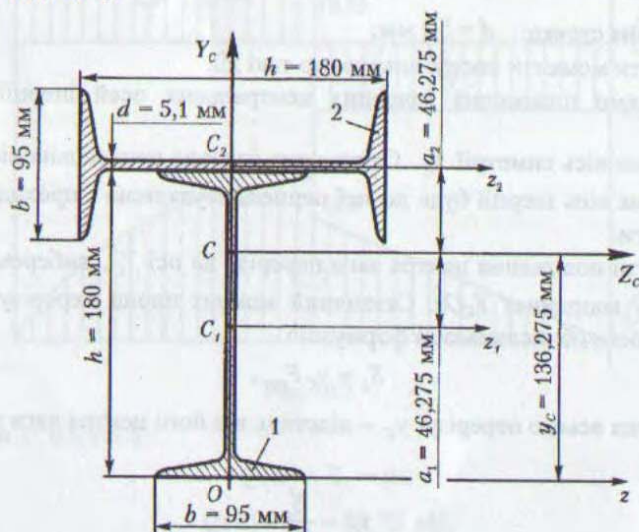


Рис. 10.3

3.2. Знайдемо моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей.

Відносно осі Y_C :

$$J_{Y_C} = J_{Y_C}^{(1)} + J_{Y_C}^{(2)}.$$

Тут $J_{Y_C}^{(1)}$ і $J_{Y_C}^{(2)}$ – моменти інерції відповідно першого і другого двотаврів відносно головної центральної осі перерізу Y_C .

Ураховуючи, що центральна вісь перерізу Y_C одночасно і центральна вісь для кожного з двотаврів, отримаємо

$$J_{Y_C} = J_{Y_C}^{(1)} + J_{Y_C}^{(2)} = J_{y1} + J_{y2} = 826\,000 + 12\,900\,000 = 13\,726,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Відносно осі Z_C :

$$J_{Z_C} = J_{Z_C}^{(1)} + J_{Z_C}^{(2)}.$$

Тут $J_{Z_C}^{(1)}$ і $J_{Z_C}^{(2)}$ – моменти інерції відповідно першого і другого двотаврів відносно головної центральної осі перерізу Z_C . Щоб їх обчислити, потрібно скористатися формулами для визначення моментів інерції відносно паралельних осей:

$$J_{Z_C}^{(1)} = J_{z_1} + a_1^2 F_1,$$

де J_{z_1} – момент інерції першого двотавра відносно його центральної осі z_1 (див. рис. 10.3); a_1 – відстань між віссю z_1 та центральною віссю всього перерізу Z_C :

$$a_1 = y_c - \frac{h}{2} = 136,275 - 90 = 46,275 \text{ мм}.$$

Тоді

$$J_{Z_C}^{(1)} = 12\,900\,000 + 46,275^2 \cdot 2340 = 17\,910,8 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Аналогічно для другого двотавра:

$$J_{Z_C}^{(2)} = J_{z_2} + a_2^2 F_2;$$

$$a_2 = (h + 0,5d) - y_c = (180 + 0,5 \cdot 5,1) - 136,275 = 46,275 \text{ мм};$$

$$J_{Z_C}^{(2)} = 826\,000 + 46,275^2 \cdot 2340 = 583,68 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Сумарний момент інерції перерізу відносно осі Z_C :

$$J_{Z_C} = 17\,910,8 \cdot 10^4 + 583,68 \cdot 10^4 = 23\,747,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

3.3. Знайдемо моменти опору для заданого перерізу

$$W_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{z_{\max}} = \frac{J_{y_c}}{0,5h} = \frac{1372,6 \cdot 10^4}{90} = 152,51 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$W_{z_c} = \frac{J_{z_c}}{y_{\max}} = \frac{J_{z_c}}{y_c} = \frac{2374,76 \cdot 10^4}{136,275} = 174,26 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

3.4. Щоб раціонально розмістити переріз відносно діючого навантаження, порівняємо моменти опору відносно головних осей інерції.

Силова лінія в перерізі має бути перпендикулярною до осі, відносно якої момент опору більший (див. умову міцності). Оскільки в нашому випадку $W_{z_c} > W_{y_c}$, то попередньо прийнята орієнтація перерізу правильна, оскільки силова лінія збігається з віссю Y_c і перпендикулярна до осі Z_c .

4. Перевіримо міцність балки за основною умовою міцності для згину.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Найбільший згинальний момент, згідно з епурою (див. рис. 10.2), $M_{\max} = 77,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Допустиме напруження для сталі 50 знайдемо за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{380}{1,5} = 253,3 \text{ МПа}.$$

Найбільше напруження в небезпечному перерізі:

$$\sigma_{\max} = \frac{77,5 \cdot 10^6}{174,26 \cdot 10^3} = 444,74 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Як бачимо, умова міцності не виконується.

Визначимо ступінь перевантаження:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{444,74 - 253,3}{253,3} = 75,6 \%$$

5. Згідно з розрахунком, балку перевантажено. Щоб вона могла витримати задане навантаження, потрібно підібрати двотаври з більшим номером профілю згідно із сортаментом.

Задача 11

Розрахунок на міцність консольних рам

Для заданої сталеві рами (рис. 11.1) побудувати епюри поздовжніх сил і згинальних моментів. Підібрати переріз вказаної форми з розрахунку на згин. Узяти $n_T = 1,5$, $a = 2 \text{ м}$. Складений переріз працює як одне ціле.

Дано: $q = 20 \text{ кН/м}$; $n = 1$; $P = 40 \text{ кН}$; $k = 0,5$; $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$; матеріал – сталь 30 Г.

Форма перерізу:

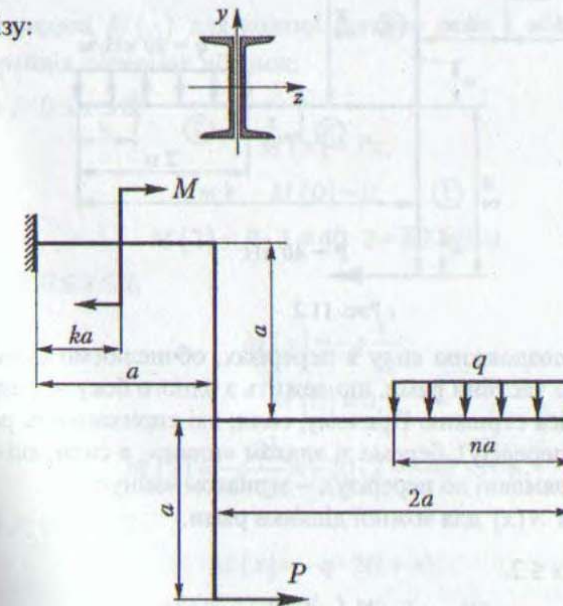


Рис. 11.1

План розв'язування задачі

1. Записати вирази $N(x)$ для кожної ділянки рами та побудувати епюру поздовжніх сил N .
2. Записати вирази $M(x)$ для кожної ділянки рами та побудувати епюру згинальних моментів M .
3. Використовуючи основну умову міцності для згину, визначити потрібну величину моменту опору.
4. Підібрати поперечний переріз вказаної форми.

Розв'язання задачі

1. Для побудови епюри поздовжніх сил N виділимо на рамі шість ділянок, на кожній з яких розглянемо переріз на деякій відстані x від її межі з боку не-зашемлених кінців рами (рис. 11.2).

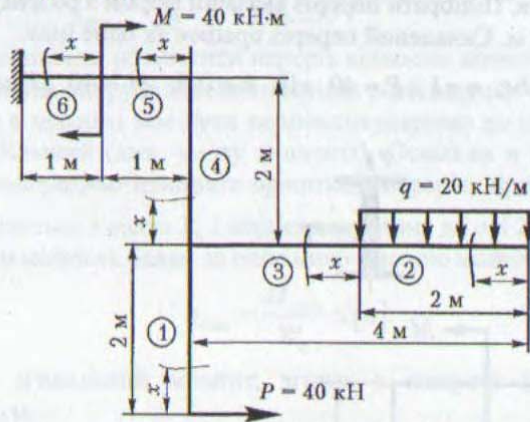


Рис. 11.2

Щоб визначити поздовжню силу в перерізах, обчислюємо суму проєкцій сил, прикладених до частини рами, що лежить з одного боку від перерізу і не містить опори, на вісь стрижня. Причому, сили, які спричиняють розтягування (напрявлені від перерізу), беремо зі знаком «плюс», а сили, які спричиняють стискання (напрявлені до перерізу), – зі знаком «мінус».

Запишемо вирази $N(x)$ для кожної ділянки рами.

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 2$.

$$N_1(x) = 0.$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 2$.

$$N_2(x) = 0.$$

Ділянка 3: $0 \leq x \leq 2$.

$$N_3(x) = 0.$$

Ділянка 4: $0 \leq x \leq 2$.

$$N_4(x) = q \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}.$$

Ділянки 5, 6: $0 \leq x \leq 1$.

$$N_5(x) = N_6(x) = P = 40 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил. Ординати епюри відкладаємо перпендикулярно до базових ліній епюри, урахувавши, що додатні ординати відкладають із зовнішнього боку, а від'ємні – із внутрішнього (рис. 11.3).

2. Для побудови епюри згинальних моментів запишемо вирази $M(x)$ для кожної виділеної раніше ділянки рами, урахувавши, що згинальний момент у будь-якому перерізі рами дорівнює сумі моментів зовнішніх сил відносно розглянутого перерізу, узятих по один бік від перерізу. Складаючи вирази $M(x)$, додатний напрям для моментів беремо довільно, наприклад проти годинникової стрілки.

Запишемо вирази $M(x)$ для кожної ділянки рами і обчислимо значення моментів у крайніх перерізах ділянок:

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = Px;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2) = P \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = -q \frac{x^2}{2};$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2) = -q \frac{2^2}{2} = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка 3: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = -q \cdot 2(1+x);$$

$$M(0) = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40;$$

$$M(2) = -q \cdot 2(1+2) = -20 \cdot 6 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка 4: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = P(2+x) - q \cdot 2 \cdot 3;$$

$$M(0) = P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 3 = 40 \cdot 2 - 20 \cdot 6 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(2) = P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 6 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка 5: $0 \leq x \leq 1$.

$$M(x) = P \cdot 4 - q \cdot 2(3+x);$$

$$M(0) = P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 6 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(2) = P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 4 = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 8 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка б: $0 \leq x \leq 1$.

$$M(x) = P \cdot 4 - q \cdot 2(4+x) - M;$$

$$M(0) = P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 4 - M = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 8 - 40 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(2) = P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 5 - 40 = 40 \cdot 4 - 20 \cdot 10 - 40 = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів. Ординати відкладаємо в бік стиснених волокон.

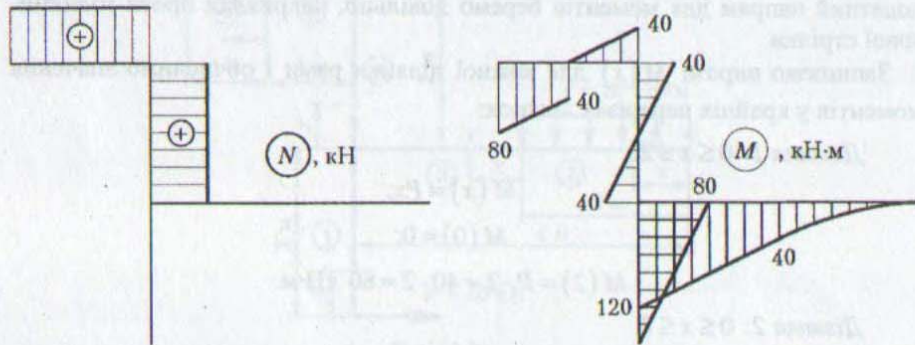


Рис. 11.3

3. Використовуючи основну умову міцності для згину, визначимо потрібне значення моменту опору.

Основна умова міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Знайдемо значення допустимого напруження для сталі 30Г, якщо границя текучості матеріалу $\sigma_T = 320$ МПа.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{1,5} = 213 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^6}{213} = 563,38 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

4. Підберемо поперечний переріз указаної форми.

Момент опору цього перерізу

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}},$$

де $J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)}$.

Тут $J_z^{(1)} = J_z^{(2)}$ – момент інерції одного швелера.

$$\text{Тоді } W_z = \frac{J_z^{(1)} + J_z^{(2)}}{y_{\max}} = \frac{2J_z^{(1)}}{y_{\max}} = 2W_z^{(1)}.$$

Момент опору одного швелера

$$W_z^{(1)} = W_z^{(2)} = \frac{W_z}{2} = \frac{563,38 \cdot 10^3}{2} = 281,69 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 281,69 \text{ см}^3.$$

За таблицями сортamentів вибираємо швелер № 27, для якого $W_z = 308 \text{ см}^3$.

Задача 12

Розрахунок на міцність шарнірно опертих рам

Для заданої сталеві рами (рис. 12.1) побудувати епюри поздовжніх сил і згинальних моментів. Перевірити раму на міцність при згині. Складений переріз працює як одне ціле.

Дано: $a = 2$ м; $q = 20$ кН/м; $n_x = 1,5$; $P = 30$ кН; $n = 0,25$; $M = 30$ кН·м; $k = 0,5$; матеріал – сталь 20.

Форма перерізу:

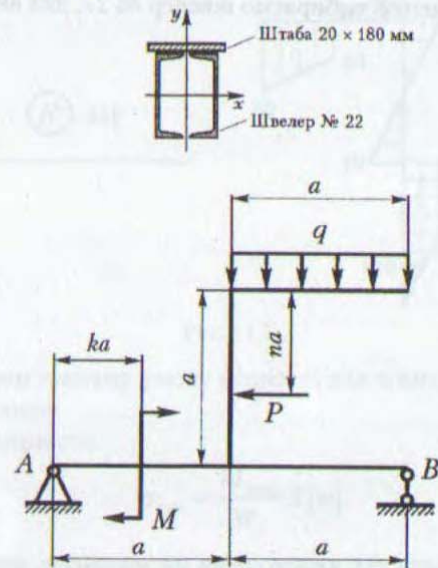


Рис. 12.1

План розв'язування задачі

1. Скласти рівняння рівноваги рами та визначити реакції опор.
2. Записати вирази $N(x)$ для кожної ділянки рами та побудувати епюру поздовжніх сил N .
3. Записати вирази $M(x)$ для кожної ділянки рами та побудувати епюру згинальних моментів M .
4. Визначити моменти опору перерізу відносно головних центральних осей та раціонально його розмістити.
5. Перевірити міцність у небезпечному перерізі за основною умовою міцності для згину; указати ступінь недовантаження або перевантаження рами (у відсотках).
6. Дати рекомендації щодо раціонального номера профілю поперечного перерізу.

1. Складемо рівняння рівноваги рами та визначимо реакції опор (рис. 12.2).

$$\sum X = H_A - P = 0; \quad H_A = P = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = M - P(2 - 0,5) - R_B \cdot 4 + q \cdot 2(1 + 2) = 0;$$

$$R_B = \frac{M - P \cdot 1,5 + q \cdot 6}{4} = \frac{30 - 30 \cdot 1,5 + 20 \cdot 6}{4} = 26,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = M - P(2 - 0,5) + R_A \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 1,5 + q \cdot 2}{4} = \frac{-30 + 30 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2}{4} = 13,75 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 2 = 0.$$

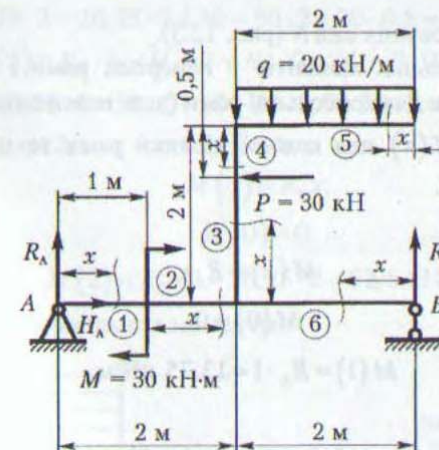


Рис. 12.2

2. Побудуємо епюру поздовжніх сил.

Щоб побудувати епюру поздовжніх сил N , виділяємо на рамі шість ділянок, на кожній з яких розглянемо переріз на деякій відстані x від її межі, краще з боку тієї частини рами, яку будемо розглядати під час обчислень $N(x)$, а потім і $M(x)$. Розрахунок поздовжньої сили в перерізах і побудову епюри $N(x)$ проводимо так, як і для консольної рами (див. пояснення до задачі 11).

Виведемо вирази $N(x)$ для кожної ділянки рами та побудуємо епюру поздовжніх сил N .

Ділянка I: $0 \leq x \leq 1$.

$$N(x) = -H_A = -30 \text{ кН}.$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 1$.

$$N(x) = -H_A = -30 \text{ кН.}$$

Ділянка 3: $0 \leq x \leq 1,5$.

$$N(x) = -R_A - R_B = -13,75 - 26,25 = -40 \text{ кН.}$$

Ділянка 4: $0 \leq x \leq 0,5$.

$$N(x) = -R_A - R_B = -13,75 - 26,25 = -40 \text{ кН.}$$

Ділянка 5: $0 \leq x \leq 2$.

$$N(x) = 0.$$

Ділянка 6: $0 \leq x \leq 2$.

$$N(x) = 0.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 12.3).

3. Визначення згинальних моментів у перерізах рами і побудову епюри $M(x)$ проводимо так, як для консольної рами (див. пояснення до задачі 11).

Запишемо вирази $M(x)$ для кожної ділянки рами та побудуємо епюру згинальних моментів M .

Ділянка 1: $0 \leq x \leq 1$.

$$M(x) = R_A x;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(1) = R_A \cdot 1 = 13,75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка 2: $0 \leq x \leq 1$.

$$M(x) = R_A(1+x) + M;$$

$$M(0) = R_A \cdot 1 + M = 13,75 \cdot 1 + 30 = 43,75 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(1) = R_A \cdot 2 + M = 13,75 \cdot 2 + 30 = 57,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка 3: $0 \leq x \leq 1,5$.

$$M(x) = R_A \cdot 2 - H_A x - R_B \cdot 2 + M;$$

$$M(0) = R_A \cdot 2 - R_B \cdot 2 + M = 13,75 \cdot 2 - 26,25 \cdot 2 + 30 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(1,5) = R_A \cdot 2 - H_A \cdot 1,5 - R_B \cdot 2 + M =$$

$$= 13,75 \cdot 2 - 30 \cdot 1,5 - 26,25 \cdot 2 + 30 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка 4: $0 \leq x \leq 0,5$.

$$M(x) = R_A \cdot 2 - H_A(1,5+x) - R_B \cdot 2 + M + P \cdot x;$$

$$M(0) = R_A \cdot 2 - R_B \cdot 2 + M - H_A \cdot 1,5 =$$

$$= 13,75 \cdot 2 - 26,25 \cdot 2 + 30 - 30 \cdot 1,5 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(0,5) = R_A \cdot 2 - H_A \cdot 2 - R_B \cdot 2 + M + P \cdot 0,5 =$$

$$= 13,75 \cdot 2 - 30 \cdot 2 - 26,25 \cdot 2 + 30 + 30 \cdot 0,5 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка 5: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = R_A(2+x) - H_A \cdot 2 - R_B(2-x) + M + P \cdot 0,5 - q \frac{x^2}{2};$$

$$M(0) = R_A \cdot 2 - R_B \cdot 2 + M - H_A \cdot 2 + P \cdot 0,5 =$$

$$= 13,75 \cdot 2 - 26,25 \cdot 2 + 30 - 30 \cdot 2 + 30 \cdot 0,5 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(2) = R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 - R_B \cdot 0 + M + P \cdot 0,5 - q \cdot 2 =$$

$$= 13,75 \cdot 4 - 30 \cdot 2 + 30 + 30 \cdot 0,5 - 20 \cdot 2 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка 6: $0 \leq x \leq 2$.

$$M(x) = R_B x;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2) = R_B \cdot 2 = 26,25 \cdot 2 = 52,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

4. Будуємо епюру згинальних моментів.

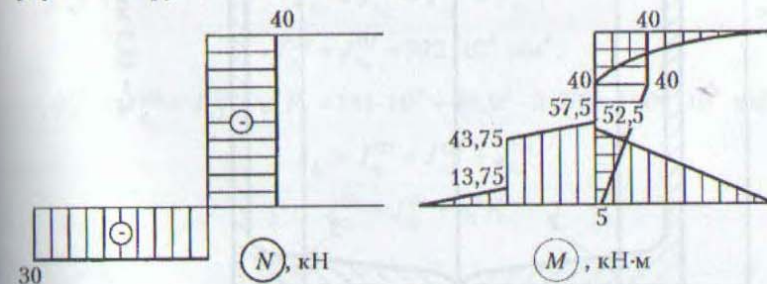


Рис. 12.3

5. Визначимо моменти опору перерізу відносно головних центральних осей та раціонально його розмістимо (рис. 12.4)

Геометричні характеристики швелера № 22 [1]:

$$h = 22 \text{ см} = 220 \text{ мм};$$

$$b = 8,2 \text{ см} = 82 \text{ мм};$$

$$F_2 = F_3 = 26,7 \text{ см}^2 = 2670 \text{ мм}^2;$$

$$z_0 = 2,21 \text{ см} = 22,1 \text{ мм};$$

$$e = b - z_0 = 82 - 22,1 = 59,9 \text{ мм}.$$

Для штаби

$$t = 20 \text{ мм}; l = 180 \text{ мм}; F_1 = tl = 20 \cdot 180 = 3600 \text{ мм}^2.$$

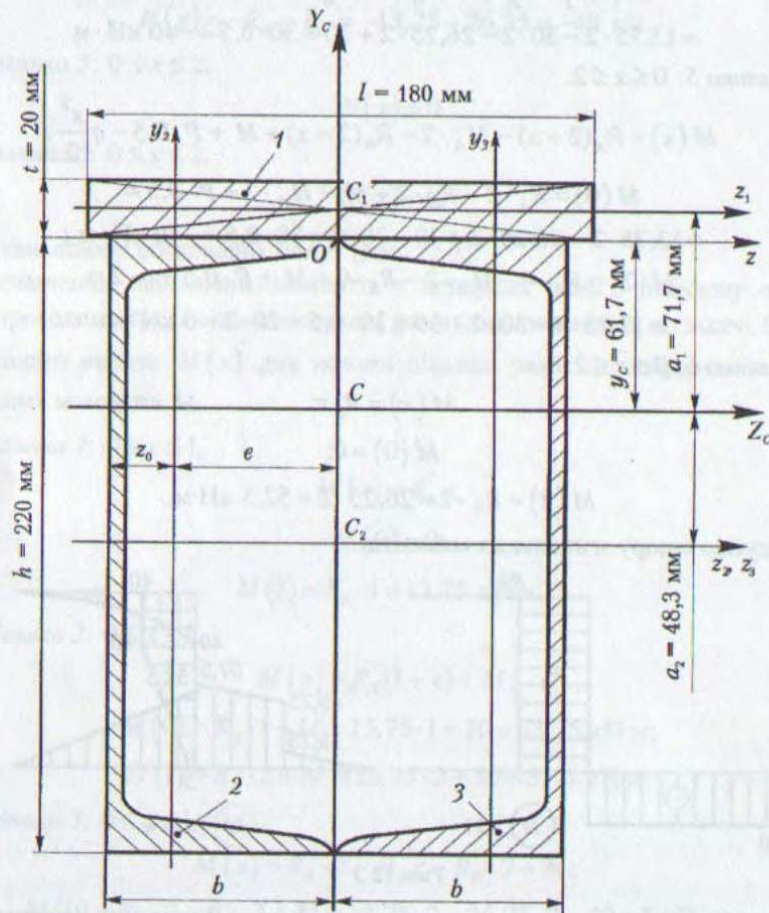


Рис. 12.4

Знайдемо положення головних центральних осей перерізу.

Цей переріз має вісь симетрії Y_C , яка і являє собою головну центральну вісь. Друга головна вісь Z_C буде проходити через центр ваги перерізу C перпендикулярно до Y_C .

Координату центра ваги перерізу y_C у проміжній системі координат $Y_C O z$ знайдемо за формулою

$$y_C = \frac{F_1 y_{C1} + F_2 y_{C2} + F_3 y_{C3}}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де y_{C1}, y_{C2}, y_{C3} – координати центрів ваги відповідно фігур 1, 2 і 3:

$$y_{C1} = \frac{t}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ мм}; y_{C2} = y_{C3} = -\frac{h}{2} = -\frac{220}{2} = -110 \text{ мм}.$$

$$\text{Тоді } y_C = \frac{3600 \cdot 10 - 2670 \cdot 110 - 2670 \cdot 110}{3600 + 2670 + 2670} = -61,7 \text{ мм}.$$

Моменти інерції для швелера № 22:

$$J_{z_2}^{(2)} = J_{z_3}^{(3)} = 2120 \text{ см}^4 = 2120 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_2}^{(2)} = J_{y_3}^{(3)} = 151 \text{ см}^4 = 151 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Моменти інерції для штаби:

$$J_{y_1=y_C}^{(1)} = \frac{tl^3}{12} = \frac{20 \cdot 180^3}{12} = 972 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$J_{z_1}^{(1)} = \frac{t^3 l}{12} = \frac{20^3 \cdot 180}{12} = 12 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Моменти інерції для всього перерізу:

$$J_{y_C} = J_{y_C}^{(1)} + J_{y_C}^{(2)} + J_{y_C}^{(3)};$$

$$J_{y_C}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = 972 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_C}^{(2)} = J_{y_C}^{(3)} = J_{y_2}^{(2)} + e^2 F_2 = 151 \cdot 10^4 + 59,9^2 \cdot 2670 = 1109 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$J_{z_C} = J_{z_C}^{(1)} + J_{z_C}^{(2)} + J_{z_C}^{(3)};$$

$$J_{z_C}^{(1)} = J_{z_1}^{(1)} + a_1^2 F_1,$$

$$a_1 = \frac{h}{2} - y_C = 110 - 61,7 = 48,3 \text{ мм};$$

$$J_{z_C}^{(1)} = 12 \cdot 10^4 + 48,3^2 \cdot 3600 = 852 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

$$J_{z_C}^{(2)} = J_{z_C}^{(3)} = J_{z_2}^{(2)} + a_2^2 F_2,$$

$$a_2 = y_C + \frac{t}{2} = 61,7 + 10 = 71,7 \text{ мм};$$

$$J_{z_c}^{(2)} = J_{z_c}^{(3)} = 2120 \cdot 10^4 + 71,7^2 \cdot 2670 = 3493 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_{z_c} = (852 + 3493 + 3493) \cdot 10^4 = 7838 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Визначимо моменти опору для всього перерізу:

$$W_z = \frac{J_{z_c}}{y_{\max}} = \frac{J_{z_c}}{\frac{h}{2} + a_1} = \frac{7838 \cdot 10^4}{110 + 48,3} = 495 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$W_y = \frac{J_{y_c}}{z_{\max}} = \frac{3190 \cdot 10^4}{0,5l} = \frac{3190 \cdot 10^4}{90} = 354 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Оскільки $W_z > W_y$, профіль орієнтуємо так, щоб згинальний момент діяв відносно осі Z , тобто площина його дії проходила через вісь Y .

6. Перевіримо міцність у небезпечному перерізі за основною умовою міцності для згину.

Основна умова міцності для згину:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} \leq [\sigma].$$

Як видно з епюри згинальних моментів, $M_{\max} = 57,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Для сталі 20 границя текучості $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$. Допустиме напруження:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{250}{1,5} = 166,7 \text{ МПа}.$$

Найбільше напруження в небезпечному перерізі:

$$\sigma_{\max} = \frac{57,5 \cdot 10^6}{495 \cdot 10^3} = 116,16 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Визначимо ступінь недовантаження рами:

$$\frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{166,7 - 116,16}{166,7} \cdot 100 \% = 30,3 \%$$

7. Ступінь недовантаження стрижня становить 30,3%. Отже, є сенс спробувати зменшити номер швелера, але лише якщо умова міцності виконуватиметься.

Задача 13 Розрахунок допустимого навантаження балки на пружній опорі

Двотаврова балка завдовжки 3 м спирається на шарнірну нерухому опору і систему з двох гвинтових циліндричних пружин (рис. 13.1). Визначити допустиме значення сили P , що не спричиняє в балці і пружинах напружень, які б перевищували допустимі $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (для матеріалу балки) і $[\tau] = 200 \text{ МПа}$ (для матеріалу пружин). Обчислити деформацію пружин. Пружини виготовлено з дроту діаметром $d = 20 \text{ мм}$.

Дано: двотавр № 16; середні діаметри пружин $D_1 = 100 \text{ мм}$; $D_2 = 200 \text{ мм}$; кількість витків пружин: $n_1 = 15$; $n_2 = 10$.

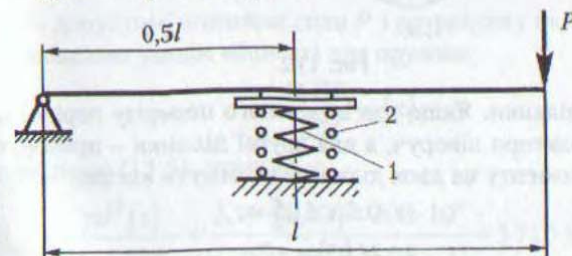


Рис. 13.1

План розв'язування задачі

1. Визначити реакції опор, що діють на балку, і побудувати епюру згинальних моментів.
2. Використовуючи основну умову міцності балки для згину, обчислити допустиме значення сили P .
3. Визначити навантаження, що діє на кожну пружину.
4. Обчислити допустимі значення сили P із розрахунку на міцність кожної пружини.
5. Із трьох допустимих значень сили P вибрати те, що задовольняє всі три умови міцності.
6. Обчислити деформацію пружини.

Розв'язання задачі

1. Визначимо реакції, що виникають у шарнірній опорі A і пружинній опорі B (рис. 13.2). Для цього складемо рівняння суми моментів відносно точок A і B та прівіримо їх до нуля:

$$\sum M_A = R_B \cdot 1,5 - P \cdot 3 = 0, \text{ звідси } R_B = 2P;$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 1,5 - P \cdot 1,5 = 0, \text{ звідси } R_A = P.$$

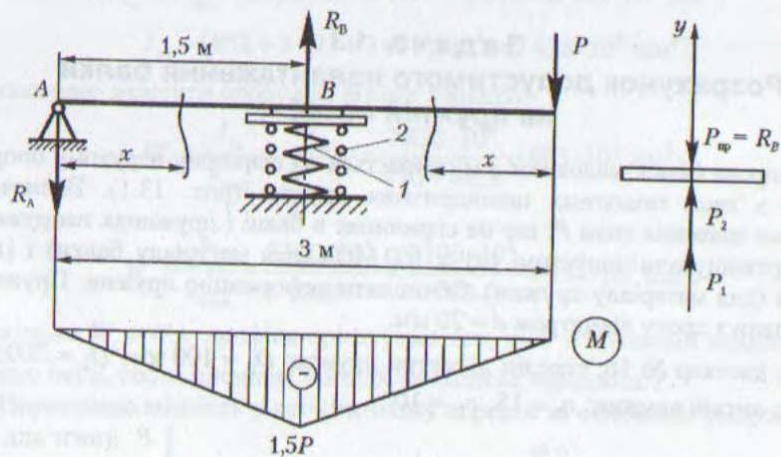


Рис. 13.2

Балка має дві ділянки. Якщо для виділеного перерізу першої ділянки враховувати силові фактори ліворуч, а для другої ділянки – праворуч, то вирази для згинального моменту на двох ділянках матимуть вигляд:

$$0 \leq x \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M(x) = -Px.$$

За значеннями $M(0) = 0$; $M(1,5) = -1,5P$ будемо епюру згинальних моментів. Як видно з епюри (див. рис. 13.2), $M_{\max} = 1,5P$.

2. Використовуючи основну умову міцності для згину, знаходимо:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1,5P}{W} \leq [\sigma];$$

$$P \leq \frac{[\sigma]W}{1,5}.$$

Для двотавра № 16 $W = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Допустиме значення сили, зумовлене міцністю балки,

$$[P]_{\sigma} = \frac{[\sigma]W}{1,5} = \frac{160 \cdot 10^6 \cdot 109 \cdot 10^{-6}}{1,5} = 11\,600 \text{ Н} = 11,6 \text{ кН}.$$

3. Визначимо навантаження, що діють на кожну пружину.

Як видно з рис. 13.2, система пружин один раз статично невизначна, оскільки для шайби, у яку впираються пружини, можна скласти тільки одне рівняння рівноваги

$$\sum Y = -P_{\text{шп}} + P_1 + P_2 = 0, \quad (13.1)$$

яке містить два невідомих – зусилля, що створюють пружини P_1 і P_2 . Додаткове рівняння отримаємо, розглянувши умову сумісності деформацій пружин

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (13.2)$$

де

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3n_1}{Gd^4}; \quad \lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3n_2}{Gd^4}. \quad (13.3)$$

Підставляючи (13.3) в (13.2), дістанемо

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2^3n_2}{R_1^3n_1} = \frac{10^3 \cdot 10}{5^3 \cdot 15} = 5,33; \quad P_1 = 5,33P_2. \quad (13.4)$$

Підставляючи (13.4) в (13.1), знайдемо:

$$P_2 = 0,316P; \quad P_1 = 1,68P. \quad (13.5)$$

4. Обчислимо допустимі значення сили P з розрахунку на міцність пружин. Для цього запишемо умови міцності для пружин:

$$\tau = \frac{16P_iR_i}{\pi d^3} = [\tau],$$

відки, з урахуванням (13.5), знаходимо

$$[P]_{\text{пр1}} = \frac{\pi d^3 [\tau]}{16 \cdot 1,68R_1} = \frac{3,14 \cdot (0,02)^3 \cdot 200 \cdot 10^6}{16 \cdot 1,68 \cdot 0,05} = 3\,710 \text{ Н} = 3,7 \text{ кН};$$

$$[P]_{\text{пр2}} = \frac{\pi d^3 [\tau]}{16 \cdot 0,316R_2} = \frac{3,14 \cdot (0,02)^3 \cdot 200 \cdot 10^6}{16 \cdot 0,316 \cdot 0,1} = 9\,950 \text{ Н} = 9,95 \text{ кН}.$$

5. Із трьох допустимих значень сили P вибираємо найменше $[P] = 3,71 \text{ кН}$.

6. Обчислимо деформацію пружин, якщо значення сили $P = 3,71 \text{ кН}$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{64P_1R_1^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 1,68 \cdot 3710 \cdot (0,05)^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (0,02)^4} = 0,059 \text{ м}.$$