Київський міжнародний університет

Кафедра міжнародної інформації та інформатики

Самарай В.П.

Економіко-математичне моделювання

КУРС ЛЕКЦІЙ

Київ - 2012

Київський міжнародний університет

Кафедра міжнародної інформації та інформатики

Самарай В.П.

Економіко-математичне моделювання

КУРС ЛЕКЦІЙ

Київ - 2012

ББК 65.5. (4укр)
С-17

Рекомендовано вченою радою Інституту міжнародних відносин Київського міжнародного університету (протокол №   від
2012 року)

Рецензенти:
О. М. Доній, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, доцент
Є. В. Рябоштан, кандидат політичних наук, завідувач кафедри міжнародної інформації та інформатики КиМУ

С-17 Самарай В. П. Економіко-математичне моделювання : курс лекцій. – К. : КиМУ, 2012. – 193 с.

Курс "Економіко-математичне моделювання" забезпечує систематизацію матеріалу. Економіко-математичне моделювання дає експерту можливості з діагностики, прогнозування, оптимізації і моделювання економічних процесів і систем, використання їх для прогнозування розвитку економіки держави й окремих підприємств. В курсі лекцій надаються поняття, методологія, економіко-математичні моделі, актуальні проблеми й сучасні тенденції економіко-математичних моделювання, прогнозування, діагностики і оптимізації.

ЗМІСТ

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ І ВИДІВ МОДЕЛЮВАННЯ.

ЛЕКЦІЯ 1. ІСТОРІЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Загальні відомості історії економічного моделювання

Розробки у сфері економічного прогнозування в зарубіжних країнах з'явилися в останній чверті XIX ст. і були пов'язані зі спробами дослідників виявити майбутні тенденції виробництва основних продуктів на основі аналізу динаміки статистичних даних, які є в їх розпорядженні. Головними методами прогнозування того часу були експертні оцінки (на основі якісного аналізу рядів) і проста екстраполяція (перенесення минулих тенденцій на майбутнє). На початку XX ст. зроблені перші спроби виявлення економічних індикаторів. 1911 р. Дж. Брукмайєр спробував використовувати для прогнозування три хронологічні ряди таких показників: індекс банківських кредитів, індекс цін акцій, індекс загальної економічної активності. Подальший розвиток цей підхід набув у 20-ті роки в дослідженнях Гарвардського університету. За основу були взяті "гарвардські криві": індекс вартості цінних паперів на біржі, величина депозитів у банках, норма відсотка. Поштовхом у подальшому розвитку прогнозування та планування у світі стала світова економічна криза 1929-1933 рр. У 30-ті роки за кордоном виникає планування на макрорівні. Найбільшу популярність отримала Гарвардська школа економічних барометрів (барометрів розвитку), яка повинна була передбачати майбутню кон'юнктуру, тобто прогнозувати динаміку товарного і грошового ринків. Засновниками ***одного з напрямків економіко-математичного моделювання - економетрики*** вважають Р. Фріша, Я. Тінбергена,Е. Шумпетера. Нині у світі сформувалося три провідні системи планування й регулювання: Північно-Американська (США, Канада), азійська (Японія та Південна Корея), європейська (Франція та Швеція). Лідером у прогнозуванні є США. **Прогнозування в США вважається однією з найважливіших форм регулювання економіки**.

1.2. Використання ідей і методів кібернетики в економічних системах.

Багато фундаментальних теоретичних положень економічної кібернетики було сформульовано значно раніше, ніж з’явиляся сама кібернетика: уявлення про економіку як цілісну і взаємопов’язану систему міститься вже в економічній таблиці Франсуа Кене (1758), воно було розширене і науково обґрунтоване в працях класиків теорії і практики управління.

Новий напрям в економічній науці, що виник на початку 60-х років минулого століття, **базується на використанні ідей і методів кібернетики** в економічних системах. Уперше термін «економічна кібернетика» з’явився в працях С. Біра (Великобританія), Г. Греневського (Польща) та В. Немчинова (СРСР). Вони ж окреслили й основні напрями розвитку цієї науки, приділивши особливу увагу взаємозв’язку системного аналізу економіки з теорією регулювання, логікою і теорією інформації. Принципове значення для розвитку економічної кібернетики має теорія і практика **державного регулювання** народного господарства, представленого у вигляді цілісної системи.

Активне використання електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) і методології математичного моделювання в економічних дослідженнях, плануванні й управлінні народним господарством в Україні, яка була складовою частиною колишнього СРСР, почалось у 1962 р. (до цього вони застосовувалися тільки для одиничних розрахунків і не використовувались у практиці планування й управління) одночасно в різних галузях народного господарства: промисловості, сільському господарстві, зв’язку, торгівлі й транспорті. Проте основні наукові сили і засоби були сконцентровані на виконанні комплексу науково-дослідних і експериментальних робіт за загальносоюзною темою «Розробка методики ув’язки планів промислового виробництва і капітального будівництва з планами матеріально-технічного постачання на основі застосування економіко-математичних методів і електронно-обчислювальної техніки», яка була затверджена ЦК КПРС і Радою Міністрів СРСР у статусі найважливішого державного завдання на найближчі роки. Але цікавою особливістю є те, що виконання цієї загальносоюзної теми було доручено Україні (Постанова Ради Міністрів УРСР від 12 серпня 1962 р.) і керівництво її виконанням було доручено першому заступнику Голови Держплану УРСР А.М. Лалаянцу.

Потреба в розробці нових підходів і методів обумовлювалася необхідністю значного підвищення рівня ресурсної збалансованості народногосподарських планів і передусім планів матеріально-технічного постачання. Складання останніх потребувало балансових розрахунків з відповідною обробкою значних масивів інформації. Цим щорічно займалася величезна кількість планових та інженерно-технічних працівників. Необхідність термінового застосування нових методів і технічних засобів у цій сфері була викликана також тим, що план матеріально-технічного постачання був органічно пов'язаний з усіма розділами народногосподарського плану.

Для виконання поставленого завдання в Україні 1962-1963 рр. були створені:

- Інститут кібернетики АН УРСР (на базі обчислювального центру АН УРСР). На нього покладалося завдання математичного і технічного забезпечення (наукові керівники В.М.Глушков і В.С. Михалевич);
- Економічний науково-дослідний інститут Держплану УРСР, який зосереджував власні наукові сили на розробці теоретико-методологічних основ класифікації і кодування інформації, а також на методичному керівництві розробкою і впровадженням загальносоюзного класифікатора продукції (науковий керівник М.О. Лєтов);
- відділ економічної кібернетики Інституту економіки АН УРСР. На нього покладалося завдання розробки теоретичних основ підвищення рівня збалансованості народногосподарських планів, а також розробка методології економіко-математичного моделювання процесів планування й управління на рівні народного господарства та його окремих галузей (науковий керівник М.К. Міхно).

Саме ці науково-дослідні структури, їхні наукові керівники і провідні спеціалісти стояли біля витоків нового прикладного наукового напряму в економічній науці в Україні і відповідно - в СРСР. Серед них – А.М. Лалаянц, В.М. Глушков, В.С. Михалевич, М.О. Лєтов, М.К. Міхно, О.О. Бакаєв, О.М. Онищенко, В.І. Голіков, О.М. Алимов, В.М. Геєць, Ф. Бесєдін, Ю.С. Архангельський, В.В. Дем'яненко, О.І. Радзієвський, Л.О. Рибаков, М.П. Соколик, О.О. Гаца, Л.С. Лобанова, В.А. Коноплицький та багато інших.

Результатом виконання першого етапу досліджень (1962-1965 рр.) із зазначеної вище загальносоюзної теми стала розробка математичної моделі комплексного розрахунку на ЕОМ плану матеріально-технічного забезпечення промислового підприємства (на прикладі київського заводу «Червоний екскаватор»), ув'язаного з усіма розділами техпромфінплану. Модель було ухвалено Держпланами СРСР та України, і вона була впроваджена на багатьох промислових підприємствах республіки, представлена 1966 р. на виставці досягнень передового досвіду в народному господарстві України й опублікована в низці наукових статей.

На другому етапі економіко-математичних досліджень з вищезазначеної теми особливо найгострішим стало питання про кардинальне вдосконалення методології народногосподарського планування матеріально-технічного постачання на основі інтеграції процесів формування й узгодження планів виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції в єдину взаємопов'язану систему балансових розрахунків, а також її моделювання. Як одна з центральних виникла проблема поєднання моделей процесів, якими керують, і моделей процесів керування як основи проектування автоматизованої системи управління матеріально-технічним постачанням народного господарства (АСУ МТП). Від цього залежали можливості оптимізації цієї системи управління, що поєднувала розробку ефективних і оптимальних планів, забезпечення їхньої реалізації згідно з певними вимогами характеристик керівного органу. Основним результатом цих досліджень стала розробка різноманітних варіантів лінійних оптимізаційних економіко-математичних моделей комплексного планування виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції на основі критерію найповнішого задоволення асортиментної потреби народного господарства з одночасним урахуванням як виробничих, так і транспортних факторів, а також взаємоув'язки вартісних і натуральних показників. Проте їхнє впровадження в практику народногосподарського планування гальмувалося через неадекватність цих моделей складності виконуваного завдання.

У зв’язку з цим виникла потреба подальшого розвитку методології математичного моделювання складних економічних систем (Постанова Ради Міністрів СРСР від 23 серпня 1966 р. за № 678 і Ради Міністрів УРСР від 8 жовтня 1966 р.). Основним результатом цих досліджень стала розробка принципово нової методології імітаційного моделювання складних економічних систем, яка (порівняно з оптимізаційними моделями) дозволила враховувати багато реальних факторів, що часто відіграють вирішальну роль у формуванні планів, а також накопичений раціональний досвід спеціалістів.

Поглиблений комплексний аналіз показав, що практичне застосування лінійних оптимізаційних моделей обмежено. Вони можуть ефективно використовуватися не за всіма видами металопродукції, а тільки за тими, які характеризуються порівняно невеликим внутріноменклатурним асортиментом та наявністю внутріноменклатурної збалансованості з окремих конкретних видів продукції. Але для більшої частини номенклатур металопродукції характерні широкий асортимент і відсутність внутріноменклатурної збалансованості. За цих умов використання оптимізаційних математичних моделей для комплексного планування виробництва, завантаження потужностей і поставок викликало великі труднощі. Це пов’язано не тільки з великими розмірами та складністю завдання, що виконувалося, а й з потребою виконання вручну дуже великого обсягу попередніх робіт з виявлення внутріноменклатурних дефіцитів і їх обсягів, а також ув’язці з дефіцитних позицій потреб з ресурсами, які наявні. Ці роботи належать до найскладніших і найвідповідальніших творчих процесів планування. Вони майже не могли бути формалізованими в межах оптимізаційних математичних моделей, а тому виконувалися вручну, що стало одним з головних перешкод на шляху ширшого й ефективнішого їх упровадження в практику комплексного планування.

На основі порівняльного аналізу результатів багатоваріантних комплексних розрахунків на ЕОМ планів виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції встановлено, що, по-перше, головний ефект від застосування математичних моделей та ЕОМ досягається за рахунок посилення комплексності, а не оптимізації розрахунків цих трьох видів планів; по-друге, найбільша сукупна народногосподарська ефективність і краща їх збалансованість досягається тільки за умови, якщо пріоритет віддається високим кінцевим результатам роботи всієї системи головного міністерства в цілому порівняно з тим, коли для кожного з підприємств, що входять до цієї системи, обґрунтовується поліпшення зведених валових показників їх роботи щодо досягнутого рівня; по-третє, повний облік усіх факторів, а також реальних умов виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції в оптимізаційних моделях комплексного планування майже неможливий.

Подальші дослідження показали, що на процес формування цих трьох видів планів дуже великою мірою впливають чинники, що не формалізуються. Майже неможливо побудувати адекватнішу оптимізаційно-математичну модель комплексного планування, ніж запропоновані науковими установами. А всіляке її ускладнення або спрощення, а також ідеалізація, спроби абстрагуватися з метою наступного використання відповідного математичного апарату зводить практичну цінність результату нанівець. Це пояснюється великим розривом між ступенем складності процесів формування та взаємної збалансованості планів виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції та складністю математичних оптимізаційних моделей, що можуть бути використані. У результаті багаторічних пошуків установлено, що завдання комплексного планування виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції можна зарахувати до класу завдань з поганою структурою, для яких методи прийняття рішень недостатньо формалізуються та засновані значною мірою на минулому досвіді, інтуїції й творчості. Це вимагало принципово нового підходу до її моделювання.

Найефективнішим виявилась імітація розумової діяльності спеціалістів, зайнятих розв’язанням дуже складних проблем. В основі імітаційного моделювання лежить ідея про те, що мислення людини пов’язане з процесом переробки інформації з визначених правил. Цей процес, яким би складним він не був, формується зрештою з окремих порівняно простих елементів, які можуть бути синтезовані в складні інтеграційні системи планування й переробки інформації. Для того, щоб ці інформаційні процеси могли моделювати цілеспрямований пошук планового рішення, треба в ці програми ввести разом з оптимізаційними економікоматематичними моделями визначені методичні правила та прийоми розв'язання складних проблем людиною. Ці правила й прийоми встановлюються на основі вивчення й узагальнення багаторічного досвіду ефективного виконання планових завдань найкваліфікованішими спеціалістами. Потім вони формалізуються за допомогою математичної логіки, евристичних та інших методів. Ця методологія лягла в основу створення першої в СРСР імітаційної моделі комплексного планування виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції, а також автоматизованої системи управління металозабезпеченням народного господарства України.

Система комплексного планування, що ґрунтується на використанні пропозицій імітаційної моделі, забезпечує: по-перше, реалізацію всіх основних принципів, які викладені вище, положень і висновків; по-друге, повну інтеграцію процесів планування виробництва, завантаження потужностей і поставок у єдину взаємопов'язану систему автоматизованих балансових розрахунків; по-третє, максимально можливу збалансованість цих трьох різних видів планів при зниженні сумарних народногосподарських затрат на виробництво та транспортування продукції до споживачів; по-четверте, скорочення строків планування, ліквідацію недоліків ручної обробки інформації, пов'язаних із суб'єктивними помилками, суттєве підвищення обґрунтованості планів при значній економії коштів за рахунок:

а) економії заробітної плати персоналу, зайнятого розробкою планів;

б)економії грошових коштів через скорочення та здешевлення документообігу;

в) економії коштів через скорочення затрат на виробництво та доставку продукції до споживачів.

Розроблена система комплексного планування виробництва, завантаження потужностей і поставок металопродукції була розглянута й отримала високу оцінку Ради Міністрів СРСР, бо її широке впровадження в практику планової роботи дозволило перейти від традиційного зіставлення ресурсів і потреб за багатьма (понад 4,5 млн. найменувань) конкретними виробами металопродукції завдяки розрахунку (вручну) багатьох окремих внутріноменклатурних матеріальних балансів до інтегрованої балансової системи, що забезпечує в режимі електронної обробки даних ефективну взаємоув'язку планів одночасно з усіх металургійних агрегатів і конкретних видів виробів, які входять до тієї чи іншої номенклатури.

Результати цих та інших досліджень відділу економічної кібернетики Інституту економіки АН УРСР були узагальнені і розвинуті в монографії. Вони отримали позитивну оцінку як наукових установ колишніх СРСР та УРСР (Центрального економіко-математичного інституту АН СРСР, ЕНДІ Держплану УРСР, ГоловНДІОЦ Держплану УРСР та ін.), так і директивних органів управління (Держплану СРСР, Держплану УРСР, Держпостачу СРСР та ін.).

Наприкінці 60-х років XX ст. в Україні на багатьох промислових підприємствах, у галузевих міністерствах і Держплані УРСР створюються обчислювальні центри, які залучалися до розробки і впровадження автоматизованих систем обробки даних (АСОД), планових розрахунків (АСПР), управління підприємствами й об'єднаннями (АСУП) та окремими галузями народного господарства (ГАСУ). Результатом цих досліджень стала розробка першої в СРСР автоматизованої системи планування й управління виробництвом, яку було введено в дію у 1967 р. на Львівському телевізійному заводі (система «Львів»), а 1968 р. - аналогічну систему на Донецькому машинобудівному заводі ім. 15-річчя ЛКСМУ (система «Донецьк») та ін. Проте ефективність функціонування останніх різко знижувалася через недосконалість діючих організаційних структур управління підприємствами, у межах яких створювались АСУП. Це мало суттєвий вплив на подальші дослідження в галузі економіко-математичного моделювання. Результатом стала розробка методології імітаційного моделювання організаційних структур АСУ, яка знайшла широке застосування не тільки в промисловості, а й в інших галузях народного господарства.

Використання математичних методів і ЕОМ у дослідженнях з економіки сільського господарства почалося в 1963 р. і було спрямоване на розробку проблем оптимізації сільськогосподарського виробництва. Першим результатом досліджень стали розроблені у відділі економічної кібернетики Інституту економіки АН УРСР економіко-математичні моделі визначення оптимальної галузевої структури сільськогосподарських підприємств. Ці моделі проходили практичну перевірку в умовах типових підприємств, що дало змогу напрацювати методологію оптимізації галузевої структури виробництва спеціалізованих підприємств.

Швидкий прогрес у розвитку спеціалізації сільськогосподарського виробництва, міжгосподарського кооперування й агропромислової інтеграції, виникнення на цій основі нових міжгосподарських виробничих зв'язків і їхнє безпосереднє ускладнення (зокрема, у межах сільських адміністративних районів) зумовили поступову видозміну їхніх функцій і організаційно-промислової структури. Формувалися районні аграрні й агропромислові комплекси, виникла необхідність у розробці нової методики планування виробництва в районі, яка б дозволила оптимізувати розвиток кожного підприємства регіону і детально ув'язати їхні плани як складники цілісного господарського організму. Дослідження теоретико-методологічних питань формування й оптимізації розвитку районних аграрних і агропромислових комплексів проводилися на прикладі Новоодеського і, згодом, Баштанського районів Миколаївської області. Розроблені для цих районів оптимальні плани були схвалені їхніми керівниками та спеціалістами, обласними організаціями і покладені в основу перспективних планів розвитку господарств. Результати теоретичних і прикладних досліджень у цій галузі були узагальнені в наукових публікаціях.

З 1963 р. в Україні було виконано низку робіт з актуальних проблем економіко-математичного моделювання і застосування математичних методів та ЕОМ у розміщенні продуктивних сил, а також у плануванні і управлінні окремими галузями та народним господарством в цілому.

Для виконання завдання аналізу оптимальності темпів економічного зростання була розроблена оптимізаційна економетрична модель, яка отримала назву «ЕКО» (Економічне зростання). Модель використовувалася в Інституті економіки АН УРСР для розрахунків при підготовці пропозицій до Комплексної програми науково-технічного прогресу і його соціально-економічних наслідків, а також Основних напрямів економічного і соціального розвитку.

Дослідження проблем економічного зростання, розпочаті ще 1968 р., були певним внеском у розробку проблеми оцінки впливу чинників економічного зростання на сукупний результат. Виконані розробки дозволили в 1979-1983 рр. розпочати створення системи макроекономічних моделей аналізу і прогнозування динаміки та структури суспільного виробництва України, яка являє собою синтез економетричних, оптимізаційних, балансових, нормативних, а також трендових моделей.

Результатом поглиблених комплексних досліджень кількісних взаємозв'язків компонентів відтворювальних процесів (між фондовіддачею, нормою нагромадження, продуктивністю праці й темпами зростання суспільного виробництва; співвідношень між амортизаційними відрахуваннями і нагромадженням як джерелом збільшення виробничих фондів; темпами зростання валового суспільного продукту і національного доходу тощо), їх конкретизації та формалізації була розроблена міжгалузева динамічна економіко-математична модель відтворення, яка використовувалася при складанні багатоваріантних системних довгострокових планів-прогнозів збалансованого розвитку народного господарства України і його окремих галузей. На базі цієї моделі Інститутом економіки АН УРСР разом із Держпланом УРСР здійснено серію розрахунків таких планів-прогнозів у розрізі 85 галузей. Їх результати використано при підготовці пропозицій до Основних напрямів економічного та соціального розвитку народного господарства України на період 1976-1990 рр.

Створювані в Україні автоматизовані системи планування й управління виробництвом на рівні окремих підприємств, галузей і відомств, а також АСПР Держплану УРСР функціонували незалежно одна від одної, потоки інформації і обробка даних здійснювалися відокремлено від процесів планування й управління в інших галузях народного господарства. Це знижувало ефективність їх використання, а також вимагало великих затрат ручної праці для узгодження даних. Основним результатом досліджень з цієї проблеми стала розробка методології інформаційного впливу АСУ різних рівнів і призначень, яка базується на застосуванні створеного універсального перетворювача інформації, що функціонує в режимі електронної обробки даних.

Розвиток методології економіко-математичного моделювання йшов від розробки спрощених лінійних оптимізаційних до складніших імітаційних моделей і розв'язання на їх основі окремих задач, до розробки систем моделей галузевого народногосподарського планування й управління, а також процесу відтворення в цілому. Накопичений досвід створення і впровадження таких моделей певною мірою узагальнено в наукових статтях і монографіях, присвячених теорії та методології економіко-математичного моделювання.

Слід також підкреслити, що за цим новим напрямком економічної науки в Україні за 40 років було підготовлено і захищено велику кількість кандидатських і докторських дисертацій.

ЛЕКЦІЯ 2. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ.

Аналіз процесів, що відбуваються в економіці, потребує адекватних методів дослідження для визначення впливових економічних факторів, діагностики і прогнозування процесів, поведінки, можливих станів економічних систем і об'єктів.

Згідно з **принципами системного аналізу** будь-яка економічна система складається з підсистем та об'єктів. Підсистема – це складник вищої за значимістю підсистеми або системи в цілому. Об'єкт – це складник підсистеми або системи і є остаточною неподільною одиницею.

Метою системного аналізу є визначення **структури**, **математичних залежностей** між складниками системи і **побудова моделі** системи, підсистеми або об'єкта для подальшого їх дослідження методами моделювання й імітації внутрішніх процесів, діагностики, прогнозування й оптимізації параметрів, поведінки, станів і процесів.

2.1. Основні принципи системного аналізу:

1) діалектична єдність систем і підсистем;

2) індуктивний і дедуктивний підходи пізнання і дослідження систем і підсистем;

3) декомпозиція систем і композиція підсистем (аналіз і синтез);

4) певна ієрархія підсистем у системі;

5) визначення взаємовпливу, поведінки, параметрів і стану складників систем методом побудови і дослідження математичних або інших моделей;

6) принцип емерджентності системи.

Системи класифікуються за різними властивостями і бувають:

1) природні і штучні; 2) замкнуті і незамкнуті; 3) відкриті і закриті; 4) прості і складні; 5) лінійні і нелінійні; 6) детерміновані і стохастичні; 7) динамічні і статичні; 8) неперервні і дискретні; 9) біологічні, технічні, соціальні, економічні і інші.

Прості системи і відповідно **моделі** зазвичай бувають: **одно- або мало факторні; лінійні; детерміновані; статичні**.

Складні системи і відповідно **моделі** на відміну від простих мають протилежні властивості і зазвичай є: **багатофакторні; нелінійні; стохастичні; динамічні**. Однак для складної системи можна побудувати і складну, і просту модель. Крім того, для будь-якої системи можна побудувати декілька або навіть безліч різних моделей, які можуть відображати зовсім різні властивості системи або об'єкта, що досліджуються.

2.2. Економічна кібернетика

Зародження системного аналізу пов'язують з Другою світовою війною та діяльністю «Ренд Корпорейшн» у сфері планування розвитку озброєнь.Спочатку в системному аналізі (СА) найповніше використовувалися методи й математичні засоби теорії дослідження операцій, але в подальшому почали широко застосовуватись евристичні методи (Дельфі, ПАТТЕРН та інші). **Суттєвим у системному аналізі є таке**: аналіз систем є способом розгляду проблеми; математичний апарат і комп'ютери можуть бути тут необхідними, але інколи достатніми можуть бути серйозні роздуми над проблемою; у будь-якому аналізі, що пов'язаний з прийняттям рішення в умовах невизначеностей, метою якого є вплив на вибір способу дії, незалежно від його складності, наявні такі елементи, як мета (цілі), альтернативи (засоби досягнення цілей), витрати чи ресурси (те, що необхідно витратити для реалізації кожної з альтернатив), модель, критерії, згідно з якими обирається альтернатива. **Система** є тим ізоморфним принципом, який проникає через усі кордони, що склалися між окремими науками історично, незалежно від того, що ці науки вивчають якісно зовсім різні класи явищ: машини, організми, суспільство.

Системний підхід виник як реакція на бурхливий розвиток аналітичних підходів у науці, які все більше віддаляли творчу думку від проблеми «цілісного організму». Серед підходів, які суттєво вплинули на формування принципів системного підходу, слід виділити: логічний позитивізм, аналітична дедукція, редукціонізм, казуальна (причинна) логіка, індуктивний підхід.

Логічний позитивізм стверджує, що існує «об'єктивна» реальність, яка є незалежною та неспотвореною нашими особистими перспективами чи суб'єктивними інтерпретаціями світу. Однак факти є багатовимірними і можуть інтерпретуватися по-різному. Крім того, кожна група вчених надаватиме особливе значення такому підходу до розв'язання складних проблем, який є найсумістнішим з її філософією та методологією.

Аналітична дедукція та редукціоністська логіка стверджують, що найкраще можна пояснити ціле завдяки поясненню його частин, тобто редукціоніст розв'язує складну проблему завдяки розбиттю її на складники й окремі дослідження кожної з них, що приводить до розвитку спеціалізованих дисциплін з певними сферами дослідження та впливу. Отже, виникає множинність у підходах, учені спілкуються в межах своїх дисциплін, не розуміють наукову мову (тезаурус предметної сфери) один одного і не є в стані оперувати із системними проблемами. У більшості випадків наше мислення ґрунтується на концепції причинності, монолітної казуальної (причинної) логіки. Згідно з детерміністською концепцію, спостереження (колишні стани системи) разом із законами природи визначають її майбутній стан. Редукціонізм є позитивним явищем у тому сенсі, що він забезпечує концептуальну основу, засоби і процедури для ідентифікації та вивчення важливих факторів, що входять у визначення проблеми. Однак дедуктивні методи не працюють або працюють погано, якщо наявно багато пов'язаних між собою факторів або вони неусвідомлені як фактори.

Індуктивний погляд ґрунтується на узагальненні окремих спостережень, тобто різні наукові дисципліни — це необхідні, але недостатні підґрунтя, використовуючи, які ми формуємо теорії про досвід і знання. Системний підхід синтезує індуктивний і дедуктивний спосіб мислення із залученням інтуїтивних підходів (натхнення, образні типии мислення та ін.). Одним з призначень системного аналізу (СА) є правильний відбір системного інструментарію для розв'язання поставленої проблеми.

Декомпозиція мети — теж одне з призначень СА. Ще одне призначення СА — це формування критеріїв відбору засобів для досягнення цілей.

2.3. Кібернетичний підхід

Систему можна вивчати й аналізувати, змінюючи вхідні впливи і спостерігаючи за виходами. Це кібернетичний підхід, згідно з яким система розглядається як «чорний ящик». Метод «чорного ящика» широко використовується під час моделювання систем, коли для дослідника важливо отримати інформацію про поведінку системи, а не про її будову. Дослідник не може зробити однозначний висновок про структуру «чорного ящика», спостерігаючи тільки за його входами та виходами, бо поведінка модельованої системи нічим не відрізняється від поведінки ізоморфних їй систем. Для побудови моделі використовуються методи теорії ідентифікації. У загальному випадку завдання ідентифікації формулюється так: на основі результатів спостереження за вхідними та вихідними змінними системи потрібно побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель. Основними етапами ідентифікації є такі:

1. Вибір класу і структури моделі та мови її опису.
2. Вибір класу і типів вхідних впливів X.
3. Обґрунтування критеріїв подібності системи й моделі.
4. Вибір методу ідентифікації та розроблення відповідних алгоритмів оцінювання параметрів системи.
5. Перевірку адекватності отриманої в результаті ідентифікації моделі.

Залежно від обсягу апріорної інформації про клас і структуру системи вирізняють завдання ідентифікації в широкому та вузькому розумінні Завдання ідентифікації у широкому розумінні виконується в умовах апріорної невизначеності структури моделі системи («чорний ящик»). Клас і структура математичної моделі вибираються на основі результатів теоретичного аналізу з використанням загальних закономірностей процесів, які протікають у системі, або на основі загальної інформації про подібні системи. У цьому випадку для побудови математичної моделі можна використовувати непараметричні методи. Їх розроблено для тих ситуацій, які досить часто виникають на практиці, коли дослідник нічого не знає про параметри досліджуваної системи (звідси і назва методів - **непараметричні**). Завдання ідентифікації у вузькому розумінні полягає в оцінюванні параметрів і станів системи, якщо відома структура моделі («сірий ящик»). Завданням ідентифікації є кількісне оцінювання певних параметрів. Для цього використовується параметрична ідентифікація математичної моделі. Прикладами таких моделей можуть бути диференціальні та різницеві рівняння, моделі типу «вхід-стан-вихід». На рис. 1 зображено загальну схему ідентифікації системи. Вхідні впливи X на систему та модель однакові, виходи системи Ys і моделі Ym у загальному випадку відрізняються. Для їх порівняння потрібно сформувати критерій подібності та мінімізувати його, тобто налагодити модель.

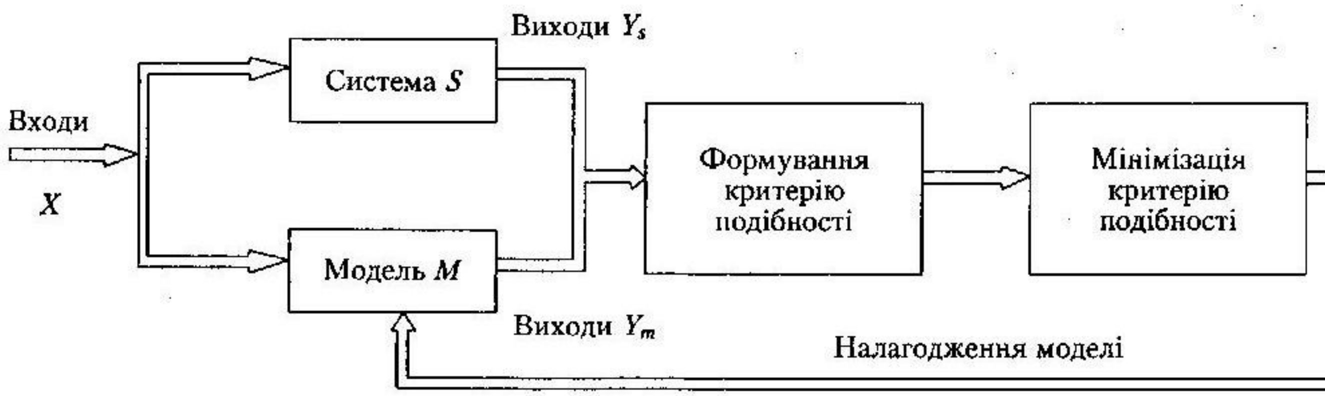


Рис. 2.1. Загальна схема ідентифікації системи

Прикладами моделей, створених на основі експериментальних даних, можуть бути моделі авторегресії різних порядків, ковзного середнього та моделі типу «вхід-вихід», побудовані за допомогою методу найменших квадратів.

2.4. Системна динаміка

Для формального представлення моделей неперервних систем Дж. Форрестер у 1960 році запропонував підхід, названий **системною динамікою**, який дає змогу будувати моделі динамічних взаємопов'язаних систем за допомогою причинних діаграм циклів і схем виду «фонд-потік». Він же запропонував для числового моделювання таких систем мову Динамо. Модель будується як система диференціально-різницевих рівнянь, а мова Динамо дає змогу автоматизувати процес їх написання. Майже всі сучасні засоби неперервного та неперервно-дискретного моделювання базуються на цій мові для побудови моделей. На відміну від математичного розв'язання системи таких рівнянь у замкненому вигляді використовується числове розв'язання з дискретним кроком часу, що дає змогу моделювати на деякому проміжку часу динамічні зміни фондів, пов'язаних з точкою часу і потоків. Фонди й потоки пов'язані між собою через змінні. *Фонд* можна трактувати як деяку кількість чого-небудь, що виміряється в певних одиницях (наприклад, фізичних, грошових та ін.). Фонди можуть акумулювати одиниці фонду. Найкраще їх уявляти як резервуари, ресурси або буфери.Фонди поповнюються через вхідні потоки та спорожнюються через вихідні. Як буфер фонд може використовуватися для забезпечення балансування швидкості накопичення й витрачання. *Потік* - це процес, що протікає неперервно в часі, оцінити який можна в деяких кількісних одиницях за певний проміжок часу. Залежно від характеристики використання потоки поділяються на обмежені й необмежені, одно- та двоспрямовані, конвертовані й неконвертовані. Потік, зазвичай, обмежується фондом. Потоком можна керувати, тобто збільшувати або зменшувати його інтенсивність за допомогою деяких алгебричних виразів. Існує багато різних способів зв'язувати в динамічних моделях причини й наслідки, не розглядаючи конкретні методи. У їх основі лежить кілька підходів. Розглянемо три з них, які наведено на рис. 2.

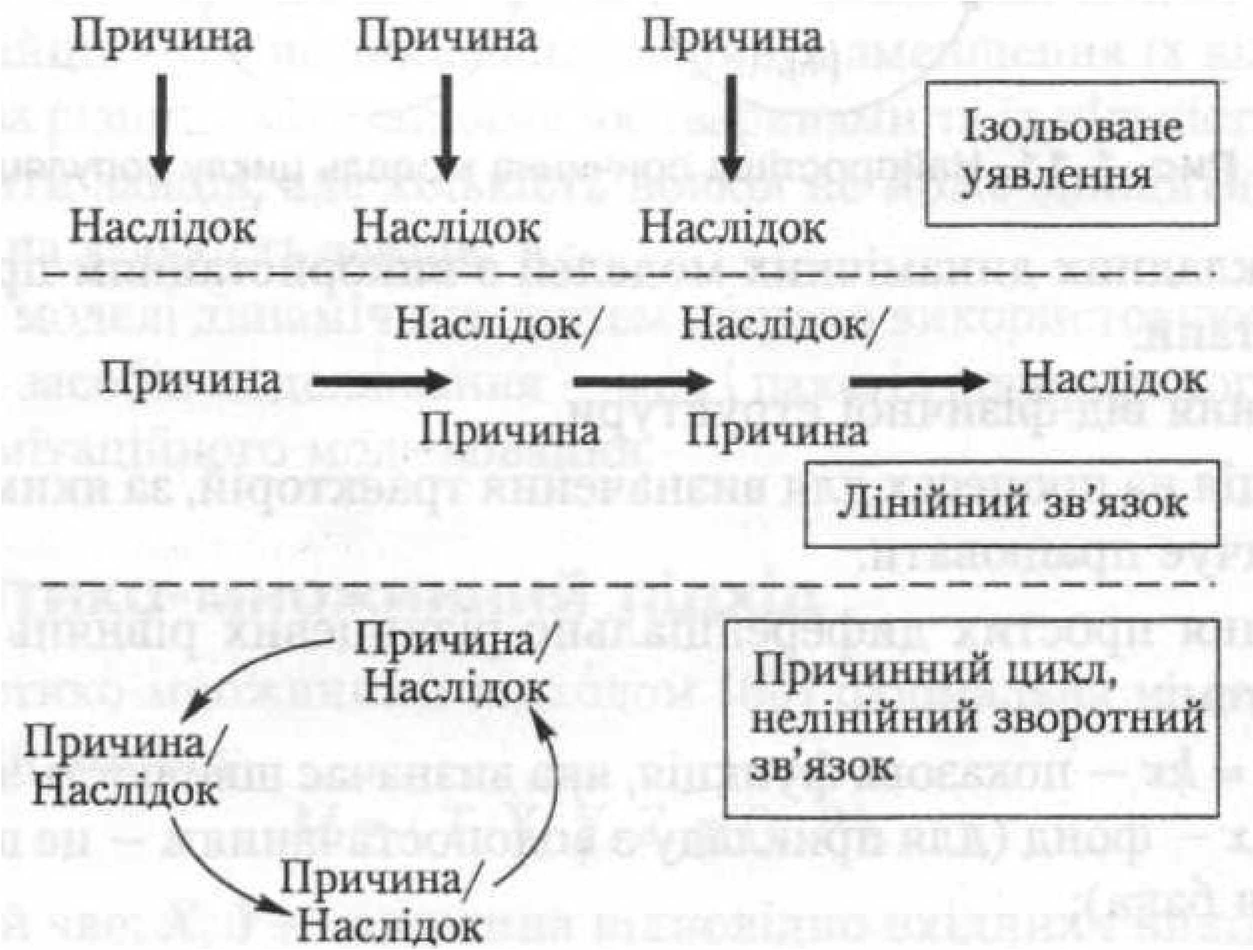


Рис. 2.2. Три підходи до зв'язування причин і наслідків для побудови моделі

Перший підхід полягає в тому, що наслідок виникає з причини і взаємозв'язок між різними причинами відсутній. Такий підхід, наприклад, використовують бухгалтери під час розрахунків. Як правило, для цього застосовують статичні та статистичні моделі.

Другий підхід передбачає, що між причинами та наслідками існує лінійний зв'язок у вигляді ланцюжка. Такий підхід підтримують інженери й науковці, які вважають, що всі події у всесвіті залежать одна від одної. Маючи достатню кількість інформації, можна побудувати залежності в часі для всіх подій у майбутньому.Системні мислителі, які застосовують цю парадигму, користуються діаграмами впливу та моделями лінійних рівнянь і вважають, що завжди можна логічно простежити, «що є на вході і що буде на виході».

Згідно з третім підходом всесвіт розглядається як система зі зворотними зв'язками, тобто ланцюжки причин і наслідків циклічно пов'язані між собою. Таке уявлення підтримують кібернетики, прихильники нелінійної динаміки й хаосу. Вони вважають, що всесвіт значною мірою хаотичний, і передбачити майбутнє з огляду на його минуле неможливо. Ці системні мислителі використовують циклічні причинні моделі, нелінійні рівняння в кінцевих різницях. Часто поведінка таких моделей далека від реальності та інтуїтивного уявлення і може бути дещо несподіваною для дослідника. На рис. 3. зображено найпростішу причинну циклічну модель для деякої популяції, яка має два цикли. Лівий цикл, позитивний, свідчить про приріст популяції в разі збільшення народжуваності, що у свою чергу збільшує народжуваність. Правий цикл, негативний, свідчить про зменшення популяції у випадку збільшення смертності, що у свою чергу зменшує смертність. Такі пари причинних циклів можуть використовуватися під час побудови складніших динамічних моделей.

Рис. 2.3. Найпростіша причинна модель циклу популяції

Побудова складних динамічних моделей з використанням причинних циклів включає такі етапи:

1. Абстрагування від фізичної структури.
2. Концентрація на процесах для визначення траєкторій, за якими система починає та закінчує працювати.
3. Використання простих диференціально-різницевих рівнянь для опису процесів у системі:

dx/dt = kx - показова функція, яка визначає швидкість зміни фонду в часі, де х - фонд (для прикладу з водопостачанням — це швидкість наповнення бака);
dx/dt = ax - bx2 - сигмаїдальна, або логістична, крива, або S - крива;

або системи рівнянь:

dx/dt = k1x - k2x2 - k3y (наприклад, х - кількість травоїдних тварин);
dx/dt = к4y - k5y2 - k6x (наприклад, у - кількість хижаків).

Такі системи рівнянь відомі як рівняння Ланкастера. Їх можна використовувати для дослідження складних взаємозв'язків, конкуренції або конфліктів. За допомогою комп'ютерів подібні рівняння можна подати в числовому вигляді. Для цього використовують прості рівняння рекурсії:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

$$\frac{[x(n+1) - x(n)]}{dt} = f(x(n)),$$

$$x(n+1) = dtf(x(n)) + x(n).$$

Якщо описати дані рівняння словами, то наступний рівень дорівнюватиме попередньому плюс невеличка зміна протягом короткого проміжку часу. Таким способом можна будувати складні динамічні моделі за допомогою створення простих блоків у вигляді відношень і рівнів. У сучасних пакетах моделювання цей процес запису рівнянь автоматизовано із застосуванням ідеографічних схем. Причинні діаграми циклів дають змогу проводити **якісне** моделювання, а діаграми «фонд-потік» - **кількісне**. Щоб пояснити явище, потрібно знайти «причини» його виникнення. Допустимо, що таку причину визначено і наслідок може спостерігатись кожного разу, коли ця причина наявна. Якщо описують ці концепції системного мислення звичайними словами, то використовують слова або фрази «тому що», «завдяки тому, що», «якщо, то» та ін. З погляду математики, якщо розглядають функціональну концепцію з однією незалежною змінною, ця змінна - **причина**, а залежна змінна - **наслідок**. У разі кількісного моделювання таких систем модельовані об'єкти - це об'єкти, параметри яких можна виміряти і між якими існують функціональні залежності. Якщо розглядати систему «хижаки-зайці», то в кількісній моделі знищення хижаками деяких зайців - це не знищення тварин, а зменшення їх кількості. Тобто в системі є суттєва різниця між зайцями як тваринами та їх кількістю. Наприклад, вовк може знищити зайців, але кількість вовків не може знищити дещо, а може тільки вплинути на кількість зайців. Вищенаведені моделі динамічних систем широко використовуються для побудови спеціальних засобів моделювання - мови пакетів неперервного та неперервно-дискретного імітаційного моделювання.

2.5. Теоретико-множинний підхід

Відповідно до теоретико-множинного підходу формальна модель динамічної системи має такий вигляд: **M = < T, X, Y, Z, z(t), P** >,

де T - модельний час; X, Y - множина відповідно вхідних і вихідних змінних;

Z - простір станів моделі;

z{t) - функція станів, t належить T;

P - множина процесів, яка визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів <x,z[τ, t)>,

де t належить T, а τ - початковий момент модельного часу для процесу ρ належить P. Таке визначення задає модель системи у вигляді **схеми процесів**, у якій множини процесів можуть існувати паралельно в модельному часі T. Вважається, що деяка подія з множини подій C зумовлює зміну стану системи, якщо починається певний процес PI належить P або закінчується деякий процес pj належить P. У протилежному випадку стан системи не змінюється. Тоді можна задати **подійну схему** моделі: **M=< T,X,Y,Z,z(t),C >,**

де C - множина подій, що визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів < j, d [τ, tj] >,

де c належить C, d [τ, tj] - функція дії для процесу pj належить P;

t належить T, а τ - початковий момент модельного часу T.

У цій схемі процес моделювання описується як послідовність подій, що відбуваються в моделі. Допустимо, що завдяки виконанню деякої умови *u* з множини U почне виконуватись певна дія d [τ, tj] з множини D для деякого процесу pj належить P. Тоді можна задати модель системи у вигляді **схеми дій**: **M=< T,X,Y,Z,z(t),D >**.

У цій схемі процес моделювання описується як перевірка всіх умов у разі кожної зміни модельного часу t належить T, щоб знайти умову, яка почне певну дію з множини D. Зміна часу *t* може відбуватись із постійним або змінним від події до події кроком. Якщо допустити, що виконання деякої множини процесів P може призвести до зміни станів z належить Z і виникнення нових процесів, що спричинить появу деякої множини ситуацій L, тобто z(t) : Pz → L, то отримаємо ситуаційну або причинно-наслідкову схему: **M=< T,X,Y,Z,z(t),L >**, у якій потрібно описати множину ситуацій і множину правил (алгоритмів), за якими визначають процес, що повинен виконуватись. Поведінка моделі в таких системах зображується у вигляді ланцюга:

{ситуація} → {правило} → {процес}

Якщо модель здатна конструювати нові правила на основі існуючих, то вона перетворюється на модель зі штучним інтелектом. Під час ситуаційного моделювання, як правило, повний опис усіх можливих ситуацій замінюється деякою множиною узагальнених ситуацій, кожна з яких з певною мірою ймовірності відтворює один із можливих станів системи. Для кожної ситуації існує набір правил дії. Вибір того чи іншого правила може здійснюватися за деяким критерієм або за допомогою таблиць прийняття рішень, а в простіших випадках - згідно із заданою ймовірністю. Моделювання виконується завдяки програванню різних ситуацій за певним сценарієм, яким в окремому випадку може бути алгоритм моделювання. Таким чином створюють різні ігри, наприклад ділові, військові, економічні, розважальні.

Гра - це спрощене відтворення реального процесу, яке здебільшого використовується для навчання, прийняття рішень, проведення досліджень або розваг. Визначити систему можна не тільки як сукупність елементів, але і як сукупність відношень, спостерігаючи за їх змінами. Насамперед це стосується взаємодії між різними динамічними системами, кожна з яких досить складна. Прикладом можуть бути екологічні й соціальні системи. Під час вивчення таких систем дослідник, базуючись на системному аналізі, вивчає й описує впливи однієї системи на іншу.

2.6. Місце моделей в системному аналізі.

Розглядаючи сфери застосування моделей, можна констатувати, що за допомогою моделі можна досягти **дві основні цілі**: **описову**, якщо модель призначена для пояснення і кращого розуміння об'єкта, або **приписуючу**, коли модель дає змогу передбачити або відтворити характеристики об'єкта або визначити його поведінку. Таким чином, **модель є описовою**, якщо вона призначена зображувати поведінку (функціонування) або властивості існуючої або типової системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, що дає змогу знайомити потенційних покупців із фізичними і робочими характеристиками комп'ютера). Протилежність - **приписуюча модель**, яка відображає необхідну поведінку або властивості запропонованої системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, представлений постачальнику комп'ютерів, з фізичними і робочими характеристиками потрібного замовнику комп'ютера). Приписуюча модель може бути описовою, але не навпаки. Тому існує різний ступінь корисності моделей, які використовуються в технічних і соціальних науках. Це значною мірою залежить від методів, і засобів, застосовуваних під час побудови моделей, а також від кінцевої мети. У соціальних науках моделі призначено для пояснення існуючих систем, а в техніці вони є допоміжними засобами для створення нових або досконаліших моделей. Модель, що придатна для досягання цілей розроблення системи, повинна також пояснювати її. Під час побудови моделей застосовуються фундаментальні закони природи, варіаційні принципи, аналогії, ієрархічні ланцюжки. Процес створення моделі включає такі етапи:

- Словесно-смисловий опис об'єкта або явища - формулювання **описової** моделі, призначеної для сприяння кращому розумінню об'єкта моделювання.
- Числове вираження модельованої реальності для виявлення кількісної міри і меж відповідних якостей; з цією метою проводиться математико-статистична обробка емпіричних даних, пропонується кількісне формулювання якісно встановлених фактів і узагальнень.
- Перехід до вибору або формулювання моделей явищ і процесів (варіаційного принципу, аналогії тощо) і його запису у формалізованій формі; це рівень структурних теоретичних схем, таких, як системи масового обслуговування, мережі Петрі, скінченні або ймовірнісні автомати, діаграми фонд-потік тощо.
- Завершення формулювання моделі її «оснащенням» - задання початкового стану і параметрів об'єкта.
- Вивчення моделі за допомогою доступних методів (серед них із застосуванням різних підходів і обчислювальних методів).

У результаті дослідження моделі досягається поставлена мета. У цьому випадку має бути встановлена всіма можливими способами (завдяки порівнянню з практикою, порівнянню з іншими підходами) її адекватність - відповідність об'єкта сформульованим припущенням.

Функціонально і узагальнено можна виділити шість основних видів математичних моделей:

1. **Регресійні** моделі (економетричні).
2. **Евристичні** моделі. Замість математичного розрахунку коефіцієнтів регресії на базі статистичних спостережень використовують **оцінки відомих фахівців-експертів**.
3. **Оптимізаційні** моделі (засновники Данціг, Німеччина і Канторович, СРСР)
4. **Моделі теорії ігор** або **моделі теорії конфліктних ситуацій**
5. **Моделі систем масового обслуговування** (СМО)

6. **Імітаційні моделі** – насправді є алгоритмом, тобто комп'ютерною програмою, у якій можна реалізувати **динамічність** і **стохастичність** – головні ознаки і властивості складних моделей.

Для того щоб визначити види моделей, насамперед потрібно окреслити **ознаки класифікацій**. У сучасній літературі описано сотні визначень поняття «модель» і їх класифікацій. Одну з перших, досить повних, класифікацій моделей було запропоновано **Дж. Форрестом** у 1961 році. Інші класифікації не мають відомостей про ознаки, за якими їх складено. Якщо врахувати, що **моделювання** – це метод пізнання дійсності, то основною ознакою класифікації можна назвати *спосіб подання* моделі. За цією ознакою розрізняють ***абстрактні*** й ***реальні*** *моделі.* Під час моделювання можливі різні **абстрактні конструкції**, проте основною є ***віртуальна (уявна) модель***, яка відображає ідеальне уявлення людини про навколишній світ, що фіксується у свідомості через думки й образи. Вона може подаватись у вигляді ***наочної*** моделі за допомогою **графічних образів і зображень**.

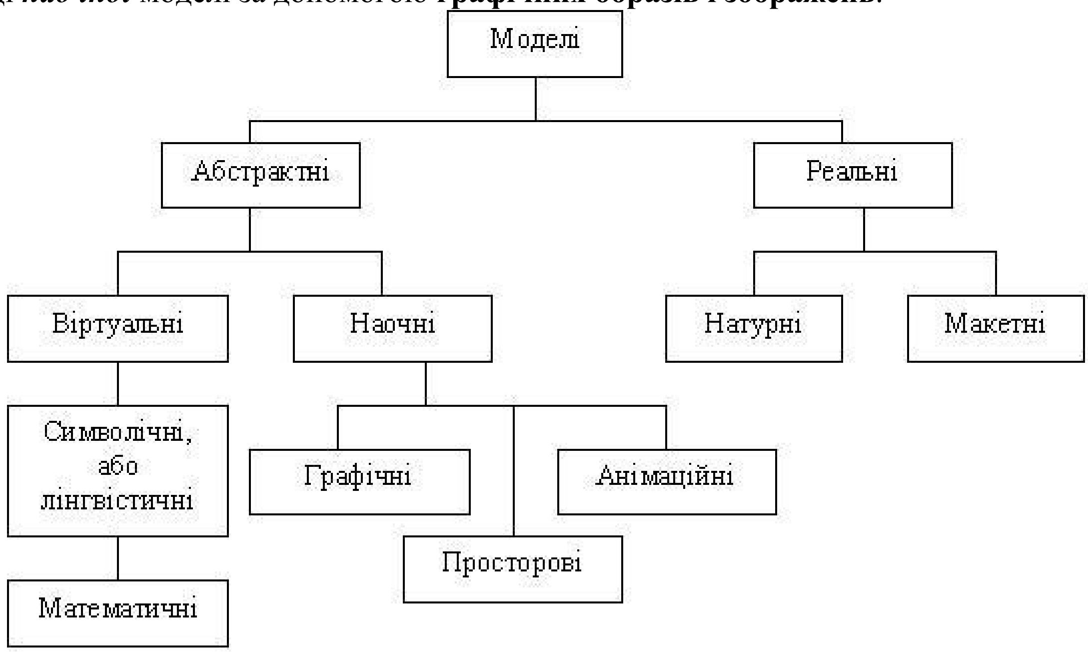


Рис.2.4. Класифікація моделей системного аналізу

Наочні моделі залежно від способу реалізації можна поділити на **дво-** або **тримірні графічні, анімаційні та просторові**. **Графічні й анімаційні** моделі широко використовуються для відображення процесів, які відбуваються в модельованій системі. ***Графічні моделі*** застосовуються в системах автоматизованого проектування (computer-aided design, CAD). Для відтворення тривимірних моделей за допомогою комп'ютера існує багато графічних пакетів, найбільш поширені з яких Corel DRAW, 3D Studio Max, Maya. **Графічні моделі** є базою всіх комп'ютерних ігор, а також застосовується під час **імітаційного моделювання** для анімації.

Щоб побудувати модель у ***формальному*** *вигляді*, створюють ***символічну***, або ***лінгвістичну*** модель, яка відповідала б найвищому рівню абстрактного опису, як це було зазначено вище. На її базі отримують інші рівні опису. Основним видом абстрактної моделі є математична модель.

Математичною називається **абстрактна** модель, яка відображає систему у вигляді математичних відношень. Зазвичай, ідеться про систему математичних співвідношень, що описують процес або явище, яке вивчається; у загальному розумінні така модель є множиною символічних об'єктів і співвідношень між ними. Як зазначає Г.І. Рузавін, «до сих пор в конкретных приложениях математики чаще всего имеют дело с анализом величин и взаимосвязей между ними. Эти взаимосвязи описываются с помощью уравнений и систем уравнений», через що **математична** модель звичайно розглядається як система рівнянь, у якій конкретні величини замінюються математичними поняттями, постійними і змінними величинами, функціями. Як правило, для цього застосовуються **диференціальні, інтегральні та алгебричні рівняння**. Розвиток нових розділів математики, пов'язаних з аналізом нечислових структур, досвід їх використання під час проведення досліджень свідчать, що потрібно розширювати уявлення про мову математичних моделей. Тоді **математична** модель визначатиметься як будь-яка математична структура, де об'єкти а також відношення між ними можна буде інтерпретувати по-різному, наприклад, як функції або функціонали.

На відміну від абстрактних ***реальні*** моделі існують у природі й з ними можна експериментувати. **Реальні моделі** – це такі, у яких хоча б один компонент є фізичною копією реального об'єкта. Залежно від того, у якому співвідношенні перебувають властивості системи й моделі, реальні моделі можна поділити на натурні й макетні.

Натурні (фізичні моделі) - це існуючі системи або їх частини, на яких проводяться дослідження. Натурні моделі повністю адекватні реальній системі, що дає змогу отримувати високу точність і достовірність результатів моделювання. Суттєві недоліки натурних моделей - це неможливість моделювання критичних режимів їх роботи та висока вартість.

Макетні моделі - це реально існуючі моделі, які відтворюють модельовану систему в певному масштабі. Іноді такі моделі називаються масштабними.

Параметри моделі та системи відрізняються між собою. Числове значення цієї різниці називається **масштабом моделювання**, або **коефіцієнтом подібності**. Ці моделі розглядаються в межах **теорії подібності**, яка в окремих випадках передбачає геометричну подібність оригіналу й моделі для відповідних масштабів параметрів. **Найпростіші макетні моделі** – це пропорційно зменшені копії існуючих систем, які відтворюють основні властивості системи або об'єкта залежно від мети моделювання. Макетні моделі широко використовуються під час вивчення фізичних та аеродинамічних процесів, гідротехнічних споруд і багатьох інших технічних систем.

За можливістю змінювати в часі свої властивості моделі поділяються на ***статичні*** та ***динамічні***. Статичні моделі, на відміну від динамічних, не змінюють своїх властивостей у часі. **Динамічні** моделі ще називаються **імітаційними.**

Залежно від того, як відтворюються в часі стани моделі, розрізняють ***дискретні, неперервні й дискретно-неперервні*** **(комбіновані) моделі**. За відношеннями між станами системи й моделі розрізняють ***детерміновані й стохастичні*** моделі. Останні, на відмінну від детермінованих моделей, враховують імовірнісні явища й процеси.

Як типи моделей, так і методи моделювання систем класифікуються за певними ознаками. Моделювання може бути:

а) повне – неповне – наближене;
б) лінійне або нелінійне;
в) детерміноване або стохастичне;
г) статичне – динамічне;
д) реальне – абстрактнее;
е) одно- або багатофакторне;
ж) фізичне – натурне – математичне;
з) символьне (мовне та знакове) – наочне;
к) неперервне - дискретно-неперервне – дискретне.

2.7. Принципи класифікації й побудови математичних моделей систем

За мірою повноти опису моделі поділяють на **повні, неповні й наближені**. **Повні** моделі адекватні об'єкту в просторі й часі. Для **неповного** моделювання ця адекватність не зберігається. При **наближеному** моделюванні беруться до уваги тільки найважливіші аспекти системи (загальна класифікація методів моделювання подана на рис.2.4-2.5).

Залежно від характеру досліджуваних процесів у системі моделі поділяють на **детерміновані та стохастичні, статичні та динамічні, неперервні та дискретно-неперервні.** **Детерміновані** моделі відображають процеси, для яких передбачається відсутність випадкових впливів, а в **стохастичних -** враховують випадкові процеси й події. **Статичне** моделювання застосовується для описування стану системи у фіксований момент, а **динамічне** — для дослідження поведінки системи в часі. **Дискретне**, **неперервне** та **дискретно-неперервне** моделювання застосовуються для опису процесів, які змінюються в часі.

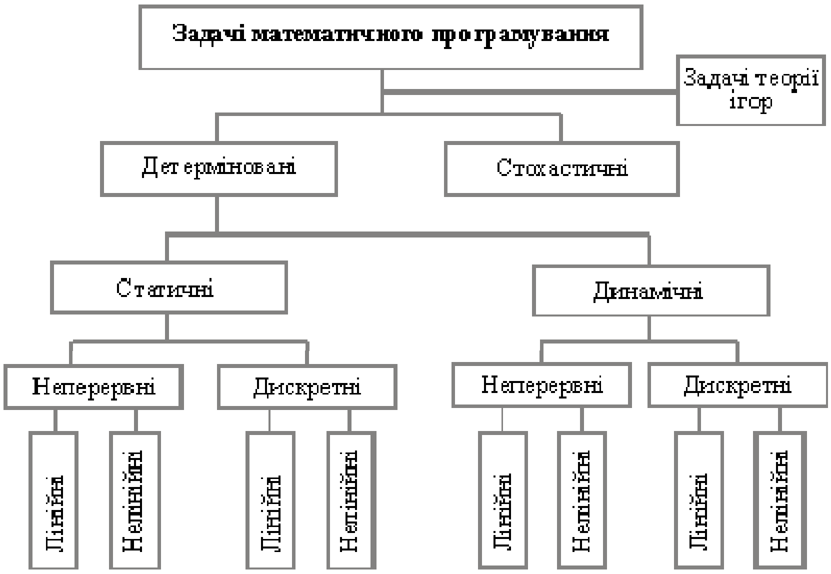


Рис. 2.5. Методи моделювання систем

Залежно від форми подання об'єкта моделювання поділяють на **реальне** й **абстрактне.** При реальному моделюванні використовують можливість дослідження характеристик на реальному об'єкті чи на його частині. При натурному моделюванні проводять дослідження на реальному об'єкті з подальшою обробкою результатів експерименту на основі теорії подібності. Фізичне моделювання здійснюється через відтворення досліджуваного процесу на моделі, яка в загальному випадку має відмінну від оригіналу природу, але однаковий математичний опис процесу функціонування.

Абстрактне моделювання має різноманітні види: **наочне, символьне, математичне.**

При **наочному** моделюванні на базі уявлень людини про реальні об'єкти створюють наочні моделі, що відображають явища та процеси, які відбуваються в об'єкті.

Символьне моделювання являє собою штучний процес створення об'єкта, який замінює реальний і виражає основні його властивості через певну систему знаків і символів. **Символьне** моделювання поділяється, у свою чергу, на **мовне** й **знакове**. В основі **мовного** моделювання лежить деякий тезаурус, який утворюється із набору вхідних понять, причому цей набір має бути фіксованим. Під **тезаурусом** розуміють словник, одиниці якого містять набори ознак, що характеризують родово-видові зв'язки та згруповані за змістовною близькістю. Між тезаурусом та звичайним словником існують принципові розбіжності. Тезаурус — це словник, який не містить неоднозначних слів. Кожному його слову відповідає лише одне поняття.

Дослідження математичної моделі дає змогу отримати характеристики реального об'єкта чи системи. Вигляд математичної моделі залежить як від природи системи, так і від завдань дослідження.

Математична модель системи містить, як звичайно, опис множини можливих станів системи й закон переходу з одного стану в інший.

Математичне моделювання, у свою чергу, включає **імітаційне**, **інформаційне**, **структурне**, **ситуаційне моделювання** тощо.

При **імітаційному моделюванні** намагаються відтворити процес функціонування системи в часі за допомогою деяких алгоритмів. При цьому імітуються основні явища, що утворюють процес, який розглядається, із збереженням їх логічної структури та послідовності перебігу в часі. Це уможливлює отримання інформації про стан процесу в певний момент та оцінку характеристик системи. Імітаційні моделі дають змогу враховувати такі ознаки, як дискретність і неперервність елементів системи, нелінійність їхніх характеристик, випадкові збурення тощо.

Інформаційне (кібернетичне) моделювання пов'язане з побудовою моделей, для яких немає безпосередніх аналогів фізичних процесів. У такому випадку намагаються відобразити лише деяку функцію і розглядають об'єкт як «чорний ящик», який має певну кількість входів і виходів. У такий спосіб моделюють тільки окремі зв'язки між входами й виходами. Отже, в основі кібернетичних моделей лежить відображення окремих інформаційних процесів регулювання, що дають змогу оцінити поведінку реальної системи.

Для побудови моделі необхідно виділити досліджувану функцію реального об'єкта та спробувати формалізувати її через окремі оператори зв'язку між входом і виходом. Імітаційна модель уможливлює відтворення цієї функції.

Структурне моделювання базується на специфічних особливостях структур певного вигляду, які використовують як засіб дослідження систем або для розроблення на їх основі із застосуванням інших методів формалізованого опису систем (теоретико-множинних, лінгвістичних) специфічних підходів до моделювання.

Структурне моделювання включає:

-методи **сітьового** моделювання;

-структурний підхід до формалізації структур різних типів (**ієрархічних, матричних**) на основі теоретико-множинного їх подання та поняття номінальної шкали теорії вимірювання;

-**поєднання** методів **структуризації** з **лінгвістичними**.

Ситуаційне моделювання базується на модельній теорії мислення, у межах якої можна описати основні механізми регулювання процесів прийняття рішень. В основі модельної теорії мислення є формування у свідомості та підсвідомості людини інформаційної моделі об'єкта чи зовнішнього світу.

Цілеспрямована поведінка людини ґрунтується на формуванні цільової ситуації та мисленого перетворення фактичної ситуації в цільову. Основою побудови ситуаційної моделі є описання об'єкта у вигляді сукупності елементів, що пов'язані між собою певними відношеннями, які відбивають семантику предметної галузі. Модель об'єкта має багаторівневу структуру і являє собою інформаційний контекст, на тлі якого здійснюються процеси управління.

При дослідженні економічних систем найчастіше застосовують методи **математичного, структурного, ситуаційного, інформаційного** та **імітаційного моделювання**.

Як було зазначено вище, при побудові моделі системи взагалі та її математичної моделі, зокрема, необхідне досягнення компромісу між намаганням отримати достатньо **повний опис** системи й досягненням необхідних результатів у **якнайпростіший спосіб**. Такий компроміс досягається, як звичайно, за допомогою побудови системи моделей, **починаючи з найпростіших і поступово ускладнюючи їх**. Прості моделі дають змогу глибше з'ясувати досліджувану систему (чи проблемну ситуацію). Ускладнення моделі введенням додаткових факторів і зв'язків уможливлює виявлення точнішої функціональної залежності між елементами системи та її взаємодії із зовнішнім середовищем.

Складні системи потребують розроблення цілої ієрархії моделей, що відображають різні їх властивості.

2.8. Вимоги до моделей

У загальному випадку під час побудови моделі потрібно враховувати такі вимоги:

- **незалежність результатів** розв'язання задач від конкретної фізичної інтерпретації елементів моделі;
- модель повинна бути **адекватною**. Цей принцип передбачає відповідність моделі поставленій меті дослідження. Математична модель будується для розв'язання певного класу задач, тому повинна описувати ті аспекти системи, що є найважливішими для дослідника;

- **змістовність**, тобто здатність моделі відображати істотні риси і властивості реального процесу, який вивчається і моделюється. Слід абстрагуватися від другорядних деталей та чинників. Модель повинна описувати лише **найсуттєвіші** (з погляду дослідника) властивості оригіналу та бути простішою за нього. Тому при побудові моделі намагаються досягти її спрощення, зберігаючи при цьому суттєві властивості досліджуваної системи;
- **дедуктивність**, тобто можливість конструктивного використання моделі для отримання результату;
- **індуктивність** – вивчення причин і наслідків, від окремого до загального, з метою накопичення необхідних знань (побудова моделі, узагальненя спостережень, формулювання закономірностей).
- ступінь деталізації моделі потрібно вибирати з огляду на цілі моделювання, можливості отримання необхідних вхідних даних для моделі та з урахуванням наявних ресурсів для її створення. Відсутність кваліфікованих фахівців може звести роботи зі створення моделі нанівець. З другого боку, чим детальніше розроблено модель, тим вона стійкіша до вхідних впливів, які не були передбаченні під час проектування, і на більшу кількість запитань може дати правильні відповіді. Необхідне **досягнення компромісу між бажаною точністю результатів моделювання та складністю моделі**. Оскільки моделі мають **наближений** характер (щодо відповідності оригіналу), то постає питання щодо достатньої точності такого наближення. **З одного** боку, **для точнішого опису системи необхідна подальша деталізація й ускладнення** моделі, а **з другого — це призводить до того, що складність самої моделі наближається до складності оригіналу**, що спричиняє виникнення **труднощів при знаходженні розв'язків за моделлю**. Тому на практиці варто знаходити компроміс між цими суперечливими вимогами.

Оскільки модель створюється для виконання конкретних завдань, розробник моделі має бути впевненим, що не отримає абсурдних результатів, а всі отримані результати відображатимуть необхідні для дослідника характеристики та властивості модельованої системи. Модель повинна дати змогу знайти відповіді на певні запитання, наприклад: «що буде, якщо...», оскільки вони є найдоцільнішими під час глибокого вивчення проблеми. Не варто забувати, що системні аналітики використовують модель для прийняття рішень і пошуку найкращих способів створення модельованої системи або її модернізації. Завжди потрібно пам'ятати, що користувачем інформації, отриманої за допомогою моделі, є замовник. Недоцільно розробляти модель, якщо її не можна буде використовувати. Крім того, для роботи з моделлю у користувача повинен бути розвинутий інтерфейс, який звичайно створюється за допомогою системи меню, налагодженої на застосування моделі в певній галузі.

2.9. Етапи моделювання.

У загальному випадку процес побудови математичної моделі системи складається з таких етапів.

Етап 1. **Змістовне описування об'єкта моделювання.** На цьому етапі необхідно сформулювати сутність проблеми **з позиції системного підходу**. Для цього необхідно виявити найсуттєвіші риси та властивості об'єкта моделювання, дослідити взаємозв'язки між елементами та його структуру, можливі стани елементів та співвідношення між ними, хоча б наближено визначити гіпотези щодо факторів, які обумовлюють стан й розвиток системи. Такий опис системи називають **концептуальною моделлю**.

Етап 2. **Побудова математичної моделі.** Цей етап полягає у формалізації концептуальної моделі, тобто в поданні її у вигляді певних математичних залежностей (функцій, рівнянь, нерівностей, тотожностей тощо). Для цього необхідно, передусім, визначити тип економіко-математичної моделі, дослідити можливість її застосування до поставленого практичного завдання, уточнити **перелік відібраних для моделювання факторів** і **типи взаємозв'язків** між ними. Потім визначають систему критеріїв, обмежень і значення керованих параметрів, при потребі будують цільову функцію.

При неможливості отримання розв'язку доводиться переглядати модель і здійснювати певні **спрощення**, наприклад, робити заміну **нелінійних залежностей лінійними**,

стохастичних — детермінованими, виключати певні фактори з моделі, поділяти модель на підмоделі тощо (наприклад, для адаптації під певні статистичні спостереження моделей **Кобба-Дугласа та Лаффера**).

Слід зауважити, що попередньо спрощені моделі після розрахунку їх коефіцієнтів треба привести до попереднього складного вигляду методом зворотнього ускладнення для їх остаточного використання.

Етап 3. Підготовка інформаційної бази моделювання та чисельна реалізація моделі. На цьому етапі здійснюється збір наявної інформації та її аналіз, що полягає не тільки в принциповій можливості отримання інформації необхідної якості, а й в аналізі витрат на підготовку або придбання інформаційних масивів.

Чисельна реалізація моделі полягає в розробленні алгоритмів, виборі пакетів прикладних програм або розробленні власних програмних засобів і безпосередньому проведенні обчислень.

Етап 4. **Перевірка адекватності моделі**. Аналіз чисельних результатів уможливлює з'ясування питання про ступінь відповідності моделі реальній системі чи явищу (за тими властивостями системи, що були обрані як суттєві). За результатами перевірки моделі на адекватність ухвалюється рішення щодо можливості її практичного застосування, напрямків її корекції.

При корегуванні моделі можуть уточнюватись і замінятися суттєві параметри (фактори) та обмеження, здійснюється оптимізація моделі, що полягає в зміні математичної залежності (функції) при її **ускладненні,** тобто перетворенні лінійної моделі на нелінійну (або навпаки - **при її спрощенні**) за умови збереження заданого рівня адекватності.

Етап 5. **Застосування моделі.** Застосування результатів моделювання в економіці спрямоване на виконання практичних завдань, зокрема, **моделювання** певних станів і процесів, **аналізу і діагностики** економічних об'єктів, економічного **прогнозування**, **оптимізації** вихідних параметрів і певних процесів, розроблення управлінських рішень тощо.

Необхідно зауважити, що процес моделювання має, як звичайно, **ітеративний (циклічний)** характер. На будь-якому з етапів можна повернутись до попередніх, оскільки може статися, що модель виявиться надто складною або суперечливою, бракує необхідної для моделювання інформації чи витрати на її придбання надто великі, модель може виявитися неадекватною й суперечити практичному досвіду або нас може не задовольняти її точність тощо.

Існують і інши погляди на етапи моделювання. Відповідно до іншого погляду визначення і етапи моделювання саме в економіці наводяться нижче.

Моделювання економічних процесів - це частина сфери застосування математичних методів і моделей в аналізі, плануванні, організації та управлінні цими процесами.

Виконання дослідження економічних процесів за допомогою методів математичного моделювання потребує зосередження уваги на методиці цього дослідження, оскільки використання правильної методики виключає можливість пошуку розв'язку неправильно сформульованої задачі, а також сприяє уникненню неправильного розв'язування чітко визначеної задачі. Правильна методика забезпечує побудову адекватної моделі щодо досліджуваної ситуації, на якій можна здійснювати експерименти за допомогою ефективних засобів математичного і програмного забезпечення.

Характерними етапами виконання **дослідження економічних процесів методами математичного моделювання** є: визначення мети, складання плану дослідження, формулювання проблем, побудова моделі, забезпечення числового розв'язку задачі, збір даних, перевірка моделі, реалізація результатів дослідження.

1) Визначення мети. Першочергове завдання будь-якого дослідника полягає в передбаченні очікуваного результату виконання дослідження, виходячи із суті об'єкта дослідження експерименту і методики дослідження. Мета дослідження не може бути вузькою внаслідок того, що затрачена робота на виконання дослідження іноді дає змогу отримати відповіді на ширше коло запитань. Однак й узагальнена мета дослідження може спричинити безуспішну спробу охопити велике коло питань. Мету дослідження формулюють замовник і виконавець дослідження спільно.

2) Складання плану дослідження. Виконання дослідження економічного об'єкта чи певної економічної ситуації загалом творчий процес, і визначення конкретних термінів виконання тих чи інших етапів дослідження є не завжди виправданим, однак абсолютна форма контролю за дотриманням термінів виконання етапів дослідження стимулює творчу ініціативу виконавців і сприяє своєчасному закінченню експериментів.

Важливою є також проблема надання ресурсів для виконання досліджень, які повинні враховувати також імовірність отримання додаткових корисних результатів. Аналіз проміжних результатів і вдале інформування щодо них замовника дає змогу підтримувати потрібний інтерес до здійснюваного дослідження всіх зацікавлених сторін.

3) Формулювання проблеми. Цей етап є одним із найважливіших. Він вимагає необхідної співпраці замовника і виконавця дослідження, що потребує отримання й опрацювання необхідної інформації для розуміння суті проблеми, для розуміння минулого і прогнозування майбутнього в її розвитку, для аналізу взаємозв'язків між параметрами чи змінними, що використовуватимуться.

Наприклад, на стадії формування проблеми необхідна чітка визначеність щодо доступних технологій виробництва і технологічних параметрів, які характеризують ці технології. Важливим є визначення доцільності розчленування проблеми на підпроблеми, окреме дослідження яких значно полегшить досягнення поставленої мети. На цьому етапі дослідникові потрібно повністю зрозуміти призначення моделей і можливостей користування ними в процесі дослідження.

Наступним питанням цього етапу є визначення міри деталізації моделі, яку розробляють. Справа тут не в обґрунтованості і навіть не в адекватності, а в тому, щоб не пропустити того чи іншого важливою чинника.

Під час побудови моделі передусім необхідно визначити змінні величини задачі, які потрібно враховувати, а також питання їхнього агрегування й деталізації. Необхідно також визначити, що є вхідною інформацією, які змінні можна змінювати, а які змінні не піддаються впливу з боку керівного органу. Вхідною інформацією можуть слугувати обсяги ресурсів, завдання з випуску продукції, нормативні показники тощо. Керовані змінні підлягають вибору в процесі експерименту. Такими змінними можуть бути обсяги продукції, інтенсивність технологій, напрями й обсяги капіталовкладень, розміри кредиту та інше, які забезпечують максимальну ефективність функціонування економічного об'єкта чи оптимальну траєкторію розвитку ситуації.

Некеровані змінні, на відміну від керованих, неможливо вибрати у процесі експерименту, однак вони впливають на шукані змінні і на рівень досягнення мети. Прикладом таких змінних можуть виступити ймовірності отримання кредитів, надходження виробничих ресурсів, рівень виробничих потужностей тощо.

Оцінка конкретних варіантів розв'язків задачі є підставою для вибору показників ефективності, яких може бути і декілька. Пріоритетність цих показників слід визначати на стадії вибору мети дослідження.

4) Побудова моделі. Функціональні залежності між показниками, параметрами і змінними, які описують суть задачі, формують модель. Головне її призначення - дати змогу виконувати експерименти з метою вибору таких змінних величин, які за заданих умов задачі забезпечили б максимальний рівень досягнення мети.

Співвідношення, які формують модель, бувають різними:

-співвідношення, які передають загальновживані залежності між конкретними величинами (динамічні вирази фізичних законів, загальновживані правила аналізу господарської і фінансової діяльності тощо);

-співвідношення, які характеризують взаємозв'язки між двома чи більше змінними і визначаються на базі емпіричних показників. Наприклад, залежність між величиною відрахувань на сплату податків R і величиною доходу D може мати такий вигляд:

$$D = A_0 + A_1R;$$

-нормативні співвідношення, які вказують на залежність змінних між собою.

Наприклад, якщо обсяги першого і другого видів продукції перебувають у співвідношенні як 2:5, то таку вимогу буде представлено у вигляді, де і - обсяги відповідно першого і другого виду продукції.

Усі ці співвідношення визначають множину допустимих значень шуканих (керованих) змінних, тобто розв'язків задачі. Кожен з цих розв'язків необхідно оцінити з погляду міри досягнення поставленої мети, а конкретніше - величини економічної ефективності чи доцільності.

Математичне вираження оцінки варіанта розв'язку задачі з визначенням напряму пошуку оптимального серед допустимих розв'язків, який називають цільовою функцією чи критерієм оптимізації, разом з усіма переліченими вище співвідношеннями являють економіко-математичну модель задачі.

На стадії створення економіко-математичної моделі необхідно прогнозувати можливість застосування тих чи інших методів щодо отримання числових розв'язків. ***З цією метою необхідно визначити і мати відповіді на такі запитання:***

- використовуватиметься імітаційне моделювання, чи будь-який з оптимізаційних методів?
- використовуватимуться стохастичні чи детерміновані змінні?
- чи деякі зі співвідношень, враховуючи і цільову функцію, носитимуть нелінійний характер?
- якою мірою враховуватиметься динаміка модельованого процесу чи ситуації?

5) Забезпечення числового розв'язку задачі. Для отримання числового розв'язку задачі потрібно виконати необхідні експериментальні дослідження. Вибір інструментарію дослідження залежить від структурованості задачі. На рівень її структуризації, як уже зазначалося вище, впливає визначеність щодо таких питань: наявність мети, досягнення якої означає розв’язання задачі; наявність альтернатив досягнення мети; наявність інформації щодо затрат ресурсів на кожному альтернативному досягненні мети; наявність моделі або сукупності моделей, які відображають залежність між метою, альтернативами її досягнення та обсягом затрат на це ресурсів; наявність оцінки (критерію), вираженої в кількісній формі, кожної з можливих альтернатив досягнення мети для визначення пріоритетної серед них.

Тут варто ще раз повторити вищесказане щодо визначеності постановок задач, які є вирішальними у виборі методів їх розв'язування.

Задачі, визначені цілковито й однозначно з усіх зазначених питань, належать до стандартних. Знайти їх розв'язки можна за допомогою шаблонних процедур. Характерним прикладом таких задач є баланс затрат випуску, який можна подати як матричну балансову модель з детермінованим інформаційним забезпеченням. Для розв’язання такої задачі досить розв'язати систему балансових рівнянь, які формулюють цю модель.

У випадку повної визначеності задачі, коли існують різні варіанти її розв’язку, для їхнього пошуку використовують методи дослідження операцій. Такі задачі називають структурованими.

Інструментарієм пошуку розв’язку задач, у яких разом з чітко визначеними і формалізованими елементами містяться параметри зі значною часткою впливу невизначеності, є системний аналіз.

Неструктуровані задачі вирізняються значною невизначеністю. Вирішальними для розв'язування таких задач є експертні оцінки, евристичні методи, досвід та інтуїція аналітиків.

6) Збір даних. На цьому етапі забезпечується отримання інформації з метою аналізу точності моделі і практичного використання результатів дослідження.

Під час розв'язування економічних задач, але не тільки економічних, з'ясувалося, що до зміни одних вхідних даних модель є чутливішою, а до інших - менше. Враховуючи це, можна зменшити затрати, зменшити вимоги до точності певних вхідних даних під час їхньої підготовки.

7) Перевірка моделі. Передусім необхідно визначитися щодо способу здійснення цієї перевірки. За допомогою аналітичних і експериментальних методів перевіряють чутливість, реалістичність і несуперечливість моделі.

Чутливість моделі перевіряють через аналіз реакції шуканих розв'язків задач на зміну початкових параметрів (умов і обмежень, показників ефективності, характеристик технології тощо). Перевірка на реалістичність моделі полягає в аналізі відповідності побудованої моделі тій економічній, правовій, політичній ситуації, у якій працюватиме модель. З цією метою перевіряють модель як для окремих часткових випадків, так і для екстремальних значень вхідних даних.

Так само перевіряють модель на несуперечливість логіці, насамперед для вхідних даних, близьких до їхніх екстремальних значень.

Важливим аспектом перевірки моделі є використання контрольних даних для оцінювання її властивостей, які ґрунтуються на реальних умовах.

8) Реалізація результатів дослідження. Дослідження економічного об'єкта, процесу чи ситуації математичними методами дослідження операцій здійснюють з метою використання (з користю для справи) результатів цих досліджень на практиці. Тому помилково вважати, що з побудовою і перевіркою моделі роботу дослідників завершено, оскільки основні труднощі виникають переважно на завершальному етапі - реалізації отриманих результатів дослідження.

Першою з таких імовірних перешкод є брак розуміння потреби використання результатів дослідження і небажання змінювати традиції, які сформувалися. Виконавці досліджень можуть ліквідувати такі перешкоди за умови:

а) зацікавленості керівництва у виконанні досліджень і здійсненні на підставі їхніх результатів необхідних змін;

б) кваліфіковано складеного плану виконання дослідження;

в) ефективної ілюстрації переваг нової методики вироблення і використання управлінських рішень над традиційними;

г) ресурсів, необхідних для внесення (приі потребі) необхідних змін і доробок.

Як дослідники, так і замовники, які причетні до впровадження запропонованих нових методик, повинні усвідомлювати потребу певного часу й ресурсів для усунення недоліків і непередбачених недоопрацювань, які завжди супроводжують створення нового.

2.10. Методи моделювання в економіці за властивостями моделей

З точки зору описової повноти:

повне – побудова моделі як достатньо точної копії оригіналу але в меньшому масштабі зі збереженням геометричної, фунційної та іншої подібності, як зазвичай це: **точна копія системи (**наприклад, повторення зразка обладнання**), макетна модель, імітаційна модель**;

неповне – розгляд оригіналу і побудова моделі як відображення небагатьох певних, але дуже характерних сторін системи, процесу або об’єкта;

наближене – моделювання у першому наближенні, тобто побудова найпростішої моделі, зазвичай, наприклад, парної лінійної регресії.

З точки зору врахування випадковості і невизначеності:

детерміноване - не враховує фактор невизначеності (ймовірності, вірогідності) U:

$$\mathbf{y = a0 + a1*x1 \cancel{+U}\ ;}$$

стохастичне - враховує фактор невизначеності (ймовірності, вірогідності) U:

$$\mathbf{y=a0 + a1*x1 + U.}$$

Набір значень фактора U розраховується або обирається, наприклад, генератором випадкових чисел або реалізується іншими методами.

З точки зору динамічності (мінливості) моделі:

статичне – фактично відповідає детермінованому моделюванню і прикладом таких моделей є звичайні регресійні, евристичні, оптимізаційні моделі, моделі теорії ігор та СМО (систем масового обслуговування);

динамічне – реалізується зазвичай за допомогою імітаційних моделей; фактично автоматично реалізується також при стохастичному моделюванні.

З точки зору лінійності моделі:

лінійне – побудова математичної або імітаційної моделі, графіком функції якої буде пряма лінія;

нелінійне - побудова математичної або імітаційної моделі, графіком функції якої буде не пряма лінія, а, наприклад, парабола або гіпербола чи поліном або дискретна ламана лінія.

<u>З точки зору описового представлення й уяви моделі оригіналу:</u>

реальне - моделювання с врахуванням конкретних умов;

абстрактне – моделювання у першому наближенні без урахування конкретних умов;

фізичне – організація аналогів певних фізичних процесів згідно з вимогами теорії подібності або виготовлення копії у вигляді макета в певному масштабі;

натурне - виготовлення копії об'єкта у вигляді макета в певному масштабі.

<u>З точки зору матеріальної реальності представлення:</u>

математичне – аналітичне моделювання з точними розв'язуваннями або моделювання за допомогою математичних численнних методів (МКЕ – метод кінцевих елементів, МКР - метод кінцевих різниць, МКО - метод кінцевих об'ємів, метод Галеркіна та інші, зазвичай ітераційні, тобто циклічні методи), що надають наближені розв'язки; можливе застосування імітаційних моделей;

фізичне – побудова матеріальной копії процесу, системи або об'єкта;

символьне – опис структури або процесів системи та об'єкта за допомогою певних знаків і символів,наприклад у вигляді ескізів, схем і креслень;

наочне – моделювання з обов'язковою візуалізацією;

<u>За дискретністю:</u>

неперервне – моделювання з виходом безперервних сигналів на виході системи або об'єкта;

дискретно-неперервне - моделювання з виходом безперервних та імпульсних сигналів на виході системи або об'єкта;

дискретне - моделювання з виходом імпульсних сигналів на виході системи або об'єкта.

Існує ще безліч різних класифікацій моделей і методів моделювання. **Згідно з іншою класифікацією** виділяються моделі, які поділяються на **матеріальні: тобто геометричні, фізичні, предметно-математичні,а серед них – економіко-математичні**. Для класифікації моделей використовують інше обґрунтування, тобто інші аспекти їхніх властивостей. Наведемо цю класифікацію.

Матеріальна модель, яку ще називають **речовою**, є певним матеріальним об'єктом чи сукупністю об'єктів, які відображають тією чи іншою мірою властивості об'єкта моделювання.

Залежно від повноти і способу відображення цих властивостей розрізняють **<u>три базові типи матеріальних моделей: геометричну, фізичну і предметно-математичну</u>**.

Геометрична модель - це певний об'єкт, який геометрично подібний до свого оригіналу. Вона надає зовнішній вигляд представлення оригіналу і слугує для демонстраційних цілей (графічні моделі – графи, мережеві графи й графіки,ієрархічні графи структури систем, графи мережевих (потокових) оптимізаційних моделей, маршрути перевезень, моделі товарів, мапи економічної географії, геоінформаційні системи (ГІС), моделі деталей машин, муляжі плодів тощо). Модель інколи виконують в іншому масштабі (макети споруд), або зі зміною розмірності простору (двовимірна мапа тримірної місцевості, фотографії тримірних предметів).

Оскільки під час побудови **геометричних моделей** найважливішу роль відіграє їхня геометрична подібність, а не процеси функціонування, то в **кібернетиці**, що вивчає процеси управління, ці моделі мають лише допоміжне значення.

Фізична модель відображає подібність між моделлю та оригіналом не тільки з погляду їхньої форми і геометричних співвідношень, а й з позиції основних фізичних процесів, що в них відбуваються, наприклад: виконання у зменшеному масштабі моделі конструкції літака, автомобілів; моделюючі електричні кола, які застосовують з метою аналізу складних і потужних енергосистем; моделі різних гідротехнічних споруд, виконані в лабораторних умовах тощо.

Недоліком такого методу моделювання є його низька універсальність; а для кожного явища, яке досліджують, необхідно будувати його індивідуальну модель. Навіть вивчення впливу окремих параметрів на одну модель потребує її заміни або істотної переробки. Це вимагає значних затрат праці, часу й матеріальних засобів.

Предметно-математичну модель розглядають інколи як різновид фізичної моделі, за якої немає вимоги, щодо тотожності фізичної природи оригіналу і моделі. Цей метод допускає лише тотожність математичного опису процесів в оригіналі і моделі, хоча ці процеси можуть розвиватися на різній матеріальній основі. **Предметно-математична модель** представляє матеріальну систему, у якій відбуваються інші фізичні процеси, ніж в оригіналі, однак і ті, й інші можна описати однаковими чи подібними математичними виразами.

Наприклад, подібними рівняннями описують: коливання струни, маятника, струму в електричному контурі; прямолінійний рух тіла з тертям і обертовий рух тіла навколо нерухомої осі.

До **ідеальних моделей**, які ще називають абстрактними, концептуальними, належать моделі двох типів.

По-перше, це моделі, які існують у думках людини, тобто які уявляє людина. Їх називають уявними, інтуїтивними моделями.

По-друге, це **логіко-математичні** (**формальні, знакові, математичні**) моделі, які є втіленням **уявних моделей** у вигляді систем математичних рівнянь чи нерівностей з коефіцієнтами у вигляді чисел чи букв, логічних виразів, таблиць, матриць, схем, графіків та інших способів логічного і математичного опису тих чи інших явищ і процесів.

Зазначимо, що перед створенням будь-якої матеріальної чи знакової моделі в уяві людини завжди виникає відповідна уявна модель.

Математична модель охоплює клас невизначених (абстрактних) математичних об'єктів (параметрів чи векторів) і відношення між ними.

Математичне відношення - це гіпотетичне правило, що пов'язує два або більше символічних об'єкти. Безліч відношень можна описати за допомогою математичних операцій.

З усіх існуючих у сучасній математиці **абстрактних моделей** найпоширенішими є такі **чотири різновиди: моделі множини дійсних чисел, моделі лінійно-векторного простору, моделі матричного простору, моделі бульової алгебри**.

Важливим класом математичних моделей є **економіко-математичні моделі** різних модифікацій. Вони належать до виокремленої самостійної галузі наукового дослідження - **економіко-математичне моделювання**. Економічна наука має чималу кількість економіко-математичних моделей, що відрізняються між собою різноманітними ознаками.

За цільовим призначенням такі моделі поділяють на **теоретико-аналітичні**, призначені для наукового дослідження механізму здійснення відповідних економічних процесів, і **прикладні** - для розв'язування конкретних задач аналізу і планування на різних рівнях.

За характером часової залежності - це моделі **статичні**, у яких усі залежності стосуються одного моменту чи періоду часу, і **динамічні**, у яких відображається процес зміни об'єкта в часі і в яких задачі розв'язують кількома етапами, причому результат на кожному з них залежить від функції та розв'язків, прийнятих на попередніх етапах.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків моделі економічних процесів можна поділити на **детерміновані**, у яких виходи однозначно визначаються множиною входів, а саму модель можна подати як деяку функцію невипадкових параметрів і змінних, і **ймовірнісні**, які відзначаються тим, що умови функціонування і характеристики станів змодельованого об'єкта є випадковими величинами і пов'язані між собою випадковими залежностями.

За співвідношенням вхідних (екзогенних) і вихідних (ендогенних) параметрів розрізняють моделі **закриті і відкриті**; за характером взаємозв'язків між параметрами - **лінійні і нелінійні**; за ступенем структуризації господарських процесів - **одно- і багатопродуктові**, **одно- і багатогалузеві**; за характером вимог до результатів розв'язування задач - **балансові й оптимізаційні**; за глибиною часового обрію - **довгострокового прогнозування, перспективні й поточні**; за ступенем повноти охоплення економічного об'єкта **- макро- та мікромоделі**.

Математична модель може охоплювати всі економічні процеси, їхню частину або лише один, досить відокремлений процес (виробництво, розподіл, обмін і споживання).

За специфікою застосовуваного методу аналізу моделі задач дослідження операцій поділяють на: **балансові, кореляційні та регресійні**, **умовної оптимізації (лінійні та нелінійні, детерміновані та стохастичні, статичні та динамічні), теорії масового обслуговування, запасів, ігор, статистичних рішень, інформації, заміни обладнання, теорії графів, імітаційні**.

Така класифікація допомагає чітко розмежувати економічний процес і його специфіку, мету моделювання, модель, яку використовують, і метод її дослідження.

Математичний апарат і сучасна обчислювальна техніка сприяють підвищенню наукового рівня економічних досліджень, вірогідності отриманих висновків, ефективності прийнятих розв'язків.

Таким чином, в економічному моделюванні можна виділити 6 основних видів моделей:

1. **ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ або РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ.**
2. **ЕВРИСТИЧНІ МОДЕЛІ.** Замість математичного розрахунку коефіцієнтів регресії на базі статистичних спостережень використовують **оцінки відомих фахівців-**експертів
3. **МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ:**
   - СМО з бункером (обмеження розміру черги).
   - СМО з відмовами (телефонна довідкова служба).
   - СМО з обмеженим часом очікування.
   - СМО з необмеженим часом очікування.

В СМО завжди існує два види подій і відповідно два види черг:

- Надходження замовлень.
- Виконання замовлень.

4. **МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ІГОР або МОДЕЛІ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ.**

Вони базуються на теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Існують моделі макроекономіки і мікроекономіки: *в мікроекономіці превалює* ***теорія конфліктних ситуацій або теорія ігор****, тому що відбувається конкуренція, а в макроекономіці використовується* ***теорія регулювання****.*

Як приклад прийняття рішення в теорії ігор - співвідношення ярових та озимих культур у сільському господарстві.

Стратегія поведінки (дії) – це є найголовніше рішення (вибір нетрадиційної стратегії). Теорія ігор обов'язково приймає до уваги негативні наслідки прийняття рішення, бо вони завжди є для будь якої стратегії поведінки.

5. ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ – є алгоритмом, комп'ютерною програмою, у якій можна реалізувати динамічність і стохастичність – головні ознаки і властивості складних моделей.

6. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ (засновники: Канторович – СРСР й Данціг, Купманс, Дорфман - США):

- Критерії оптимізації:

$\mathbf{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow MAX}$ (MIN, CONST).

- Система обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots + a_n x_n \le (=)\mathbf{b}_1 \\ a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots + a_n x_n \le (=)\mathbf{b}_2 \end{cases}$$

ДОДАТКОВІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ.

Можливе графічне рішення оптимізаційних задач.

Загальний вигляд оптимізаційної моделі, що складається з двох частин:

- Критерії оптимізації $\mathbf{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}$ **MAX** (MIN, CONST).
- Система обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=)\mathbf{b}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=)\mathbf{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=)\mathbf{b}_n \end{cases}$$

Прикладами видів оптимізаційних задач є:

6.1. Лінійне програмування (розподіл ресурсів або транспортна задача).

6.2. Нелінійне програмування (непряма лінійна задача призначена на посаду).

$$y = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ ... \ + a_{1n}x_n^2 \le b_1$$

6.3. Цілочисельне програмування (х – ціле значення).
6.4. Стохастичне програмування (вірогідністні змінні).
6.5. Мережеве програмування (на max потік та min переріз).
6.6. Параметричне програмування (коли існує кореляційний зв'язок між факторами).
6.7. Динамічне програмування (Методи: Модель Белмана и Модель Понтрягіна).
6.8. Дробово-лінійне програмування (з’являється знаменник)

$$F = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... \ + c_nx_n}{z\,(d_1 + d_2z)}$$

6.9. Багатокритеріальне програмування (в цьому випадку декілька критерій оптимізації).
6.10. Булеве (двійкове) програмування **0** або **1.**

Короткий висновок. Розробнику модельєру обов’язково необхідно додатково звернути увагу на такі питання:

а) цикл життя моделі;
б) алгоритми створення і функціювання;
в) визначення ступіня деталізації моделі;
г) вибір впливових факторів (незалежних змінних);
д) вибір математичної функції залежності між факторами і відгуком (функцією);
ж) спрощення моделі;
з) перевірка точністі і достовірності результатів моделювання;
к)ускладнення для підвищення адекватності, точності і достовірності моделювання;
л) припущення;
м) межні і початкові умови.

ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧНЕ І ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ.
ЛЕКЦІЯ 3. МОДЕЛІ І МОДЕЛЮВАННЯ

3.1. Принципи застосування математики в економіці

Використання математичних методів у економіці почалося досить давно. Перша у світі економічна модель була створена у XVIII столітті французьким економістом Ф. Кене. У XX столітті його “Економічна таблиця” послужила основою для побудови й розвитку численних моделей суспільного відтворення. Так, міжгалузева модель “Витрати–випуск” В. Леонтьєва є подальшим логічним кроком у продовження економічної таблиці Ф. Кене.

Розквіт застосування математичних методів в економіці ознаменувало XX століття. З їх використанням пов’язанні праці майже всіх учених, відзначених Нобелівською премією з економіки, наприклад, Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон, Л. Канторович, Т. Купманс, Кобб, Дуглас, Г. Марковіц, У. Шарп.

Перші праці із застосуванням математики в економіці не виходили за межі найпростіших обробок результатів спостережень. Подальший розвиток мікро– і макроекономіки, прикладних економічних дисциплін пов’язаний з дедалі вищим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес у самій математиці передусім в галузі прикладної математики.

Яку ж конкретно роль відіграють **математичні методи** в економіці? Використання їх, тією мірою, якою самі моделі адекватні об'єкту дослідження, дає змогу:

– точно і компактно викладати положення економічної теорії;
– виділяти і формально описувати найістотніші зв'язки економічних змінних і характеристик;
– отримувати висновки про функціонування об'єкта;
– отримувати нові знання про об'єкт;
– передбачати майбутню поведінку об'єкта у разі зміни якихось його параметрів.

Природно, що використання математичних методів і побудова на їх основі математичних моделей супроводжувалися розвитком відповідних понять. Різні дослідники давали власне тлумачення вже сформованим термінам. Розглянемо їх коротко.

Модель — це такий матеріальний або уявлюваний об'єкт (об'єкт-замінник), який у процесі дослідження заміщає об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригінал.

Модель **потрібна** для того, щоб:

- зрозуміти з чого складається конкретний об’єкт;
- навчитись керувати об’єктом (процесом) і визначати найкращі способи управління при заданих умовах;
- прогнозувати прямі і непрямі наслідки реалізації заданих форм впливу на об‘єкт.

Процес побудови, вивчення і застосування моделей називають -***моделюванням.***

Існує декілька прийомів моделювання, які умовно можна поєднати в дві групи: **матеріальне (предметне)** та **ідеальне**:

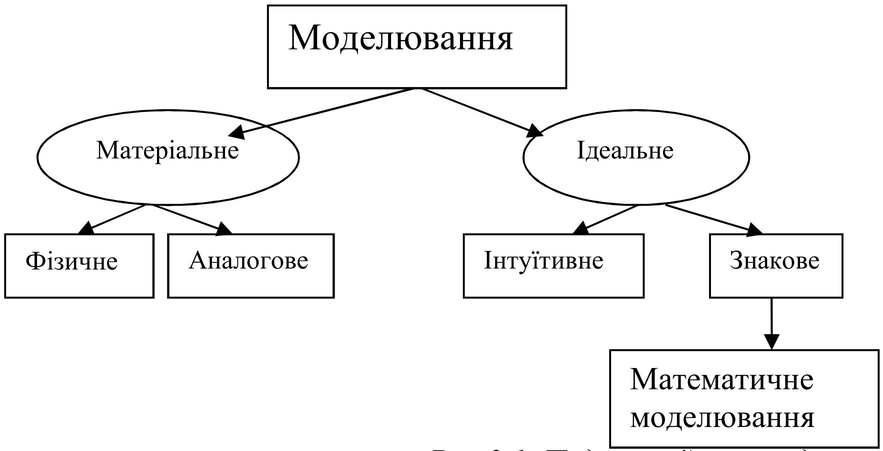


Рис.3.1 Поділ прийомів моделювання

Відповідно всі моделі поділяються на два великі класи: моделі ***матеріальні*** і моделі ***ідеальні***. Характерний представник моделей першого класу — фізичні моделі. До другого класу належать, у принципі, усі створені людиною мислені уявлення про навколишній світ, зокрема, і математичні моделі.

Об'єктом дослідження математичного моделювання в економіці є економічна система.

Математична модель економічного об’єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

У широкому сенсі, ***математичне моделювання*** — це метод дослідження, базований на аналогії процесів різної природи, але які описуються однаковими математичними залежностями.

Необхідність використання моделювання визначається тим, що багато об'єктів і пов'язані з ними проблеми дослідити безпосередньо або зовсім неможливо, або ж їхнє дослідження вимагає так багато сил і часу, що вже з цієї причини стає неможливим.

За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна, отже, неповна, оскільки, виділяючи визначальні закономірності, вона абстрагується від інших факторів, які, незважаючи на їх відносну малість, у сукупності чи за певних умов можуть визначати не тільки відхилення в поведінці об'єкта дослідження, а й саму поведінку. Однак при цьому методі пізнання не залишається нічого іншого, як допускати, що неврахованi фактори справляють на об'єкт незначний вплив, або ж уводити їх у модель і робити врахованими, якщо це можливо.

Наприклад, у найпростішій моделі попиту вважається, що попит на товар визначається його ціною і доходом споживача. На справді ж на попит впливають й інші фактори: смаки й очікування споживачів, ціни на інші товари, реклама, мода і так далі. І іноді роль останніх буває визначальною.

Для математичних моделей, використовуваних в економіці, застосовуються різні види класифікації. Основні з них подано на рис.3.2.

Рис.3.2 Класифікація математичних моделей, використовуваних в економіці

Будуючи моделі, виділяють істотні фактори й відкидають деталі, щоб виокремити спільне й суттєве для всіх принципово однакових, але таких різних у деталях явищ. Приклади економічних моделей наведено на схемі, рис.3.3.

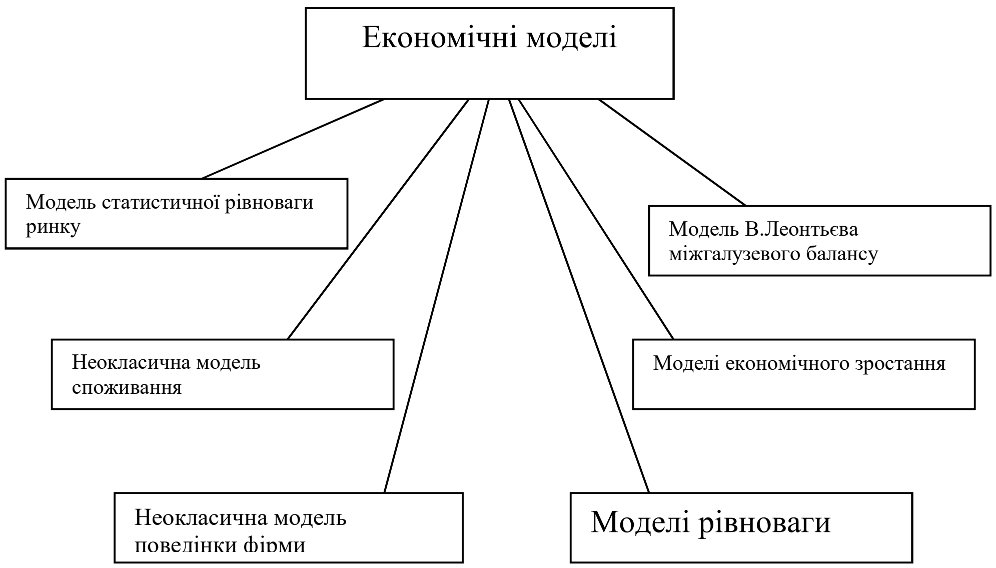


Рис.3.3 Приклади економічних моделей

Проникнення математики в економіку пов'язане з подоланням значних труднощів. Головні причини лежать у специфіці економічної науки, а також у природі економічних процесів, для яких характерні масовість, динамічність і стохастичність. Крім того, більшість об'єктів, досліджуваних економічною наукою, характеризується поняттям «складна система». Складність економічних процесів часто розглядається як обґрунтування неможливості їх формалізації і моделювання засобами математики. Хибність такої точки зору доводиться самою «живучістю» моделей. Моделювати можна об'єкт будь-якої природи і складності, тому що теза про принципову неможливість моделювання рівносильна твердженню про принципову непізнаваність об'єкта.

І саме складні об'єкти становлять найбільший інтерес для моделювання. Саме тут моделювання може дати і дає результати, які не можна отримати жодними іншими способами дослідження.

Нині моделювання набуло нової якісної форми, що тісно пов'язано з використанням можливостей, наданих комп'ютерами.

Інформатизація суспільства – закономірний процес. Наприклад, у США злам припав на 1991 рік, коли вперше витрати на придбання інформаційної техніки (112 млрд. дол.) перевищили витрати на придбання промислового обладнання (107 млрд. дол.). Цей рік можна вважати першим роком інформаційної ери. Відтоді різниця між зазначеними витратами постійно збільшується. Зростання ролі знань, сучасних технологій, добування нової важливої для керування інформації притаманне інформатизованим суспільствам. Це видно на прикладі компаній "IBM" і "Microsoft". Так, наприкінці 1996 року ринкова вартість компанії "Microsoft" становила 85,5, а "IBM" – 70,7 млрд. дол., хоча остання продавала набагато більше продукції. Окрім того, вартість основних виробничих засобів та устаткування "IBM" сягає 16,6 млрд. дол., а "Microsoft"–не перевищує 930 млн. дол. Отже, з позиції індустріального суспільства основною вартістю "Microsoft" є "повітря" – ідеї, думки, набутий працівниками досвід. Престижне ім'я, можливості, передусім можливості перспективн,і а також розумні й творчі голови службовців.

Зауважимо, що в розвинених країнах чисельність працівників, зайнятих у сфері виробництва, з року в рік зменшується. Так, нині у США частка таких працівників становить приблизно 10%, а в інтелектуальній сфері зайнято вже 60%. При цьому рівень рентабельності у виробничій сфері не перевищує 5 – 15%, а в інтелектуальній–1000–2000%.

3.2. Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій.

Під ***операцією*** розуміють будь-яку діяльність людини, що спрямована на досягнення якоїсь мети (у виробництві, у військовій операції, у перевезенні вантажів, у плануванні робіт, у прийнятті політичного рішення та ін.).

Допустимо, що людина приймає рішення (часто дуже важливе, бо від нього залежить її доля, доля її підприємства, доля військової операції, напрям розвитку держави). Виникає питання: наскільки це рішення є правильним? Виникає потреба об'єктивної ***кількісної*** оцінки прийнятого рішення.

Дослідження психологів показали, що людина почуває себе невпевнено, якщо при прийнятті рішення потрібно врахувати понад 10 змінних або суперечливих факторів. Але в реальних умовах виробництва на процеси впливають сотні (а іноді й тисячі) факторів. Тому науковий підхід до кількісної оцінки прийнятого рішення за допомогою методів дослідження операцій є дуже важливим.

Дослідження операцій - це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого рішення в різних галузях діяльності людини. Ця наука дає об'єктивні, кількісні рекомендації з управління цілеспрямованими діями людини.

Як самостійний науковий напрям, дослідження операцій оформилося на початку 40-х років минулого століття. Перші публікації з досліджень операцій з'явились у 1939-1940 рр. А на період Другої світової війни США використовували науковців, які давали поради військовим щодо прийняття рішень при аналізі та дослідженні військових операцій. Звідси і виникла назва дисципліни.

Пізніше принципи і методи дослідження операцій (ДО) почали використовуватись у цивільній сфері: у промисловості, для управління фінансами, у сільському господарстві та ін.

Метою ДО є *наукове кількісне обґрунтування рішень*, які ухвалюються щодо управління в господарських, військових і державних справах. У деяких випадках (наприклад, у багатьох комбінаторних задачах) отримати оптимальний розв'язок неможливо, і тому приймається субоптимальне (не найгірше) рішення.

Виникає питання філософського характеру: наскільки впливають методи ДО на наше життя? Відповідь на це дає скорочений перелік питань, які з'ясовуються за допомогою методів ДО: плани в політиці (у Канаді та США створені так би мовити "електронні уряди"), плани розвитку народного господарства (тобто ми живемо за планами, визначеними ЕОМ), розвиток військових справ і військових операцій, фінансові справи. На перший погляд, ЕОМ у цих випадках лише "дає поради", а "рішення приймає людина". Але певною мірою це самообман, бо перевірити розв'язок машини людина може, знову ж таки, лише за допомогою іншої машини. І виходить, що доля людства залежить від розв'язку машини, затвердженого людиною.

Предметом дослідження операцій є: військові операції; рішення в політиці та виробництві, сільському господарстві, фінансових справах і т.п. Ми будемо розглядати виробничі процеси в господарській діяльності людини.

Типовими класами задач дослідження операцій є:

Розподіл ресурсів. Ресурси - це гроші, матеріали, людська праця і т.п. Ресурси завжди обмежені і в різних виробах забезпечують різний прибуток. Наприклад, ми маємо тканину, з якої можна виготовити або чоловічий, або жіночий, або дитячий одяг за різними цінами й прибутками. Виникає проблема розподілу людей, матерії та інших ресурсів між виробами з метою отримання найбільшого прибутку.

Управління запасами. Із збільшенням запасів створюються умови для ритмічнішої роботи виробництва. Запас - це гарантія можливості виконання будь-якого замовлення. Якщо запасів не вистачає, то можливі значні збитки за рахунок невиконання зобов'язань. Але разом зі збільшенням запасів збільшується змертвілий капітал і витрати на зберігання. Недаремно існують підприємства, які зовсім не мають складів: їх замінюють майданчики для розвантаження отриманої та відвантаження виготовленої продукції. Виникає проблема управління запасами при найменших витратах.

Задачі мережного планування й управління розглядають співвідношення між термінами закінчення великого комплексу операцій і моментами початку всіх операцій комплексу. Потрібно знайти мінімальні тривалості комплексу операцій, оптимальні співвідношення вартості і термінів виконання.

Мережні задачі полягають в оптимізації процесу обслуговування на мережах чи самої структури мережі.

Задачі планування і розміщення пов'язані з визначенням оптимального числа і місця розміщення нових об'єктів з урахуванням їх взаємодії з наявними об'єктами і між собою.

Задачі дослідження конфліктних ситуацій полягають у виборі оптимальних стратегій поведінки учасників конфлікту.

Задачі масового обслуговування: розглядають питання створення та функціонування черг (на заводському конвеєрі; у залізничній касі; для літаків над аеропортом, що йдуть на посадку; клієнтів в ательє побутового обслуговування; абонентів міської телефонної станції тощо). Потрібно розв'язати проблеми якісного обслуговування при мінімальних витратах на обладнання.

Задачі складання розкладів (календарного планування) полягають у визначенні оптимальної черговості виконання операцій на різних видах устаткування чи при певному способі надання послуг.

Ремонт та заміна устаткування. Застаріле обладнання вимагає витрат на ремонт і має знижену продуктивність. Потрібні розрахунки для прийняття рішення щодо термінів ремонту та заміни обладнання, які забезпечують найбільший прибуток.

Задача рюкзака: рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажопідйомність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

Задачі комівояжера, створення сумішей, наймання / звільнення робітників, мережевого планування робіт, порядку обробки кількох різних деталей, комбіновані задачі та ін. - усім цим займається наука "*Математичні методи дослідження операцій*".

3.3. Основні поняття дослідження операцій

Як і кожна сформована наука, дослідження операцій має власну систему понять. Розглянемо основні.

При цьому під *операцією* розуміється будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення чи організації, інакше — від вибору деяких параметрів.

Будь-який вибір набору параметрів *називається рішенням.* ***Оптимальними*** вважаються ті рішення, що в обговореному заздалегідь сенсі мають переваги над іншими. Виходячи з мети цієї теорії, можна сказати, що основним завданням дослідження операцій є знаходження оптимальних рішень у межах обраної моделі.

Модель ***операції*** — це якомога точніший опис операції за допомогою математичного апарата.

Ефективність операції— це ступінь її пристосованості до виконання поставленої мети, що кількісно виражається у вигляді цільової функції. Вибір критерію ефективності визначає практичну цінність дослідження.

У процесі формування як стратегічних, так і тактичних рішень керівник змушений брати до уваги численні, нерідко взаємосуперечливі вимоги і спиратися на складні критерії досягнення кінцевих цілей. За цих умов для досягнення високого рівня управління йому далеко не завжди вистачає професійних знань, власного досвіду, інтуїції й організаторських здібностей у їх традиційному розумінні. Потрібні науково обґрунтовані й точні методи прийняття рішень.

Однак зауважимо, що сам реальний процес ухвалення рішення виходить за межі науки дослідження операцій і належить до компетенції особи (частіше групи осіб), що приймає рішення (ОПР). Неодмінна присутність людини не скасовується навіть у разі повної автоматизації системи управління.

Основною особливістю дослідження операцій є побудова математичних моделей і використання для їх аналізу математичного апарату. Це насамперед означає, що хоча б деякі дані, які фігурують у формулюванні задачі, мають мати кількісне вираження. Міркування якісного характеру є своєрідним тлом для використовуваної моделі і враховуються додатково.

Основні етапи дослідження операцій

1. Отримання змісту задачі у вигляді текстового (технічного) завдання. Збір даних, їх аналіз. Формулювання задачі з точки зору Замовника. Консультації із Замовником. Виявлення факторів, які впливають на процес. Уточнення мети (варіантів мети).

2. Формалізація задачі у вигляді математичної моделі, яка складається з функції мети (показника якості або ефективності процесу):

$$F = F(X, У) = \max (\min)$$

при обмеженнях $g_i(X, Y) \le b_i$,

де X — вектор керованих змінних (ними розпоряджається керуюча сторона);

У - вектор некерованих аргументів (некеровані, невизначені, випадкові фактори);

$g_i(X, У)$ -функція споживання *і-го* ресурсу;

b_i - величина *і-го* ресурсу (вага ресурсу, сума грошей, фонд машинного часу верстата та ін.).

За допомогою обмежень знаходять область допустимих розв'язків, а функція мети дозволяє визначити оптимальну точку в цій області. Отримати оптимальний розв'язок означає знайти такі величини *X,* при яких функція мети F досягає оптимуму при одночасному дотриманні нерівностей.

3. Розв'язання задачі виконується такими найпоширенішими методами:

• лінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ та $g_i(X, У)$ - лінійні функції відносно ***X,*** У;

• нелінійного програмування, якщо $F = F(X, У)$ та $g_i(X, У)$ - нелінійні функції відносно *X,* У;

• динамічного програмування, якщо $F = F(X, У)$ є адитивною або мультиплікативною функцією від змінних *X,* У;

• дискретного програмування, якщо на змінні - X, У накласти умови дискретності (наприклад, цілочисленості);

• стохастичного програмування, якщо У - випадкова величина, а замість функції мети F = F*(X,* У) розглядають її математичне очікування.

4. Перевірка й корегування моделі. Перевірка виконується порівнянням поведінки моделі з фактичним поводженням.

5. Реалізація на практиці.

Отримане на основі дослідження операцій рішення має власні особливості:

1. ***Наукове кількісне обґрунтування*** рекомендованого варіанта рішення з визначенням: найкращого способу дії повноти досягнення мети і ціни досягнутої мети, ступеня ризику.

2. ***Системний підхід:*** будь-яка задача розглядається з точки зору її впливу на критерії функціонування всієї системи.

3. ***Дорогий фізичний експеримент*** замінюється порівняно дешевим математичним моделюванням, яке дає відповідь на багато питань і дозволяє прийняти оптимальне рішення. При цьому використовується ЕОМ.

4. ***Рекомендувальний характер*** висновків із дослідження операцій: рішення приймає людина, яка повинна нести повну відповідальність за наслідки цих рішень.

Методи ДО вміщують цілу низку математичних засобів:

• теорія лінійного, нелінійного, дискретного (цілочисленого, бінарного, неподільного), динамічного, стохастичного програмування;

• теорія ігор;

• теорія систем масового обслуговування;

• прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;

• теорія експертних систем;

• теорія ефективності та ін.

У принципі, будь-який розрахунок можна розглядати як дослідження операцій, бо він дозволяє прийняти обґрунтоване оптимальне рішення в багатофакторній сфері. Але традиційно дослідження операцій стосується вужчого кола питань: організації взаємодій та оптимального функціонування складних систем із множиною рішень і заи умов дотримання вказаної форми математичної моделі.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що таке модель?
2. Для чого потрібна модель?
3. Які є прийоми моделювання?
4. Що є об'єктом дослідження математичного моделювання в економіці?
5. Що таке математична модель?
6. Класифікація математичних моделей в економіці.
7. Навести приклади економічних моделей.
8. Що таке операція?
9. Що таке дослідження операцій?
10. Що є предметом дослідження операцій?
11. Назвіть типові класи задач дослідження операцій.
12. Що таке модель операції?
13. Що таке ефективність операції?
14. Назвіть основні етапи дослідження операцій.
15. Які ви знаєте методи дослідження операцій?

ЛЕКЦІЯ 4. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ І РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ.

4.1. Параметризація та дослідження багатофакторної регресійної моделі (з прикладом)

Рис.4.1.Вплив економічних чинників на прибуток

Допустимо, що між економічним показником y і факторами x1, x2, x3 існує лінійний зв'язок.

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3$$

параметри моделі, які потрібно оцінити, $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$

Таблиця 4.1

Вихідні дані в умовних одиницях

Номер спост.	$x_1(i)$	$x_2(i)$	$x_3(i)$	$y(i)$
1	17,37	5,28	1,42	15,7
2	18,24	6,47	1,58	17,34
3	22,47	6,98	1,98	21,57
4	18,47	7,05	2,04	33,5
5	16,82	7,94	2,38	32,30
......	......	......	......	......
14	35,67	18,47	8,58	62,22
15	47,87	19,64	9,47	77,58

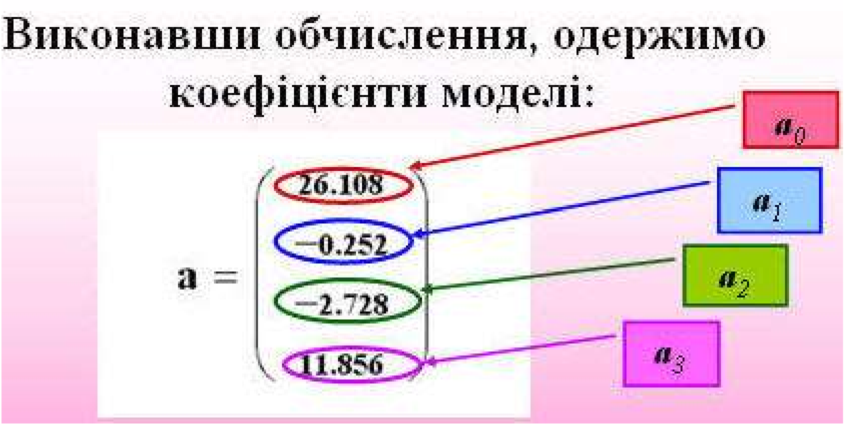
Знайдемо методом найменших квадратів (МНК)-оцінки параметрів моделі.

$$Y := \begin{pmatrix} 15.7 \\ 17.34 \\ 21.57 \\ 33.5 \\ 32.3 \\ 37.9 \\ 40.78 \\ 48.02 \\ 43.3 \\ 49.57 \\ 52.14 \\ 55.17 \\ 59.18 \\ 62.22 \\ 77.58 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & x_1(i) & x_2(i) & x_3(i) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 17.37 & 5.28 & 1.42 \\ 1 & 18.24 & 6.47 & 1.58 \\ 1 & 22.47 & 6.98 & 1.98 \\ 1 & 18.47 & 7.05 & 2.04 \\ 1 & 16.82 & 7.94 & 2.38 \\ 1 & 17.6 & 8.12 & 3.48 \\ 1 & 17.12 & 8.69 & 3.07 \\ 1 & 19.81 & 9.31 & 3.84 \\ 1 & 18.67 & 10.45 & 4.28 \\ 1 & 20.83 & 10.47 & 4.67 \\ 1 & 22.84 & 13.48 & 5.98 \\ 1 & 28.85 & 15.78 & 6.51 \\ 1 & 29.61 & 17.65 & 7.82 \\ 1 & 35.67 & 18.47 & 8.58 \\ 1 & 47.87 & 19.64 & 9.47 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.Обчислимо оцінки регресійних коефіцієнтів за формулою

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

де X^T — транспонована матриця X.



Функція регресії з урахуванням знайдених оцінок коефіцієнтів моделі набуває вигляду:

$$\hat{y} = 26{,}108 - 0{,}252x_1 - 2{,}728x_2 + 11{,}856x_3$$

2.Для перевірки адекватності отриманої моделі обчислимо:

а) залишки

$$u_i = y_i - \hat{y}_i$$

б) відносну похибку розрахункових значень регресії:

$$\delta_i = \frac{u_i}{y_i} \cdot 100\%$$

середнє значення відносної похибки

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}$$

$$\bar{\delta} = -0{,}52783$$

в) обчислимо середньоквадратичну помилку дисперсії збурень

$$\hat{S}_u = \hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-m-1}}$$

$$\hat{S}_u = 5{,}7357$$

г) Перевіримо тісноту загального зв'язку (впливу) незалежних змінних на залежну змінну. Для цього треба обчислити коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = 0{,}91436$$

Висновок: чим ближчий він до одиниці, тим більша варіація залежної змінної *y* визначається варіацією незалежної змінної x (є тісний зв'язок між залежною та незалежними змінними);

д) Перевіримо на значущість вибіркового коефіцієнта кореляції.

Для цього обчислимо $R = \sqrt{R^2}$ коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку всіх незалежних факторів *x* із залежною змінною у).

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}91436} = 0{,}956222$$

3.Перевіримо статистичну значущість отриманих результатів.
а) обчислимо F-статистику за формулою

$$F_{експ} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}$$

Знайти табличне значення: $F(m, n-m-1, \alpha)$ і порівняти його з обчисленою F–статистикою: якщо

$$F_{експ} > F(m, n-m-1, \alpha)$$

то гіпотеза відхиляється, інакше - приймається.

Маємо Fексп=39,14827, табличне значення:

$$F(3, 11, 0{,}05) = 3{,}59$$

Порівняємо його з обчисленою F-статистикою. Оскільки $F_{експ} > F(3{,}11{,}0{,}05)$

нульова гіпотеза відхиляється, тобто коефіцієнти регресії є значущими;

б) обчислимо t-статистику за формулою:

$$t = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}}$$

де: $t_{табл}(\alpha/2, n-m-1)$

відповідне табличне значення t-розподілу з (n-m-1) ступенями свободи, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і незалежними змінними моделі.

У нас Маємо t=37,03215.

Відповідне табличне значення

$$t_{табл}(0{,}025;11) = 2{,}593097$$

Оскільки $\left|t\right| > t_{табл}(0{,}025;11)$

то можна дійти висновку про достовірність коефіцієнта кореляції, який характеризує тісноту зв'язку між залежною й незалежними змінними моделі.

Для вибраного рівня значущості α і відповідного ступеня вільності k=n-т-1 записати межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції R:

(R-ΔR; R+ΔR), де

$$\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}}$$

У нас

Маємо

$$\Delta R = 2{,}593 \cdot \frac{1-0{,}956222}{\sqrt{15}} = 0{,}029311$$

Отже,

$$(R - \Delta R\,;\, R + \Delta R) = (0{,}926911\,;\, 0{,}985533)$$

в) перевіримо значущість окремих коефіцієнтів регресії. Визначимо t-статистику за формулою

$$t_j = \frac{a_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{a_j}{S_{a_j}},$$

де c_{jj} - діагональний елемент матриці,

S_{a_j} - стандартизована помилка оцінки параметра моделі.

Значення t_j-критерію порівнюється з табличними при k = n-m-1 ступенях свободи і рівні значущості α :

якщо $|t_j| > t_{\alpha/2,k}$, то відповідна оцінка параметра регресійної моделі є значуща; інакше приймаємо гіпотезу про рівність a_i нулю

У нас

$$t_0 = 3{,}105278; \quad t_1 = -0{,}67081;$$
$$t_2 = -1{,}09688; \quad t_3 = 2{,}696681$$

табличне значення $t_{табл}(0{,}025{,}11) = 2{,}593097$

Оскільки $|t_0| > t_{\alpha/2,k}; \quad |t_1| < t_{\alpha/2,k}; \quad |t_2| < t_{\alpha/2,k}; \quad |t_3| > t_{\alpha/2,k}$

відповідно оцінки $\hat{a}_0, \hat{a}_3$ є значущими, а оцінки $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ не є значущими.

4.Обчислимо коефіцієнти еластичності за формулою

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}.$$

Коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни питомої ваги x_i на *y* у допущенні, що вплив інших факторів відсутній: показує, що %, якщо фактор *x* зміниться на 1%αрегресанд *y* зміниться на

У нас

α1= -0,13724; α2 = -0,6997; α3 = 1,23097

У нашому випадку він показує, що прибуток підприємства зменшиться на 0,14 %, якщо інвестиції зростуть на 1%, прибуток підприємства зменшиться на 0,7 %, якщо витрати на рекламу зростуть на 1%, прибуток підприємства збільшиться на 1,24%, якщо заробітна плата зросте на 1%.

Загальна еластичність *Y* від усіх факторів x_i дорівнює:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

Цей показник свідчить, що якщо одночасно збільшити на 1% всі фактори x_i то % *y* , зміниться на величину α.

У нас

α=0,394033.

5.Обчислимо довірчі інтервали для математичного сподівання і для кожного спостереження

$$X_i = \left(x_{1(i)}, x_{2(i)}, x_{3(i)}\right)$$

$$\left(\hat{y}_i - \Delta\hat{y}_i ; \hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i\right),$$

де

$$\Delta\hat{y}_i = t_{\alpha/2,k} \cdot \hat{S}_u \cdot \sqrt{X_i^T (X^T X)^{-1} X_i}$$

де $\hat{S}_u$ — незміщена оцінка дисперсії залишків:

У нас $\hat{S}_u = 5{,}7357$

Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо довірчі зони регресії:

(23,430; 24,904)
(22,594; 22,604)
(24,730; 25,041)
....
(62,887; 63,558)
(68,229; 68,712)
(71,961;73,556)

6.Побудуємо довірчі інтервали для параметрів регресії.

$$(a_j - t_{\alpha/2,k}\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}} \; ; a_j + t_{\alpha/2,k}\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}})$$

Довірчий інтервал при рівні надійності (1- α) є інтервал з випадково залежними межами і накриває істинне значення коефіцієнта регресії a_j з рівнем довіри (1- α).

У нас

Маємо $\sigma_u^2 = 32{,}89835$

$$t_{табл}(0{,}025;11) = 2{,}593097$$

Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо:

$a_0 \in (4{,}31;47{,}91)$ $\quad$ $a_1 \in (-1{,}23;0{,}72)$

$a_2 \in (-9{,}17;3{,}72)$ $\quad$ $a_3 \in (0{,}46;23{,}26)$

7.Обчислимо прогнозні значення і знайдемо межі довірчих інтервалів індивідуальних прогнозних значень і межі довірчих інтервалів для математичного сподівання (точковий та інтервальний прогнози).

а) для обчислення прогнозних значень $y_{pi} = Y_{np}$ у рівняння

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3$$

тобто

$$\hat{y} = 26{,}108 - 0{,}252x_1 - 2{,}728x_2 + 11{,}856x_3$$

підставимо задані значення x_{pi}

У нас

Підставимо

$x_{1np} = 48{,}82, \quad x_{2np} = 20{,}04, \quad x_{3np} = 10{,}25$ отримаємо

$$y_{np} = 80{,}68$$

б) знайдемо межі довірчих інтервалів індивідуальних прогнозованих значень за формулою:

$$\hat{Y}_{np} - \Delta\hat{Y}_{np} \le Y_{np} \le \hat{Y}_{np} + \Delta\hat{Y}_{np},$$

де

$$\Delta\hat{Y}_{np} = t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}}$$

У нас

$\hat{Y}_{np} = 80{,}68$ $\quad \sigma_u = 5{,}7357$

$$X_{np} = (48{,}82;\ 20{,}04;\ 10{,}25)$$

тоді

$Y_{np} \in (58{,}72; 102{,}64)$ інтервальний прогноз індивідуального значення

в) знайдемо межі довірчих інтервалів для математичного сподівання значення Yпр за формулою:

$$\hat{Y}_{np} - \Delta_1 \le M(Y_{np}) \le \hat{Y}_{np} + \Delta_1,$$

де

$$\Delta_1 = t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}}$$

У нас $\quad \hat{Y}_{np} = 80{,}68 \quad \sigma_u = 5{,}7357$

тоді

$M(Y_{np}) \in (64{,}52; 96{,}83)$ довірчий інтервал для математичного сподівання.

4.2. Зауваження до регресійних моделей і регресійного аналізу

Однофакторна лінійна модель – проста і найпростіша (графіком є пряма лінія в двухвимірному просторі): $y = a_0 + a_{n1}x$ **;**

Багатофакторна лінійна модель – складна (графіком є пряма лінія в багатовимірному просторі): $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$

Регресійні моделі будуються на базі статистичних спостережень. В залежності від якості даних статистичних спостережень регресійна модель може набувати трьох і навіть чотирьох негативних властивостей:

- ✓ Серійна кореляція
- ✓ Автокореляція
- ✓ Гетероскедастичність
- ✓ Мультиколінеарність

Якщо виявляється взаємний вплив однієї незалежної змінної на іншу, то ми в даному випадку стикаємося з явищем мультиколінеарності. В такому випадку модель переробляється і приймається спеціальний метод перевірки моделі.

Кореляція – це ступінь взаємозв'язку між фактором і відгуком (функцією).

$R = \sqrt{R^2}$

R – коефіцієнт кореляції.

R^2 – коефіцієнт детермінації.

Автокореляція і серійна кореляція показує, що існує істотний вплив попередніх головних значень факторів, де попередні дні, місяці,роки не наступні значення тих самих **факторів X** попередніх періодів впливають на самі **фактори X** тільки у наступний період. Відповідно спостерігається такий самий щільний вплив попередніх відгуків(у попередні моменти часу) на значення відгуків функції у наступний період.

Розглянемо класичну лінійну багатофакторну модель:

$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m + u$

Або в матричному вигляді: $y = x_a + u$

y – вектор-стовбець.

u – фактор невизначеності.

В економетричних або в будь-яких інших дослідженнях часто виникають ситуації, коли дисперсія залишків є сталою але спостерігається їх коваріація (теж саме, що й дисперсія, зворотня до кореляції, але дисперсія показує зв'язок між квадратом середніх значень одного фактору в різні моменти і середні значення квадратів цих факторів)

Кореляція – міра взаємозв'язку.

Коваріація: $G_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = Cov(u_1, u_1)$

Дисперсія – міра до відмінності.

Дисперсія X: $G_x^2 = \overline{x_i^2} - \overline{x_i}^2$

Дисперсія Y: $G_y^2 = \overline{y_i^2} - \overline{y_i}^2$

Існує тісний зв'язок між дисперсією, коваріацією і кореляцією:

Кореляція: $R = \frac{G_{xy}}{G_x \cdot G_y}$ $\quad G_x = \sqrt{G_x^2}$

Автокореляція – це явище, коли спостерігається коваріація залишків ($u_i = y_i - \hat{y_i}$) – це явище називають автокореляція.

Загалом автокореляція – це взаємозв'язок послідовних елементів часового або просторово часу даних.

Розрізняють поняття автокореляції і серійної кореляції:

Автокореляція – це коли існує залежність між значеннями однієї вибірки і запізненням на один лаг (тобто на один крок в статистичних спостереженнях). Виникає у зв'язку з інерційністю та циклічністю багатьох економічних та інших процесів, автокореляція може також бути наслідком помилкової специфікації (ідентифікації моделі).

Перша помилка – це неправильне визначення впливових факторів.

Друга помилка – це неправильне визначення математичної залежності. *Автокореляція залишків найчастіші спостерігається тоді, коли економетрічна модель будується на основі часових рядів.*

Правило: Якщо існує кореляція між послідовними значенням незалежної зміною тобто фактору, то спостерігатиметься і кореляція послідовних значінь залишків.

При автокореляції небажано розраховувати оцінки параметрів а регресії методом найменших квадратів, бо така оцінка неадекватна і не дозволяє використати критерії **T** та **F**.

Серійна кореляція – це коли існує залежність між значеннями вибірки **спостережень X або Y** із запізненням більше ніж на один лаг (один фактор, взаємодія його значень в різні моменти часу).

ЛЕКЦІЯ 5. СПРОЩЕННЯ І УСКЛАДНЕННЯ РЕГРЕСІЙНИХ (ЕКОНОМЕТРИЧНИХ) МОДЕЛЕЙ

5.1. Спрощення економетричних (регресійних) моделей.

Спрощення економетричних (регресійних) моделей необхідні у двох випадках:

1) **для зворотного спрощення і приведення до початкового вигляду** у випадку необхідності тимчасового перетворення складної нелінійної моделі в лінійну (парну або множинну регресію) задля регресійного аналізу створеної або загально визнаної складної моделі з метою визначення коефіцієнтів еластичності і перевірки критеріїв адекватності:

2) у випадку з'ясування **наявності такого відомого недоліку як мультиколінеарність** і необхідності позбавитися зайвих лінійно пов'язаних факторів.

Розглянемо деякі випадки **однофакторної нелінійної моделі**, які завдяки перетворенням зводяться до лінійної моделі:

1) регресія **$y=a/x+b$** (5.1)

заміною змінної величини **$1/x=z$** (5.2.)

зводиться до лінійної регресії **$e=az+b$**; (5.3.)

2) регресія **$y=a \ln x+ b$**

зводиться до лінійної регресії **$e=az+b$** заміною змінної величини **$\ln x=z$** ; (5.4.)

3) регресія **$y=ae^x+b$**

зводиться до лінійної регресії **$e=az+b$** заміною змінної величини **$e^x=z$**; (5.5)

4) регресія **$y=ax^{1/2}+b$**

зводиться до лінійної регресії **$e=az+b$** заміною змінної величини **$x^{1/2}=z$**. (5.6)

Серед **багатофакторних** регресійних моделей зустрічаються такі взаємозалежності між економічними показниками:

1) степенева - $e=a_0*x_1^{a1}*x_2^{a2}***x_m^{am}$; (5.7)

яка зводиться до лінійної моделі:$\mathrm{Ln}\, y= \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 +\ldots+ a_m \ln x_m$; (5.8)

2) гіперболічна - $y = a_0 + a_1/x_1 + a_2/x_2 +\ldots +a_m/ x_m$, (5.9)

яка зводиться до лінійної моделі:

$y= a_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots a_mz_m$, де $z_j = 1/x_j$, $j=1,2,\ldots,m$; (5.10)

3) квадратична - $y = a_0 + a_1x_1^2+a_2x_2^2 +\ldots+ a_1x_m^2$, (5.11)

яка зводиться до лінійної моделі: $y= a_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots a_mz_m$, заміною $Z_j = x_j^2$, $j=1,2,\ldots, m$.

5.2. Ускладнення економетричних (регресійних) моделей

Ускладнення економетричних (регресійних) моделей необхідні у двох випадках:

1) **у разі невиконання вимог адекватності** моделі ускладнення (збільшення кількості незалежних факторів або створення нелінійної моделі замість лінійної) підвищує її адекватність;

2) **у випадку необхідності тимчасового перетворення складної нелінійної моделі у лінійну** (парну або множинну регресію) задля регресійного аналізу створеної або загально визнаної складної моделі з метою визначення коефіцієнтів еластичності і перевірки критеріїв адекватності. Прикладом послідовного спрощення з наступним ускладненням є загально прийняті складні моделі Кобба-Дугласа і Лафера.

Приклад застосування і адаптації моделі Кобба-Дугласа

Згідно з даними спостережень про обсяг випущеної продукції P, обсяг затрат праці на виробництво продукції L і вартість виробничих фондів K, які наведені в табл.5.1, необхідно побудувати виробничу функцію на базі моделі Кобба-Дугласа $P = A\ L^{a1}\ F^{a2}$, (5.12)
адаптувати її до статистичних спостережень, тобто обчислити всі коефіцієнти моделі і провести оцінку її надійності - адекватності.

Таблиця 5.1

Статистичні спостереження економічних чинників і результуючої функції

i	P	L	F
Номер спостереження	Обсяг продукції, тис. грн.	Обсяг витрат праці, тис. люд./год.	Вартість виробничих фондів, тис. грн.
1	16.207	1.426	7.905
2	16.250	1.539	7.956
3	16.091	1.002	7.704
4	16.105	1.078	7.792
5	16.211	1.499	7.911
6	16.117	1.156	7.840
7	16.301	1.697	8.165
8	16.278	1.625	8.098
9	16.144	1.215	7.853
10	16.163	1.936	7.993
11	16.186	1.355	7.896

Виробничу функцію подамо степеневою аналітичною залежністю у вигляді моделі Кобба-Дугласа: $P = A\ L^{a1}\ F^{a2}$. (5.12)

Спростимо модель Кобба-Дугласа і приведемо її до лінійного вигляду. Для цього логарифмуючи співвідношення (5.12), зведемо нелінійну модель до лінійної:

$$\ln P = \ln A + a_1 \ln L + A_2 \ln F, \qquad (5.13)$$

або:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \qquad (5.14)$$

де: $y=\ln P;\ x_1 = \ln L;\ x_2 = \ln F;\ a_0 = \ln A.$

Необхідно в додатковій таблиці 5.2 представити результати обчислень натуральних логарифмів результуючої та факторних змінних:

Таблиця 5.2

Таблиця натуральних логарифмів від значень факторів X і відгуку Y

i	$Y=\ln P$	$x_1=\ln L$	$x_2=\ln F$
Номер спостереження	Логарифм від обсягу продукції	Логарифм від обсягу витрат праці	Логарифм від вартісті виробничих фондів
1	2,785443	0,354873	2,067495
2	2,788,93	0,431133	2,073926
3	2,778260	0,001998	2,041740
4	2,779130	0,075107	2,053098
5	2,785690	0,404798	2,068254
6	2,779875	0,144966	2,059239

7	2,791226	0,528862	2,099857
8	2,789815	0,485508	2,091617
9	2,781548	0,194744	2,060896
10	2,788893	0,66,624	2,078566
11	2,784147	0,303801	2,066356

Відповідно до методу найменших квадратів, знайдемо мінімум функції суми квадратів залишків:

$$S=\sum(Y_1 - A_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2 \rightarrow MIN \qquad (5.15)$$

***5.1. Перший спосіб** обчислення регресійних коефіцієнтів*

Прирівнявши частинні похідні (5.15) до нуля, отримаємо систему трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими: A_0, a_1, a_2:

$$\mathbf{nA_0 + a_1\sum x_{1i} + a_2\sum x_{2i} = \sum y_i;}$$
$$\mathbf{A_0\sum x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i} = \sum y_i x_{1i};}$$
$$\mathbf{A_0\sum x_{2i} + a_1\sum x_{1i}x_{2i} + a_2\sum x_{2i}^2 = \sum y_i x_{2i};} \qquad (5.16)$$

Підставимо значення й отримаємо систему трьох рівнянь:

$$\mathbf{11{,}00A_0 + 3{,}59a_1 + 22{,}76a_2 = 30{,}63;}$$
$$\mathbf{3{,}59A_0 + 1{,}58a_1 + 7{,}45a_2 = 10{,}00;}$$
$$\mathbf{22{,}76A_0 + 7{,}45a_1 + 47{,}10a_2 = 63{,}38}. \qquad (5.17)$$

Розв'язок системи має вигляд A_0=2,505; a_1=0,012; a_2=0,134. У результаті отримаємо **лінійне рівняння моделі**:

$$Y=2{,}505+0{,}012x_1 + 0{,}134x_2 . \qquad (5.18)$$

За допомогою функції "ЛИНЕЙН" обчислемо F-критерій: $F_{розрахункове}$=109,90. З таблиці F-розподілу дозволяємо для моделі похибку 5% -A_0=0,05; для кількості факторів m=2 і для степені вільності (n-m-1)=11-2-1=8 (n=11 – кількість статистичних спостережень) знаходимо Fтабл.=4,46.

Видно, що: $F_{розрахункове}$=109,90 > Fтабл.=4,46. Оскільки: $F_{розрахункове}$ значно перевищує Fтабл., то можна стверджувати, що побудована модель статично значима.

Залишається повернутися до початкового вигляду – складної нелінійної моделі Кобба-Дугласа. Для цього **необхідно зробити зворотне ускладнення** тимчасово отриманої проміжної розрахованої лінійної моделі.

Отже, враховуючи, що А=ЕА0=е2,505=12,238, виробнича функція після адаптації до статистичних спостережень матиме вигляд:

$$\mathbf{P = 12{,}238 * L^{0{,}012} * F^{0{,}134}} \qquad (5.19)$$

5.2. Другий спосіб **обчислення** – матричний – універсальний, для довільної кількості факторів і статистичних спостережень (дивись попередню лекцію "РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ"):

$$\mathbf{A = (X * X^{тр})^{-1} * X^{тр} * Y} \qquad (5.20)$$

5.3. Третій спосіб обчислення регресійних коефіцієнті.

У випадку 1-факторної моделі розрахунок ведеться третім способом:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy. \end{cases} \qquad (5.21)$$

де а – вільний коефіціент;
b - коефіціент при Х.

ЛЕКЦІЯ 6. НЕДОЛІКИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ
(необхідно визначати і враховувати при обчисленні коефіцієнтів та при перевірці на адекватність - мультиколінеарність, гетероскедастичність, авто- та серійна кореляція).

МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

Однією з чотирьох умов, які необхідні для оцінювання параметрів загальної лінійної моделі 1МНК, є умова (4.5), яка стосується матриці вихідних даних *X*. Ця матриця має розміри $n \times m$ і повинна мати ранг *m*, тобто серед пояснювальних змінних моделі не повинно бути лінійно залежних. Проте оскільки економічні показники, які входять до економетричної моделі як пояснювальні змінні, на практиці дуже часто пов'язані між собою, то це може стати перешкодою для оцінювання параметрів моделі 1МНК та істотно вплинути на якість економетричного моделювання.

Тому в економетричних дослідженнях вельми важливо з'ясувати, чи існують між пояснювальними змінними взаємозв'язки, які називають мультиколінеарністю.

Означення 6.1. ***Мультиколінеарність означає існування тісної лінійної залежності, або кореляції, між двома чи більше пояснювальними змінними.***

Вона негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або робить її побудову взагалі неможливою.

Так, мультиколінеарність пояснювальних змінних призводить до зміщення оцінок параметрів моделі, через що з їх допомогою не можна зробити коректні висновки про результати взаємозв'язку залежної і пояснювальних змінних. У крайньому разі, коли між пояснювальними змінними існує функціональний зв'язок, оцінити вплив цих змінних на залежну взагалі неможливо. Тоді для оцінювання параметрів моделі метод найменших квадратів не придатний, оскільки матриця $X'X$ буде виродженою.

Нехай зв'язок між пояснювальними змінними не функціональний, проте статистично істотний. Тоді попри те, що оцінити параметри методом найменших квадратів теоретично можливо, знайдена оцінка може призвести до таких помилкових значень параметрів, що сама модель стане беззмістовною.

Основні наслідки мультиколінеарності.

1. Падає точність оцінювання, яка виявляється так:
   а) помилки деяких конкретних оцінок стають занадто великими;
   б) ці помилки досить корельовані одна з одною;
   в) дисперсії оцінок параметрів різко збільшуються.
2. Оцінки параметрів деяких змінних моделі можуть бути незначущими через наявність їх взаємозв'язку з іншими змінними, а не тому, що вони не впливають на залежну змінну. У такому разі множина вибіркових даних не дає змоги цей вплив виявити.
3. Оцінки параметрів стають досить чутливими до обсягів сукупності спостережень. Збільшення сукупності спостережень іноді може спричинитися до істотних змін в оцінках параметрів.

З огляду на перелічені наслідки мультиколінеарності при побудові економетричної моделі потрібно мати інформацію про те, що між пояснювальними змінними не існує мультиколінеарності.

6.2. ОЗНАКИ МУЛЬТИКОЛІНЕАРНОСТІ

1. Коли серед парних коефіцієнтів кореляції пояснювальних змінних є такі, рівень яких наближається або дорівнює множинному коефіцієнту кореляції, то це означає можливість існування мультиколінеарності. Інформацію про парну залежність може дати симетрична матриця коефіцієнтів парної кореляції або кореляції нульового порядку між пояснювальними змінними:

$$r = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \cdots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \cdots & r_{x_2x_k} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} & \cdots & r_{x_3x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \cdots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Проте коли до моделі входять більш як дві пояснювальні змінні, то вивчення питання про мультиколінеарність не може обмежуватись інформацією, що її дає ця матриця. Явище мультиколінеарності в жодному разі не зводиться лише до існування парної кореляції між незалежними змінними.

Більш загальна перевірка передбачає знаходження визначника (детермінанта) матриці r, який називається детермінантом кореляції і позначається $|r|$. Числові значення детермінанта кореляції задовольняють умову: $|r| \in [0,1]$.

2. Якщо $|r| = 0$, то існує повна мультиколінеарність, а коли $|r| = 1$, мультиколінеарність відсутня. Чим ближче $|r|$ до нуля, тим певніше можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність. Незважаючи на те, що на числове значення $|r|$ впливає дисперсія пояснювальних змінних, цей показник можна вважати точковою мірою рівня мультиколінеарності.

3. Якщо в економетричній моделі знайдено мале значення параметра $\hat{a}_k$ при високому рівні частинного коефіцієнта детермінації R_j^2 і при цьому F-критерій істотно відрізняється від нуля, то це також свідчить про наявність мультиколінеарності.

4. Коли коефіцієнт частинної детермінації R_j^2, який обчислено для регресійних залежностей між однією пояснювальною змінною та іншими, має значення, яке близьке до одиниці, то можна говорити про наявність мультиколінеарності.

5. Нехай при побудові економетричної моделі на основі покрокової регресії введення нової пояснювальної змінної істотно змінює оцінку параметрів моделі при незначному підвищенні (або зниженні) коефіцієнтів кореляції чи детермінації. Тоді ця змінна перебуває, очевидно, у лінійній залежності від інших, які було введено до моделі раніше.

Усі ці ознаки мультиколінеарності мають один спільний недолік: ні одна з них чітко не розмежовує випадки, коли мультиколінеарність істотна і коли нею можна знехтувати.

6.3. АЛГОРИТМ ФАРРАРА - ГЛОБЕРА

Найповніше дослідити мультиколінеарність можна з допомогою алгоритму Фаррара — Глобера. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється мультиколінеарність всього масиву незалежних змінних (χ^2 - «хі» — квадрат); кожної незалежної змінної з рештою змінних (F-критерій); кожної пари незалежних змінних (t-критерій).

Усі ці критерії при порівнянні з їх критичними значеннями дають змогу робити конкретні висновки щодо наявності чи відсутності мультиколінеарності незалежних змінних.

Опишемо алгоритм Фаррара — Глобера.

Крок 1. Стандартизація (нормалізація) змінних.

Позначимо вектори незалежних змінних економетричної моделі через $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$. Елементи стандартизованих векторів обчислио за формулою:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}}, \tag{6.2}$$

де n — число спостережень $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

m — число пояснювальних змінних, $\left(k = \overline{1,m}\right)$;

$\bar{x}_k$ — середнє арифметичне k-ї пояснювальної змінної;

$\sigma_{x_k}^2$ — дисперсія k-ї пояснювальної змінної.

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці

$$r = X^{*\prime} X^*, \tag{6.3}$$

де X^* — матриця стандартизованих незалежних (пояснювальних) змінних, $X^{*\prime}$ — матриця, транспонована до матриці X^*.

Крок 3. Визначення критерію χ^2 («хі»-квадрат):

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right]\ln|r|, \tag{6.4}$$

де $|r|$ — визначник кореляційної матриці r.

Значення цього критерію порівнюється з табличним при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{табл}}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

Крок 4. Визначення оберненої матриці:

$$C = r^{-1} = \left(X^{*\prime} X\right)^{-1}. \tag{6.5}$$

Крок 5. Очислення F-критеріїв:

$$F_k = \left(c_{kk} - 1\right)\frac{n-m}{m-1}, \tag{6.6}$$

де c_{kk} — діагональні елементи матриці C. Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличними при $n - m$ і $m - 1$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо F_kфакт > Fтабл, то відповідна k-та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної

$$R^2_{x_k} = 1 - \frac{1}{c_{kk}}. \tag{6.7}$$

Крок 6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}}, \tag{6.8}$$

де c_{kj} — елемент матриці C, що міститься в k-му рядку і j-му стовпці; c_{kk} і c_{jj} — діагональні елементи матриці C.

Крок 7. Обчислення t-критеріїв:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r^2_{kj}}}. \tag{6.9}$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при $n-m$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо t_{kj}(ф) > t табл, то між незалежними змінними x_k і x_j існує мультиколінеарність.

Розглянемо застосування алгоритму Фаррара — Глобера для розв’язування конкретної задачі.

Приклад 6.1. На середньомісячну заробітну плату впливає ряд чинників. Вирізнимо серед них продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили. Щоб побудувати економетричну модель заробітної плати від згаданих чинників згідно з методом найменших квадратів, потрібно переконатися, що продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили як незалежні змінні моделі — не мультиколеніарні.

Вихідні дані наведені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

Дослідити наведені чинники на наявність мультиколеніарністі.

Розв’язання.

Крок 1. Нормалізація змінних.

Позначимо вектори незалежних змінних — продуктивності праці, фондомісткості, коефіцієнтів плинності робочої сили — через x_1, x_2, x_3. Елементи стандартизованих векторів обчислимо за формулою:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}},$$

де n — кількість спостережень, $n = 10$; m — число незалежних змінних, $m = 3$; $\bar{x}_k$ — середнє арифметичне значення вектора x_k; $\sigma_{x_k}^2$ — дисперсія змінної x_k.

Із формули бачимо, що спочатку потрібно обчислити середні арифметичні для кожної пояснювальної змінної:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i1}}{n} = \frac{287}{10} = 28{,}7;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i2}}{n} = \frac{5{,}86}{10} = 0{,}586;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i3}}{n} = \frac{139}{10} = 13{,}9.$$

Усі розрахункові дані для стандартизації змінних x_1, x_2, x_3 згідно з поданими співвідношеннями наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

$x_{i1}-\bar{x}_1$	$x_{i2}-\bar{x}_2$	$x_{i3}-\bar{x}_3$	$(x_{i1}-\bar{x}_1)^2$	$(x_{i2}-\bar{x}_2)^2$	$(x_{i3}-\bar{x}_3)^2$	x_{i1}^*	x_{i2}^*	x_{i3}^*
3,3	0,004	-3,4	10,89	0,000016	11,56	0,2487	0,0091	-0,2518
0,3	-0,156	1,6	0,09	0,024336	2,56	0,0226	-0,3531	0,1185
1,6	0,114	-0,4	1,89	0,012995	0,16	0,0980	0,2580	-0,0296
2,3	0,024	-4,4	5,29	0,000576	19,36	0,1733	0,0543	-0,3258
-3,7	-0,676	9,6	13,89	0,005776	92,16	-0,2788	-0,1720	0,7108
5,3	-0,078	-1,4	28,09	0,005776	1,96	0,3994	-0,1720	-0,1037
0,3	0,064	-3,6	0,09	0,004096	12,96	0,0226	0,1448	0,2666
-4,7	-0,156	0,6	22,09	0,024336	0,35	-0,3541	-0,3531	0,0444
-8,7	-0,076	0,6	75,89	0,005778	0,35	-0,6556	-0,1720	0,0444
4,3	0,334	-6,4	14,49	0,111555	40,95	0,3240	0,7559	-0,4739
Всього			176,1	0,19524	182,4			

Дисперсії кожної незалежної змінної мають такі значення:

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}{n} = \frac{176{,}1}{10} = 17{,}61;$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i2}-\bar{x}_2)^2}{n} = \frac{0{,}19524}{10} = 0{,}0195;$$

$$\sigma_{x_3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i3}-x_3)^2}{n} = \frac{182{,}4}{10} = 18{,}24.$$

Тоді знаменник для стандартизації кожної незалежної змінної буде такий:

$$x_1: \qquad \sqrt{n\sigma_{x_1}^2} = \sqrt{10 \cdot 19{,}57} = 13{,}27;$$

$$x_2: \qquad \sqrt{n\sigma_{x_2}^2} = \sqrt{10 \cdot 0{,}0217} = 0{,}44;$$

$$x_3: \qquad \sqrt{n\sigma_{x_3}^2} = \sqrt{10 \cdot 20{,}27} = 13{,}51.$$

Матриця стандартизованих змінних подається у вигляді:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,2487 & 0,0091 & -0,2518 \\ 0,0226 & -0,3531 & 0,1185 \\ 0,0980 & 0,2580 & -0,0296 \\ 0,1733 & 0,0543 & -0,3258 \\ -0,2788 & -0,1720 & 0,7108 \\ 0,3994 & -0,1720 & -0,1037 \\ 0,0226 & 0,1448 & 0,2666 \\ -0,3542 & -0,3531 & 0,0444 \\ -0,6556 & -0,1720 & 0,0444 \\ 0,3240 & 0,7559 & -0,4739 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці:

$$r = X^{*\prime} X^*,$$

де X^* — матриця, транспонована до X^*.

Ця матриця симетрична і має розмір 3 × 3.

Для даної задачі

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,494 & -0,551 \\ 0,494 & 1 & -0,5168 \\ -0,551 & -0,5168 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної незалежної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці. Зауважимо, що при знаходженні добутку матриць $X^{*\prime} X^*$ за рахунок зміщеності коефіцієнтів парної кореляції числові значення діагональних елементів можуть наближатись до одиниці. Якщо це так, то вони заміняються одиницями, а інші значення матриці r збільшуються на величину, що визначається як різниця між одиницею і діагональним елементом.

Інші елементи матриці r дорівнюють:

$r_{x_1x_2} = 0,494;$

$r_{x_1x_3} = -0,551;$

$r_{x_2x_3} = -0,5168,$

тобто вони є парними коефіцієнтами кореляції між пояснювальними змінними. Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити висновок, що між змінними x_1, x_2, x_3 існує зв'язок. Але чи можна стверджувати, що цей зв'язок є виявленням мультиколінеарності, а через це негативно впливатиме на оцінку економетричної моделі?

Щоб відповісти на це запитання, потрібно ще раз звернутися до алгоритму Фаррара — Глобера і знайти статистичні критерії оцінки мультиколінеарності.

Крок 3. Обчислимо детермінант кореляційної матриці r і критерій χ^2:

а) $D = |r| = 0,466;$

б) $\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right]\ln|r| = -\left[9 - \frac{1}{6}(6+5)\right]\ln 0,466 = 2,37.$

При ступені свободи $\frac{1}{2}m(m-1) = 3$ і рівні значущості $\alpha = 0,01$ критерій $\chi^2_{\text{табл}}$ = 11,34. Оскільки $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{табл}}$, доходимо висновку, що в масиві змінних не існує мультиколінеарності.

Крок 4. Знайдемо матрицю, обернену до матриці r:

$$C = r^{-1} = \left(X^{*\prime} X^*\right)^{-1};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1,57 & -0,45 & 0,63 \\ -0,45 & 1,49 & 0,52 \\ 0,63 & 0,52 & 1,62 \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Використовуючи діагональні елементи матриці C, обчислимо F-критерії:

$$F_1 = (c_{11} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (1,57 - 1)\frac{7}{2} = 2,00;$$

$$F_2 = (c_{22} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (1{,}49 - 1)\frac{7}{2} = 1{,}72;$$

$$F_3 = (c_{33} - 1)\frac{n-m}{m-1} = (1{,}62 - 1)\frac{7}{2} = 2{,}17.$$

Для рівня значущості α = 0,05 і ступенів свободи γ_1 = 7 і γ_2 = 2 критичне (табличне) значення критерію F = 4,74.

Оскільки

$$F_1\text{факт} < F\text{табл};$$
$$F_2\text{факт} < F\text{табл};$$
$$F_3\text{факт} < F\text{табл},$$

то ні одна з незалежних змінних не мультиколінеарна з двома іншими.

Щоб визначити наявність попарної мультиколінеарності, продовжимо дослідження і перейдемо до кроку 6.

Крок 6. Обчислимо частинні коефіцієнти кореляції, скориставшись елементами матриці C:

$$r_{12,3} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}} = \frac{0{,}49}{\sqrt{1{,}57 \cdot 1{,}49}} = 0{,}293;$$

$$r_{13,2} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{33}}} = \frac{-0{,}63}{\sqrt{1{,}57 \cdot 1{,}62}} = -\,0{,}397;$$

$$r_{23,1} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22} \cdot c_{33}}} = \frac{-0{,}52}{\sqrt{1{,}49 \cdot 1{,}62}} = -\,0{,}337.$$

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв’язку між двома змінними за умови, що третя не впливає на цей зв’язок.

Порівнявши частинні коефіцієнти кореляції з парними, які було наведено раніше, можна помітити, що частинні коефіцієнти значно менші за парні. Це ще раз показує, що на підставі парних коефіцієнтів кореляції не можна зробити висновків про наявність мультиколінеарності чи її відсутність.

Крок 7. Визначимо t-критерій на основі частинних коефіцієнтів кореляції.

$$t_{12} = \frac{r_{12,3}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r_{12,3}^2}} = \frac{0{,}293\sqrt{7}}{\sqrt{1 - 0{,}0858}} = 0{,}811;$$

$$t_{13} = \frac{r_{13,2}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r_{13,2}^2}} = \frac{0{,}39\sqrt{7}}{\sqrt{1 - 0{,}1521}} = 1{,}146;$$

$$t_{23} = \frac{r_{23,1}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r_{23,1}^2}} = \frac{0{,}34\sqrt{7}}{\sqrt{1 - 0{,}1156}} = 0{,}947.$$

Табличне значення t-критерію при $n - m = 7$ ступенях свободи і рівні значущості α = 0,05 дорівнює 1,69. Усі числові значення t-критеріїв, знайдених для кожної пари змінних, менші за їх табличні значення. Звідси робимо висновок, що всі пари незалежних змінних не є мультиколінеарними.

Отже, незважаючи на те, що між пояснювальними змінними досліджуваної моделі існує лінійна залежність, це не мультиколінеарність, тобто негативного впливу на кількісні оцінки параметрів економетричної моделі, не буде.

Якщо F-критерій більший за табличне значення, тобто коли k-та змінна залежить від усіх інших у масиві, то необхідно вирішувати питання про її вилучення з переліку змінних.

Якщо t_{kj} — критерій більший за табличний, то ці дві змінні (k і j) тісно пов’язані одною з одною. Звідси, аналізуючи рівень обох видів критеріїв F і t, можна зробити обгрунтований висновок про те, яку зі змінних необхідно вилучити з дослідження або замінити іншою. Проте заміна масиву незалежних змінних завжди має узгоджуватись з економічною доцільністю, що випливає з мети дослідження.

Найпростіше позбутися мультиколінеарності в економетричній моделі можна, відкинувши одну зі змінних мультиколінеарної пари. Але на практиці вилучення якогось чинника часто суперечить логіці економічних зв’язків. Тоді можна перетворити певним чином пояснювальні змінні моделі:

а) взяти відхилення від середньої;

б) замість абсолютних значень взяти відносні;

в) стандартизувати пояснювальні змінні

і т. ін.

За наявності мультиколінеарності змінних потрібно звертати увагу й на специфікацію моделі. Іноді заміна однієї функції іншою, якщо це не суперечить апріорній інформації, дає змогу уникнути явища мультиколінеарності.

Коли жодний з розглянутих способів не дає змоги позбутися мультиколінеарності, то параметри моделі слід оцінювати за методом головних компонентів.

6.4. МЕТОД ГОЛОВНИХ КОМПОНЕНТІВ

Цей метод призначений для оцінювання моделей великого розміру, а також для оцінки параметрів моделі, якщо до неї входять мультиколінеарні змінні.

Існують різні модифікації методу головних компонентів, які різняться між собою залежно від того, що береться за основу при визначенні ортогональних змінних — коваріаційна чи кореляційна матриця незалежних змінних.

Нехай маємо матрицю *X*, яка описує незалежні змінні моделі. Оскільки спостереження, що утворюють матрицю *X*, як правило, корельовані між собою, то можна поставити питання про кількість реально незалежних змінних, які входять до цієї матриці.

Точніше, ідея методу полягає в тому, щоб перетворити множину змінних *X* на нову множину попарно некорельованих змінних, серед яких перша відповідає максимально можливій дисперсії, а друга — максимально можливій дисперсії в підпросторі, який є ортогональним до першого, і т.д.

Нехай нова змінна запишеться:

$$Z_{1i} = a_{11}x_{1i} + a_{21}x_{2i} + ... + a_{m1}x_{mi}, \quad i = \overline{1,n}.$$

У матричній формі

$$Z_1 = Xa_1, \tag{6.10}$$

де Z_1 — вектор значень нової змінної; a_1 — *m*-вимірний власний вектор матриці $X'X$.

Суму квадратів елементів вектора подамо у вигляді:

$$Z_1' Z_1 = a_1' X' X a_1. \tag{6.11}$$

Звідси необхідно вибрати такий вектор a_1, який максимізуватиме $Z_1' Z_1$, але на вектор a_1 треба накласти обмеження, щоб він не став дуже великим. Тому ми його нормуємо, наклавши обмеження:

$$a' a_1 = 1. \tag{6.12}$$

Оскільки $Z_1 = Xa_1$, то максимізація a_1 буде максимізувати Z_1, а Z_1 характеризує вклад змінної Z_1 в загальну дисперсію.

Задача тепер полягає в тому, щоб максимізувати $Z_1' Z_1$ за умов (6.12). Побудуємо функцію Лагранжа:

$$f = a_1' X' X a_1 - \lambda_1 \left(a_1' a_1 - 1 \right) \to \max,$$

де λ_1 — множник Лагранжа.

Узявши $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$, дістанемо

$$\left(X' X \right) a_1 = \lambda_1 a_1. \tag{6.13}$$

Звідси бачимо, що a_1 — ***власний вектор матриці*** $X'X$***, який відповідає характеристичному числу*** λ_1**.**

Підставивши значення (6.13) у (6.11), дістанемо:

$$Z_1' Z_1 = \lambda_1 a_1' a_1 = \lambda_1. \tag{6.14}$$

Отже, потрібно для значення λ_1 вибрати найбільший характеристичний корінь матриці $X'X$. За відсутності мультиколінеарності матриця $X'X$ буде додатно визначеною і, відповідно, її характеристичні корені будуть додатними. Першим головним компонентом матриці X буде вектор Z_1.

Визначимо тепер $Z_2 = X \cdot a_2$. При цьому вектор a_2 має максимізувати вираз $a_2' X' X a_2$ за таких умов:

1) $a_2' a_2 = 1$;

2) $a_1' a_2 = 0.$

Друга умова забезпечить відсутність кореляції між Z_2 і Z_1, бо коваріація між Z_1 і Z_2 подається у вигляді $a' X' X a_2 = \lambda_1 a_1' a_2$, причому вона дорівнює нулю лише тоді, коли $a_1' a_2 = 0$.

Для розв'язування цієї задачі функцію Лагранжа запишемо у вигляді

$$\psi = a_2' X' X a_2 - \lambda_2 (a_2' a_2 - 1) - \mu (a_1' a_2),$$

де λ_2 і μ — множники Лагранжа.

Узявши $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2} = 0$ і $\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0$, дістанемо $(X'X) a_2 = \lambda_2 a_2$, де для значення λ_2 треба вибрати другий за величиною характеристичний корінь матриці $X'X$.

Цей процес триває доти, доки всі m характеристичних значень матриці $X'X$ не будуть знайдені; знайдені m власних векторів матриці $X'X$ об'єднаємо в ортогональну матрицю:

$$A = [a_1, a_2, ..., a_m].$$

Отже, головні компоненти матриці X задаються матрицею

$$Z = XA \tag{6.15}$$

розміром $n \times m$.

$$Z'Z = A'X'XA = \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Вираз (6.16) означає, що головні компоненти дійсно попарно некорельовані, а їх дисперсії визначаються так:

$$Z_j' Z_j = \lambda_j, \quad j = \overline{1, m}; \tag{6.17}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = tr(X'X) = Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2 + ... + Z_m' Z_m.$$

Співвідношення $\frac{\lambda_1}{\sum_j \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\sum_j \lambda_j} ... \frac{\lambda_m}{\sum_j \lambda_j}$ характеризують пропорційний внесок кожного з векторів у загальну варіацію змінних X, причому оскільки ці компоненти ортогональні, сума всіх внесків дорівнює одиниці.

Зауважимо, що ***вектори вихідних даних (матриця X) повинні мати однакові одиниці вимірювання, бо в противному разі дуже важко дати змістовне тлумачення поняттю загальної варіації змінних X і розкладанню цієї варіації на складові, виконаному відповідно до внеску кожного з векторів, якими подаються головні компоненти.***

Іноді буває важко надати конкретного змісту знайденим головним компонентам. Для цього можна обчислити коефіцієнти кореляції кожного компонента з різними змінними X. Так, наприклад, візьмемо перший головний компонент Z_1 і знайдемо коефіцієнти його кореляції її з усіма змінними X. Для цього потрібно обчислити перехресні добутки між головним компонентом Z_1 і кожною з пояснювальних змінних X. Оскільки

$$X' Z_1 = X' X a_1 = \lambda_1 a_1,$$

маємо коефіцієнти кореляції для першого компонента:

$$r_{j1} = \frac{\lambda_1 \cdot a_{j1}}{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} = \frac{a_{j1} \cdot \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}, \quad i = \overline{1, n}; \; j = \overline{1, m}. \tag{6.18}$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції між x_j і Z_k

$$r_{kj} = \frac{a_{kj} \cdot \sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} \quad (j, k = \overline{1, m}). \tag{6.19}$$

Частка різних головних компонентів в варіації x_j визначається показником r_{kj}^2, а оскільки компоненти не корелюють один з одним, то сума їх часток дорівнює одиниці.

Визначивши всі головні компоненти і відкинувши ті з них, які відповідають невеликим значенням характеристичних коренів, знаходимо зв'язок залежної змінної Y з основними головними компонентами, а далі з допомогою оберненого перетворення повертаємося від параметрів моделі з головними компонентами до знаходження оцінок параметрів змінних X.

Приклад 6.2. Нехай для п'яти змінних матриці X знайдено п'ять головних компонентів. Порівнявши їх значення, вибираємо лише два:

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{51}x_5; \\ Z_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{52}x_5. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Тоді модель, що характеризує зв'язок між Y, Z_1 і Z_2, має вигляд:

$$Y = b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \varepsilon. \tag{6.21}$$

Підставимо в (6.21) значення головних компонентів із (6.20):

$$\begin{aligned} Y &= b_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{51}x_5) + b_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{52}x_5) + \varepsilon = \\ &= (b_1a_{11} + b_2a_{12})x_1 + (b_1a_{21} + b_2a_{22})x_2 + \ldots + (b_1a_{51} + b_2a_{52})x_5 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.22}$$

У разі, коли було б збережено всі головні компоненти, коефіцієнти рівняння (6.22) були б такі самі, як коефіцієнти, знайдені на основі прямої регресії Y на всі змінні X.

Розглянемо, як обчислити параметри моделі з головними компонентами:

$$Y = ZB + \varepsilon; \qquad \hat{Y} = Z\hat{B}.$$

Звідси

$$\hat{B} = (Z'Z)^{-1}Z'Y. \tag{6.23}$$

Оскільки $Z'Z = E_{m-1}$, то, підставивши цей вираз у (6.23), дістанемо:

$$\hat{B} = Z'Y,$$

тобто

$$\hat{b}_1 = \sum_{i=1}^{n} z_{1i}y_i;$$

$$\hat{b}_2 = \sum_{i=1}^{n} z_{2i}y_i;$$

$$\hat{b}_3 = \sum_{i=1}^{n} z_{3i}y_i;$$

. . . .

$$\hat{b}_m = \sum_{i=1}^{n} z_{mi}y_i,$$

$\mathrm{var}(\hat{b}) = \sigma_u^2 (Z'Z)^{-1} = \sigma_u^2 E_{m-1}$, тому $\hat{b}$ нормально і незалежно розподілені навколо b.

Алгоритм головних компонентів

Крок 1. Нормалізація всіх пояснювальних змінних:

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \qquad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Крок 2. Обчислення кореляційної матриці

$$r = \frac{1}{n}\left(X^{*\prime}\, X^*\right).$$

Крок 3. Знаходження характеристичних чисел матриці r з рівняння

$$|r - \lambda E| = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

де E — одинична матриця розміром $m \times m$.

Крок 4. Власні значення λ_k упорядковуються за абсолютним рівнем вкладу кожного головного компонента до загальної дисперсії.

Крок 5. Обчислення власних векторів a_k розв'язуванням системи рівнянь

$$\left(r-\lambda E\right)a=0$$

за таких умов:

$$a'_j a_k=\begin{cases}0 \ (j\neq k),\\ 1 \ (j=k).\end{cases}$$

Крок 6. Знаходження головних компонентів — векторів

$$z_k=x\cdot a_k,\quad k=\overline{1,m}.$$

Головні компоненти мають задовольняти умови:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{k,i}=0,\quad i=\overline{1,n};$$

$$\frac{1}{n}z'_k z_k=\lambda_k,\quad k=\overline{1,m};$$

$$z'_j z_k=0,\quad j=\overline{1,m},\ j\neq k.$$

Крок 7. Визначення параметрів моделі $\hat{Y}=Z\hat{b}$:

$$\hat{b}=Z^{-1}Y.$$

Крок 8. Знаходження параметрів моделі $\hat{Y}=X\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta}=a\cdot\hat{b}.$$

ЛЕКЦІЯ 7. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

7.1. ПОНЯТТЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

Припущення, які були зроблені при оцінюванні параметрів моделі 1МНК, на практиці можуть порушуватися.

У розд. 6 було розглянуто проблеми мультиколінеарності, які пов'язані з порушенням умови оцінювання.

Тепер розглянемо особливості економетричного моделювання, коли порушується умова, згідно з якою припускається, що відхилення мають такий розподіл імовірностей, який зберігається для всіх спостережень. Тоді дисперсія залишків лишається незмінною для кожного спостереження.

Означення 7.1. ***Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, тобто $M(uu')=\sigma_u^2 E$, то ця її властивість називається гомоскедастичністю.***

Часто у практичних дослідженнях явище гомоскедастичності порушується. Випробування на наявність чи відсутність гомоскедастичності звичайно не практикується, але здебільшого можна висунути гіпотези про правдоподібність альтернативних припущень щодо пропорційності помилки до X. Так, наприклад, при побудові економетричної моделі, що характеризує залежність між заощадженнями і доходами населення на підставі теоретичної та практичної інформації, можна висунути гіпотезу, що дисперсія залишків за окремими групами населення змінюватиметься і буде пропорційною до середнього доходу цієї групи. Коли розглядати економетричну модель, що характеризує залежність між дивідендами і розміром прибутку або між витратами на харчування і доходом на одного члена сім'ї, витратами на харчування і загальними витратами, то також можна припустити, що дисперсія залишків для окремих груп спостережень змінюватиметься.

Означення 7.2. ***Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, тобто $M(uu')=\sigma_u^2 S$, то це явище називається гетероскедастичністю*.***

* Обидва терміни — гомоскедастичність і гетероскедастичність запропоновані російським вченим А.А.Чупровим (Див.: Основные проблемы теории корреляции. — 2-е изд. — М.: Госстатиздат, 1960, с. 39).

Якщо існує гетероскедастичність залишків, то це спричинюється до того, що оцінки параметрів моделі 1МНК будуть незміщеними, обгрунтованими, але неефективними. При цьому формулу для стандартної помилки оцінки, строго кажучи, застосувати не можна.

Припустимо, що дисперсія залишків для моделі $Y = a_0 + a_1 x + ux$ пропорційна до величини *X*. Тоді доцільно виконати перетворення вихідної інформації, поділивши, наприклад, усі змінні на *X*. Модель набере вигляду

$$\frac{y}{x} = a_0 \frac{1}{x} + a_1 + u \ \rightarrow\ \frac{y}{x} = a_1 + a_0 \frac{1}{x} + u\ .$$

У результаті для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК. Зауважимо, що параметри a_0 і a_1 помінялися ролями. Вільним членом моделі замість a_0 став параметр a_1.

Приклад 7.1. Побудуємо економетричну модель, що характеризує залежність між заощадженнями та доходом населення, млрд ф.ст. (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Заощадження	0,36	0,2	0,08	0,20	0,10	0,12	0,41	0,50	0,43
Дохід	8,8	9,4	10,0	10,6	11,0	11,9	12,7	13,5	14,3
Рік	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Заощадження	0,59	0,90	0,95	0,82	1,04	1,53	1,94	1,75	1,99
Дохід	15,5	16,7	17,7	18,6	19,7	21,1	22,8	23,9	25,2

Скориставшись оператором оцінювання 1МНК

$$A = \left(X'X\right)^{-1} X'Y,$$

дістанемо $\hat{a}_0 = -1{,}081;\ \hat{a}_1 = 0{,}1178.$

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{y} = -1{,}081 + 0{,}1178x\ .$$

Коефіцієнт детермінації $R^2 = \hat{a}_1 \sum xy \big/ \sum y^2$ для цієї моделі $R^2 = 0{,}918$, а це означає, що варіація заощаджень *Y* на 91,8% визначається варіацією доходів населення.

На перший погляд, результат наводить на думку, що специфікація моделі не містить помилки.

Але логічно висунути гіпотезу, що відхилення заощаджень від норми можуть бути пропорційними до доходу, тобто для цієї моделі дуже ймовірне існування гетероскедастичності залишків.

Отже, вихідну інформацію доцільно перетворити, поділивши обидві змінні на величину доходу *X* (табл. 7.2):

$$y' = y/x; \qquad x' = 1/x$$

Таблиця 7.2

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y'	0,041	0,022	0,008	0,019	0,009	0,010	0,032	0,037	0,030
x'	0,114	0,106	0,100	0,094	0,091	0,084	0,079	0,074	0,070
Рік	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y'	0,038	0,054	0,054	0,044	0,053	0,073	0,085	0,073	0,079
x'	0,065	0,060	0,056	0,054	0,051	0,047	0,044	0,042	0,040

Нове рівняння зв'язку згідно з даними табл.7.2 має вигляд

$$y' = -0{,}854 + 0{,}1026x'\ .$$

У результаті перетворення вихідних даних практично повністю змінилася специфікація моделі. Оскільки $x' = 1/x$, то цей зв'язок нелінійний. По-друге, $y' = y/x$ характеризує відносний показник — рівень заощаджень, який припадає на одиницю доходу.

Виконавши цю процедуру, дістанемо таке: спостереження з меншими значеннями x' мають відносно більшу питому вагу при оцінюванні параметрів моделі, ніж у першому варіанті.

З наведеного прикладу бачимо, що явище гетероскедастичності не впливатиме на оцінки параметрів 1МНК, якщо певним чином перетворити вихідну інформацію. При цьому якщо економетрична модель має лише дві змінні, то це можна зробити так, як у прикладі 7.1.

Це перетворення, значно ускладнюється, якщо будується економетрична модель з багатьма змінними. У такому разі потрібно з'ясувати зміст гіпотези, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 лишається невідомим параметром, а S — відома симетрична додатно визначена матриця.

7.2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

Можливість перевірки припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Розглянемо методи перевірки гетероскедастичності для різних вихідних даних.

7.2.1. Перевірка гетероскедастичності на основі критерію μ

Цей метод застосовується тоді, коли вихідна сукупність спостережень досить велика. Розглянемо відповідний алгоритм.

Крок 1. Вихідні дані залежної змінної *Y* розбиваються на *k* груп $\left(r = \overline{1,k}\right)$ відповідно до зміни рівня величини *Y*.

Крок 2. За кожною групою даних обчислюється сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir} - \bar{y}_r\right)^2.$$

Крок 3. Визначається сума квадратів відхилень в цілому по всій сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir} - \bar{y}_r\right)^2.$$

Крок 4. Обчислюється параметр α:

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{n/2},$$

де *n* — загальна сукупність спостережень; n_r — кількість спостережень *r*-ї групи.

Крок 7. Обчислюється критерій:

$$\mu = -\,2\ln\alpha,$$

який наближено відповідатиме розподілу χ^2 при ступені свободи $k-1$, коли дисперсія всіх спостережень однорідна. Тобто якщо значення μ не менше за табличне значення χ^2 при вибраному рівні довіри і ступені свободи $k-1$, то спостерігається гетероскедастичність.

Приклад 7.2. Для даних, які наведено в прикладі 7.1, перевіримо наявність гетероскедастичності згідно з критерієм μ.

Розв'язання.

Крок 1. Розіб'ємо дані, які наведені в табл. 7.1, на три групи, по шість спостережень у кожній.

Група I	Група II	Група III
0,36	0,41	0,82
0,20	0,50	1,04
0,08	0,43	1,53
0,20	0,59	1,94
0,10	0,90	1,75
0,12	0,95	1,99

Крок 2. Обчислимо суму квадратів відхилень індивідуальних значень кожної групи від свого середнього значення:

2.1. $\bar{Y}_{\mathrm{I}} = 0{,}1767;\ \bar{Y}_{\mathrm{II}} = 0{,}6300;\ \bar{Y}_{\mathrm{III}} = 1{,}5117.$

2.2. $S_1 = \sum_{i=1}^{6}(Y_{i\mathrm{I}} - \bar{Y}_{\mathrm{I}})^2 = 0{,}053133;$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{6}(Y_{i\text{II}} - \overline{Y}_{\text{II}})^2 = 0{,}2822;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{6}(Y_{i\text{III}} - \overline{Y}_{\text{III}})^2 = 1{,}170283.$$

Крок 3. Знайдемо суму квадратів відхилень за всіма трьома групами:

$$\sum_{r=1}^{3} S_r = S_1 + S_2 + S_3 = 0{,}05313 + 0{,}2822 + 1{,}1703 = 1{,}5056.$$

Крок 4. Обчислимо параметр

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{n/2} = 0{,}00265.$$

Крок 5. Знайдемо критерій

$$\mu = -2\ln\alpha = 11{,}848.$$

Цей критерій наближено задовольняє розподіл χ^2 з $k - 1 = 2$ ступенями свободи. Порівняємо значення критерію з табличним значенням критерію χ^2 з $k - 1 = 2$ ступенями свободи при рівні довіри 0,99 $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}21$. Оскільки $\mu > \chi^2_{\text{кр}}$, то дисперсія може змінюватись, тобто для даних табл. 7.1 спостерігається гетероскедастичність.

7.2.2. Параметричний тест Гольдфельда — Квандта

Коли сукупність спостережень невелика, то розглянутий метод не застосовний.

У такому разі Гольдфельд і Квандт запропонували розглянути випадок, коли $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних моделі:

$$Y = XA + u.$$

Для виявлення наявності гетероскедастичності згадані вчені склали параметричний тест, в якому потрібно виконати такі кроки.

Крок 1. Упорядкувати спостереження відповідно до величини елементів вектора X_j.

Крок 2. Відкинути c спостережень, які містяться в центрі вектора. Згідно з експериментальними розрахунками автори знайшли оптимальні співвідношення між параметрами c і n, де n — кількість елементів вектора x_j:

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15}.$$

Крок 3. Побудувати дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома утвореними сукупностями спостережень $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних m.

Крок 4. Знайти суму квадратів залишків за першою (1) і другою (2) моделями S_1 і S_2:

$S_1 = u_1'u_1$, де u_1 — залишки за моделлю (1);

$S_2 = u_2'u_2$, де u_2 — залишки за моделлю (2).

Крок 7. Обчислити критерій

$$R^* = \frac{S_2}{S_1},$$

який в разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F-розподілу з $(n-c-2m)/2$, $(n-c-2m)/2$ ступенями свободи. Це означає, що обчислене значення R^* порівнюється з табличним значенням F-критерію для ступенів свободи $(n-c-2m)/2$ і $(n-c-2m)/2$ і вибраного рівня довіри. Якщо $R^* \le F_{\textbf{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня.

Приклад 7.3. У табл. 7.3 наведено дані про загальні витрати та витрати на харчування. Для цих даних перевірити гіпотезу про відсутність гетероскедастичності.

Таблиця 7.3

Номер спостереження	Витрати на харчування	Загальні витрати	$\hat{Y}$	u	u^2

1	2,30	15	2,16	0,14	0,020
2	2,20	15	2,16	0,04	0,002
3	2,08	16	2,20	-0,12	0,015
4	2,20	17	2,25	-0,05	0,002
5	2,10	17	2,25	-0,15	0,022
6	2,32	18	2,29	0,26	0,0007
7	2,45	19	2,34	0,11	0,012
8	2,50	20			
9	2,20	20			
10	2,50	22			
11	3,10	64			
12	2,50	68	2,37	0,13	0,016
13	2,82	72	2,52	0,29	0,085
14	3,04	80	2,68	0,36	0,128
15	2,70	85	2,99	-0,29	0,084
16	3,94	90	3,18	0,76	0,573
17	3,10	95	3,38	-0,28	0,076
18	3,99	100	3,57	0,42	0,178

Розв'язання.

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — витрати на харчування, залежна змінна;

X — загальні витрати, незалежна змінна;

$$Y = f(X, u).$$

2. Для перевірки гіпотези про відсутність гетероскедастичності застосуємо параметричний тест Гольдфельда - Квандта.

2.1. Упорядкуємо значення незалежної змінної від меншого до більшого і відкинемо c значень, які містяться всередині впорядкованого ряду:

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15}, \; c \approx 4.$$

2.3. Визначимо залишки за цими двома моделями:

$$u_{\mathrm{I}} = Y_{\mathrm{I}} - \hat{Y}_{\mathrm{I}};$$

$$u_{\mathrm{II}} = Y_{\mathrm{II}} - \hat{Y}_{\mathrm{II}}.$$

Залишки та квадрати залишків наведено в табл. 7.3.

2.4. Обчислимо залишкові дисперсії та знайдемо їх співвідношення:

$$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1{,}14}{0{,}074} = 15{,}41.$$

2.5. Порівняємо критерій R^* з критичним значенням F-критерію при $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$ ступенях свободи і рівні довіри $P = 0{,}99$ $F_{\alpha = 0{,}01} = 11$. Оскільки $R^* > F_{кр}$, то вихідні дані мають гетероскедастичність.

7.2.3. Непараметричний тест Гольдфельда - Квандта

Гольдфельд і Квандт для оцінювання наявності гетероскедастичності запропонували також непараметричний тест. Цей тест базується на числі піків у величини залишків після упорядкування спостережень за x_{ij}.

Закономірність зміни залишків, коли дисперсія є однорідною, — явище гомоскедастичності ілюструє рис. 7.1, а на рис.7.2 спостерігається явище гетероскедастичності.

Цей тест, звичайно, не такий надійний, як параметричний, але він досить простий.

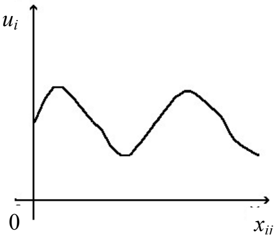


Рис. 7.1.

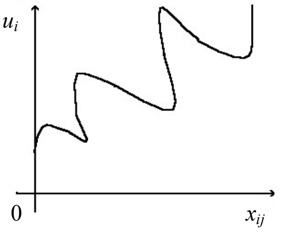


Рис. 7.2.

Зауважимо, що на рис.7.1 зображено, як змінюються залишки, що мають постійну дисперсію, а на рис.7.2 — залишки, дисперсія яких змінна для різних груп стостережень.

7.2.4. Тест Глейсера

Ще один тест для перевірки гетероскедастичності склав Глейсер. Він запропонував розглядати регресію абсолютних значень залишків $|u_i|$, що відповідають регресії найменших квадратів, як певну функцію від x_j, де x_j — та незалежна змінна, яка відповідає зміні дисперсії σ_u^2. Для цього використовуються такі види функцій:

1) $|u| = a_0 + a_1 x_j$;

2) $|u| = a_0 + a_1 x_j^{-1}$;

3) $|u| = a_0 + a_1 x_j^{1/2}$ і т.ін.

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на підставі статистичної значущості коефіцієнтів a_0 і a_1. Переваги цього тесту визначаються можливістю розрізняти випадок чистої і замішаної гетероскедастичності. Чистій гетероскедастичності відповідають значення параметрів $a_0 = 0,\ a_1 \neq 0$, а змішаній — $a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0$. Залежно від цього треба користуватись різними матрицями *S*. Нагадаємо, що $M(uu') = \sigma^2 S$.

Приклад 7.4. Нехай потрібно перевірити наявність гетероскедастичності при побудові економетричної моделі, яка описуватиме залежність між доходом і рівнем заощаджень. Вихідні дані наведено в табл.7.4.

Таблиця 7.4

Місяць	Дохід	Заощадження	Місяць	Дохід	Заощадження
1	10,8	2,36	10	17,5	2,59
2	11,4	2,20	11	18,7	2,90
3	12,0	2,08	12	19,7	2,95
4	12,6	2,20	13	20,6	2,82
5	13,0	2,10	14	21,7	3,04
6	13,9	2,12	15	23,1	3,53
7	14,7	2,41	16	24,8	3,44
8	15,5	2,50	17	25,9	3,75
9	16,3	2,43	18	27,2	3,99

Використаємо параметричний тест Гольдфельда — Квандта для встановлення гетероскедастичності при визначенні залежності між наведеними показниками.

Розв'язання. Ідентифікуємо змінні:

Y — заощадження — залежна змінна;

X — дохід — пояснювальна змінна, $Y = f(X)$.

Крок 1. Вихідна сукупність спостережень упорядковується відповідно до величини елементів вектора *X*, який може впливати на зміну величини дисперсії залишків. Оскільки в табл. 7.3 дані про дохід упорядковані, то переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Відкинемо *c* спостережень, які міститимуться в центрі векторів *X* і *Y*, де $c = \frac{4n}{15} = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4$, і поділимо сукупність спостережень на дві частини, кожна з яких містить $\frac{n-c}{2} = \frac{18-4}{2} = 7$ спостережень.

Крок 3. Побудуємо економетричну модель за першою сукупністю, яка включає спостереження від першого по сьомий місяць включно: $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$. Система нормальних рівнянь для визначення параметрів цієї моделі запишеться так:

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 88{,}4\hat{a}_1 = 15{,}47; \\ 88{,}4\hat{a}_0 + 1127{,}66\hat{a}_1 = 195{,}443. \end{cases}$$

Звідси $\hat{a}_0 = 2{,}1216;$

$\hat{a}_1 = 0{,}007.$

Економетрична модель має вигляд

I: $\hat{Y} = 2{,}1216 + 0{,}007X$.

Крок 4. Побудуємо економетричну модель виду $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за другою сукупністю спостережень, починаючи від дванадцятого по вісімнадцятий місяць.

Система нормальних рівнянь для визначення параметрів цієї моделі запишеться так:

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 163\hat{a}_1 = 24{,}02; \\ 163\hat{a}_0 + 3842{,}64\hat{a}_1 = 567{,}083. \end{cases}$$

Звідси $\hat{a}_0 = -0{,}408;$

$\hat{a}_1 = 0{,}165.$

Економетрична модель має вигляд:

II: $\hat{Y} = -0{,}408 + 0{,}165X$

Крок 5. Знайдемо розрахункові значення залежної змінної моделі $\hat{Y}$ — величини заощадження за кожною з двох моделей і визначимо відхилення фактичних значень заощаджень від розрахункових.

Таблиця 7.5

Місяць	***y***	$\hat{y}$	***u***	u^2
1	2,36	2,00	0,36	0,1296
2	2,20	2,06	0,14	0,0196
3	2,08	2,13	0,05	0,0025
4	2,20	2,19	0,01	0,0001
5	2,10	2,24	–0,14	0,0196
6	2,12	2,34	–0,22	0,0484
7	2,41	2,43	–0,02	0,0004
Разом				0,2202

Таблиця 7.6

Місяць	***y***	$\hat{y}$	***u***	u^2
2	2,95	2,99	–0,04	0,0016
3	2,82	3,09	0,27	0,0729
4	3,04	3,21	0,17	0,0289
5	3,53	3,37	0,16	0,0256
16	3,94	3,56	0,38	0,1444
17	3,75	3,68	0,07	0,0049
18	3,99	3,83	0,16	0,0256
Разом				0,3039

У табл.7.5 наведено результати обчислення суми квадратів залишків за першою моделлю $S_1 = 0{,}2202$.

У табл.7.6 наведено обчислення суми квадратів залишків за другою моделлю $S_2 = 0{,}3039$.

Крок 6. Обчислимо критерій R^*, який наближено відповідає F-розподілу:

$$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{0{,}3039}{0{,}2202} = 1{,}33.$$

Порівняємо його значення з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри $P = 0{,}99$ і ступенях свободи $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$. $F_{\text{табл}} = 11$. Звідси $R^* < F_{\text{табл}}$, що свідчить про відсутність гетероскедастичності.

7.3. ВИЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ *S*

Щоб оцінити параметри моделі, коли дисперсії залишків визначаються $M(uu') = \sigma_u^2 S$, потрібно визначити матрицю S.

Спинимось на визначенні матриці S.

Оскільки явище гетероскедастичності пов’язане лише з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця S має бути діагональною, а саме:

$$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Щоб пояснити, чому саме такий вигляд має ця матриця, потрібно ще раз наголосити: за наявності гетероскедастичності для певних вихідних даних одна (або кілька) пояснювальних змінних можуть різко змінюватись від одного спостереження до іншого, тоді як залежна змінна має такі самі коливання, як і для попередніх спостережень.

Але це означає, що дисперсія залишків, яка змінюватиметься від одного спостереження до іншого (чи для групи спостережень), може бути пропорційною до величини пояснювальної змінної X (або до її квадрата), яка зумовлює гетероскедастичність, або пропорційною до квадрата залишків.

Звідси в матриці S значення λ_i можна обчислити, користуючись гіпотезами:

а) $M(uu')=\sigma_u^2 x_{ij}$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснювальної змінної x_{ij};

б) $M(uu')=\sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто зміна дисперсії пропорційна до зміни квадрата пояснювальної змінної (x_{ij}^2);

в) $M(uu')=\sigma_u^2\{|u|\}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрата залишків за модулем.

Для першої гіпотези: $\lambda_i=\frac{1}{x_{ij}}$.

Для другої гіпотези: $\lambda_i=\frac{1}{x_{ij}^2}$.

Для третьої гіпотези: $\lambda_i=\{|u_i|\}^2$, або $\lambda_i=\left(a_0-a_1x_{ij}\right)^2$, або $\lambda_i=\left(a_0+a_1x_o^{-1}\right)^2$.

Оскільки матриця S — симетрична і додатно визначена, то при $S=P'P$, матриця P має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Приклад 7.5. Згідно з даними табл.7.3 треба побудувати матрицю S, яка використовується при визначенні дисперсій залишків $M(uu')=\sigma_u^2 S$, якщо побудова економетричної моделі пов'язана з явищем гетероскедастичності.

Скористаємося першою гіпотезою, згідно з якою $\lambda_i=\frac{1}{x_{ij}}$. Звідси для даних, які наведено в прикладі 7.3 (див. табл.7.3) $\lambda_i=\frac{1}{X_i}$, X_i — дохід в i-му місяці. Тоді матриця S^{-1} запишеться так:

$$S^{-1}=\left(\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
0.066667&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0.066667&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0.0625&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0.058824&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0.058824&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0.055556&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0.052632&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0.05&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0.05&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.045455&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.015625&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.014706&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.013889&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.0125&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.0118&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.0111&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.0105&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.01
\end{array}\right);$$

Стовпці (1–9) Стовпці (10 –18)

7.4. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МЕТОД ЕЙТКЕНА)

Економетрична модель, якій притаманна гетероскедастичність, є узагальненою моделлю, і для оцінювання її параметрів слід скористатися узагальненим методом найменших квадратів. Розглянемо цей метод.

Нехай задано економетричну модель

$$Y = XA + u, \tag{7.1}$$

коли $M(uu') = \sigma_u^2 S$.

Задача полягає в знаходженні оцінок елементів вектора A в моделі. Для цього використовується матриця S, за допомогою якої коригується вихідна інформація. Ця ідея була покладена в основу методу Ейткена.

Базуючись на особливостях матриць P і S, які були розглянуті в підрозд. 7.3, можна записати співвідношення між цими матрицями та оберненими до них.

Оскільки S — додатно визначена матриця, то вона може бути зображена як добуток PP' , де матриця P є невиродженою, тобто:

$$S = PP', \tag{7.2}$$

коли

$$P^{-1}SP^{-1'} = E; \tag{7.3}$$

і

$$P^{-1'}P^{-1} = S^{-1}. \tag{7.4}$$

Помноживши рівняння (7.1) ліворуч на матрицю P^{-1}, дістанемо:

$$P^{-1}Y = P^{-1}XA + P^{-1}u. \tag{7.5}$$

Позначимо $Y^* = P^{-1}Y$;

$$X^* = P^{-1}X;$$

$$u^* = P^{-1}u.$$

Тоді модель матиме вигляд:

$$Y^* = X^*A + u^*. \tag{7.6}$$

Використовуючи (7.3), неважко показати, що

$$M(u^*u^{*\prime}) = \sigma^2 E,$$

тобто модель (7.6) задовольняє умови (4.2), коли параметри моделі можна оцінити на основі 1МНК.

Звідси

$$\hat{A} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^* = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y. \tag{7.7}$$

Ця оцінка є незміщеною лінійною оцінкою вектора A, який має найменшу дисперсію і матрицю коваріацій

$$\operatorname{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2(X^{*\prime}X^*)^{-1} = \sigma_u^2(X'S^{-1}X)^{-1} \tag{7.8}$$

Незміщену оцінку для дисперсії σ_u^2 можна дістати так:

$$\frac{1}{n-m}(Y^* - X^*\hat{A})'(Y^* - X^*\hat{A}) = \frac{1}{n-m}(Y - X\hat{A})'S^{-1}(Y - X\hat{A}) = \\ = \frac{1}{n-m}u'S^{-1}u. \qquad (7.9)$$

Оцінка параметрів $\hat{A}$, яку знайдено за допомогою (7.7), є оцінкою узагальненого методу найменших квадратів (методу Ейткена).

При заданій матриці S оцінку параметрів моделі можна обчислити згідно із (7.7), а стандартну помилку — згідно із (7.8). Тому можна сконструювати звичайні критерії значущості і довірчі інтервали для параметрів $\hat{a}_j$.

Визначивши залишки $u = Y - X\hat{A}$ і помноживши ліворуч на матрицю P^{-1}, дістанемо:

$$P^{-1}u = P^{-1}Y - P^{-1}X\hat{A},$$

або $u^* = Y^* - X^*\hat{A}$.

Звідси $Y^* = X^*A + u^*$.

Тоді $Y^{*\prime}Y^* = (X^*\hat{A} + u^*)'(X^*\hat{A} + u^*)$.

Оскільки $\hat{A} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^* = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y$,

то $Y'S^{-1}Y = \hat{A}'X'S^{-1}Y + uS^{-1}u$ (7.10)

Отже, ми розбили загальну суму квадратів для (7.6) на суму квадратів регресії і залишкову. Згідно з цими даними дисперсійний аналіз буде виконано для перетворених вихідних даних. Крім того, коли незалежна змінна Y^* виміряна відносно початку відліку, а не у формі відхилення від середньої, то необхідно визначити її середнє значення і скористатись ним для корекції загальної суми квадратів і суми квадратів регресії.

Модель узагальненого методу найменших квадратів іноді специфікується у вигляді

$$Y = XA + u, \quad M(u) = 0, \quad M(uu') = V, \qquad (7.11)$$

де $V = \sigma_u^2 S$ — відома симетрична додатно визначена матриця. Тоді вираз для оцінки параметрів згідно з методом Ейткена запишеться так:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y, \qquad (7.12)$$

а для її коваріаційної матриці

$$\mathrm{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'V^{-1}X)^{-1}. \qquad (7.13)$$

Приклад 7.6. Використовуючи дані табл.7.3 (див. *приклад* 7.2), знайдемо оцінки параметрів моделі згідно з методом Ейткена.

Розв'язання. Оператор оцінювання методом Ейткена запишеться так:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Тому для того щоб знайти оцінку вектора $\hat{A}$, потрібно обчислити:

1) добуток матриць

$$X'S^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0667 & 0{,}0667 & 0{,}0625 & 0{,}0589 & 0{,}0589 & 0{,}0555 & 0{,}0526 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}0454 & 0{,}0156 & 0{,}0147 & 0{,}0139 & 0{,}0125 & 0{,}0118 & 0{,}0111 & 0{,}0105 & 0{,}01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) добуток матриць

$$X'S^{-1}X = \begin{pmatrix} 0{,}6672 & 18 \\ 18 & 833 \end{pmatrix};$$

3) матрицю, обернену до матриці ($X'S^{-1}X$):

$$\left(X'S^{-1}X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 11{,}585781 & -0{,}6529659 \\ -0{,}6529659 & 0{,}0399344 \end{pmatrix};$$

4) матрицю

$$X'S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1{,}5998 \\ 48{,}04 \end{pmatrix};$$

5) оцінку параметрів моделі

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}5934 & -0{,}07776 \\ -0{,}0776 & 0{,}0029 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5998 \\ 48{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0187 \\ 0{,}0141 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель витрат на харчування запишеться так:

$$\hat{Y} = 2{,}0187 + 0{,}0141X.$$

Приведемо економіко-математичний аналіз характеристик економетричної моделі.

1. Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}722$. Це означає, що на 72,2 % варіація витрат на харчування залежить від загальних витрат.

2. Коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2} = 0{,}85$ свідчить про досить тісний зв’язок між витратами на харчування та загальними витратами.

3. Залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0{,}083$ показує, що розрахункові значення витрат на харчування дуже близькі до фактичних.

4. Параметр моделі $\hat{a}_1$ свідчить про те, що збільшення загальних витрат на одиницю сприятиме граничному зростанню витрат на харчування на 0,014 одиниць.

5. Економетрична модель, параметри якої оцінені методом 1МНК, має вигляд

$$\hat{Y} = 1{,}999 + 0{,}0145X,$$

а залишкова дисперсія її $\sigma_u^2 = 0{,}097$. Звідси, порівнявши її характеристики з моделлю, параметри якої оцінені методом Ейткена, можна стверджувати, що в даному разі оцінки ефективніші.

7.5. ПРОГНОЗ

Коли параметри економетричної моделі оцінюються узагальненим методом найменших квадратів, проблема прогнозування потребує спеціального дослідження.

Нехай $Y = XA + u$, коли $M(u) = 0$, $M(uu') = V$, де $V = \sigma_u^2 S$.

Задача зводиться до того, щоб передбачити значення залежної змінної Y_0 для заданого вектора X_0. Можна записати

$$Y_0 = X_0 A + u_0, \tag{7.14}$$

де u_0 — невідоме значення відхилень у прогнозний період. Нехай для u_0

$$M(u_0) = 0 \text{ і } M(u_0 u_0') = \sigma^2 E, \tag{7.15}$$

а

$$M(u_0 u) = \begin{pmatrix} Mu_1 u_0 \\ Mu_2 u_0 \\ Mu_3 u_0 \\ \dots \\ Mu_n u_0 \end{pmatrix} = W, \tag{7.16}$$

де W — вектор коваріацій поточних і прогнозних значень залишків.

Сформулюємо лінійний прогноз:

$$p = c'Y, \tag{7.17}$$

де c — n-вимірний вектор, який має мінімізувати дисперсію прогнозу:

$$\sigma_p^2 = M\left\{(p - Y_0)^2\right\}. \tag{7.18}$$

Мінімальне значення дисперсії прогнозу досягається для $M(p - Y_0) = 0$.

Враховуючи (7.14) і (7.17), можна записати відхилення

$$p - Y_0 = c'Y - X_0 A - u_0 = c'(XA + u) - X_0 A - u_0 =$$
$$= c'XA + c'u - X_0 A - u_0 = (c'X - X_0)A + c'u - u_0.$$

З умови незміщеності прогнозу випливає, що вектор $\boldsymbol{c}$ повинен задовольняти рівність

$$c'X - X_0 = 0. \tag{7.19}$$

Тоді помилка прогнозу матиме вигляд:

$$p - Y_0 = c'u - u_0.$$

Оскільки $p - Y_0$ — скаляр, то дисперсія прогнозу:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= M\left\{(p - Y_0)^2\right\} = M\left\{(p - Y_0)(p - Y_0)'\right\} = \\ &= M\left\{(c'u - u_0)(c'u - u_0)'\right\} = M\left(c'uu'c - c'uu_0 - c'uu_0 + u_0^2\right) = \\ &= M\left(c'uu'c - 2c'uu_0 + u_0^2\right) = c'Vc + \sigma_0^2 - 2c'W. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Вірогідності прогнозу буде досягнуто тоді, коли дисперсія σ_p^2 стане мінімальною. Тому формулюємо задачу:

мінімізувати $\sigma_p^2 = c'Vc + \sigma_0^2 - 2c'W$ (7.21)

за умови незміщеності прогнозу:

$$c'X - X_0 = 0.$$

Щоб розв'язати задачу (7.21), будуємо функцію Лагранжа

$$f = c'Vc - 2c'W - 2(c'X - X_0)\lambda,$$

де λ — (m – 1)-вимірний вектор, компонентами якого є множники Лагранжа. Продиференціювавши функцію за невідомими параметрами c і λ і прирівнявши похідні до нуля, дістанемо рівняння

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ -\hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} W \\ X_0' \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши їх, знайдемо $\hat{c}$:

$$\hat{c} = V^{-1}\left[E - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]W + V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X_0'.$$

Підставимо це значення в (7.13) і визначимо найкращий лінійний незміщений прогноз

$$\hat{p} = X_0\hat{A} + W'V^{-1}(Y - XA).$$

Оскільки $\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$,

то $\hat{p} = X_0\hat{A} + W'V^{-1}u,$ (7.22)

де $u = (Y - XA)$ — вектор залишків, який відповідає оцінці параметрів моделі на основі 1МНК.

Отже, для прогнозу можна використовувати співвідношення (7.22). Цей прогноз має дві особливості:

1) вектор прогнозних значень X_0 перемножується на вектор оцінок $\hat{A}$, обчислений згідно з узагальненим методом найменших квадратів;

2) для оцінювання невідомих прогнозних залишків u_0 застосовується матриця V, яка містить інформацію про взаємозалежність залишків базисного періоду.

7.6. КОРОТКІ ВИСНОВКИ

1. Якщо дисперсія залишків лишається сталою для кожного спостереження, тобто $M(uu') = \sigma_u^2 E$, то це явище називається гомоскедастичністю, причому воно є однією з чотирьох необхідних умов для застосування 1МНК при оцінюванні параметрів моделі.

2. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень, тобто $M(uu') = \sigma^2 S$, то це явище називається гетероскедастичністю, і воно спричинюється до того, що оцінки параметрів моделі 1МНК будуть незміщеними, обгрунтованими, але неефективними.

3. За наявності гетероскедастичності в простій економетричній моделі, тобто $Y = a_0 + a_1X + uX$, щоб оцінити параметри 1МНК, достатньо ліву і праву частини моделі поділити на X, що практично змінює специфікацію моделі.

Коли будується економетрична модель з багатьма змінними, таке перетворення значно ускладнюється. Тому необхідно перевіряти гіпотезу, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де S — відома симетрична додатно визначена матриця, а σ_u^2 — невідомий параметр.

4. Перевірка припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Для перевірки наявності гетероскедастичності використовуються чотири методи.

4.1. Критерій μ.

4.2. Параметричний тест Гольдфельда — Квандта.

4.3. Непараметричний тест Гольдфельда — Квандта.

4.4. Тест Глейсера.

5. Алгоритм для знаходження критерію μ складається з п'яти кроків:

5.1. Вихідні дані залежної змінної Y розбиваються на k груп $\left(r=\overline{1,k}\right)$ згідно зі зміною рівня величини Y.

5.2. За кожною групою спостережень обчислюється сума квадратів відхилень:

$$S_r=\sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir}-\bar{y}_r\right)^2.$$

5.3. Відшукується сума квадратів відхилень у цілому за всією сукупністю спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k}S_r=\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir}-\bar{y}_r\right)^2.$$

5.4. Обчислюється параметр α:

$$\alpha=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2}\Bigg/\left(\frac{\sum_{r=1}^{k}S_r}{n}\right)^{n/2},$$

де n — кількість спостережень у цілому; n_r — кількість спостережень r-ї групи.

5.5. Обчислюється критерій μ:

$$\mu=-2\ln\alpha,$$

який наближено відповідатиме розподілу χ^2. Якщо значення μ менше за табличне значення χ^2 при вибраному рівні довіри і ступені свободи $k-1$, то гетероскедастичність відсутня.

6. Параметричний тест Гольдфельда — Квандта складається з п’яти кроків.

6.1. Спостереження (вихідні дані) впорядковуються відповідно до величини елементів вектора X_j, який може викликати зміну дисперсії залишків.

6.2. Відкидається c спостережень, які містяться всередині векторів вихідних даних, де

$$\frac{c}{n}=\frac{4}{15}.$$

6.3. Будуються дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома створеними сукупностями спостережень $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних m.

6.4. Обчислюється сума квадратів залишків за першою S_1 та другою S_2 моделями:

$$S_1=u_1'u_1,$$

де u_1 — залишки за моделлю (1);

$$S_2=u_2'u_2,$$

де u_2 — залишки за моделлю (2).

6.5. Відшукується критерій $R^*=\dfrac{S_2}{S_1}$, який в разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F-розподілу з $\gamma_1=(n-c-2m)/2$, $\gamma_2=(n-c-2m)/2$ ступенями свободи.

Обчислене значення критерію порівнюється з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри і відповідних ступенях свободи. Якщо $R^*\le F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня.

7. Непараметричний тест Гольдфельда - Квандта базується на числі піків величини залишків після упорядкування спостережень за X_{ij}. Якщо для всіх значень змінної X_{ij} залишки розподіляються приблизно однаково, то дисперсія їх однорідна, у противному разі вона змінюється.

8. Тест Глейсера для перевірки гетероскедастичності базується на побудові регресійної функції, що характеризує залежність величини залишків за модулем від пояснювальної змінної X_j, яка може викликати зміну дисперсії залишків.

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на підставі значущості коефіцієнтів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. Перевага цього методу полягає в тому, що він дає змогу розрізняти випадок чистої і змішаної гетероскедастичності. Чистій гетероскедастичності відповідають значення параметрів $\hat{a}_0=0$, $\hat{a}_1\neq 0$, а змішаній $\hat{a}_0\neq 0$, $\hat{a}_1\neq 0$.

9. Оскільки явище гетероскедастичності пов’язане лише з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця S у співвідношенні $M(uu') = \sigma_u^2 S$ має бути додатно визначеною і діагональною:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

10. У цій матриці значення λ_i можна обчислити трьома способами, залежно від того, яку гіпотезу висунуто відносно зміни дисперсій залишків:

а) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}$, $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}$;

б) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2}$;

в) $M(uu') = \sigma_u^2 \{|u|\}^2$, $\lambda_i = \{|u_i|\}^2$.

11. За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів моделі доцільно застосувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена), оператор оцінювання якого має вигляд

$$\hat{A} = (X'S^{-1} X'S^{-1}Y.$$

Вектор $\hat{A}$ у такому разі містить незміщену лінійну оцінку параметрів моделі, яка має найменшу дисперсію і матрицю коваріацій

$$\operatorname{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'S^{-1}X)^{-1}.$$

12. Оператор узагальненого методу найменших квадратів іноді специфікується у вигляді

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y,$$

де $V = \sigma_u^2 S$, а $\operatorname{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'V^{-1}X)^{-1}$.

13. Коли параметри моделі оцінюються за методом Ейткена, то загальна сума квадратів залежної змінної розбивається на суму квадратів регресії і суму квадратів залишків:

$$Y'S^{-1}Y = \hat{A}'X'S^{-1}Y + uS^{-1}u.$$

Відповідно дисперсії такі:

σ_y^2: $\frac{1}{n-1} Y'S^{-1}Y$;

σ^2: $\frac{1}{m-1} \hat{A}'X'S^{-1}Y$;

σ_u^2: $\frac{1}{n-m} u'S^{-1}u$.

Зауважимо, що в цих співвідношеннях вектор залежної змінної Y розглядається як відхилення від середньої.

14. Найкращий лінійний незміщений прогноз за моделлю, оцінки якої знайдені за методом Ейткена, визначатиметься зі співвідношення

$$\hat{p} = X_0 \hat{A} + W' V^{-1} u.$$

Величина $W' V^{-1} u$ визначає залишки прогнозного періоду — u_0 і може тлумачитися як помилка прогнозу на підставі моделі $\hat{Y} = X_0 \hat{A}$.

7.7. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення гомоскедастичності і гетероскедастичності.

2. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?

3. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.

4. Як перевіряється гетероскедастичність згідно з критерієм μ*?*

5. Як застосовується параметричний тест для визначення гетероскедастичності?

6. У чому сутність непараметричного тесту?

7. Як визначається гетероскедастичність з допомогою регресії залишків?

8. Опишіть методи формування матриці S в умові $M(uu') = \sigma^2 S$.

9. Як використовується матриця S в методі Ейткена?

10. Які властивості повинна мати матриця S ?

11. Запишіть формулу обчислення матриці коваріацій параметрів моделі. Чим вона відрізняється від формули при застосуванні 1МНК?

12. Як дістати незміщену оцінку дисперсії залишків за наявності гетероскедастичності?

13. Запишіть оператор оцінювання параметрів моделі за методом Ейткена.

14. Як виконується прогноз за методом Ейткена?

15. Сформулюйте матрицю S^{-1}*, якщо діагональна матриця*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_5} \end{pmatrix}$$

додатно визначена.

16. Коли умова $M(uu') = \sigma^2 S$, *де* $\{x_j\}$=*{15, 17, 20, 22, 25, 30, 35}, то як обчислити параметри* λ_i *?*

17. Нехай для моделі $Y = XA + u$ *відомі залишки* $u = Y - XA$ *:*

$$u = (3,\ -2,\ -1,\ -0{,}5,\ 0{,}3,\ 0{,}2,\ 4,\ -2,\ -1,\ -0{,}7).$$

Визначіть незміщену оцінку дисперсії залишків, враховуючи результат попереднього завдання.

18. Використавши дисперсію залишків, визначіть матрицю коваріацій параметрів, якщо матриця

$$(X' S^{-1} X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}01 & -0{,}15 \\ -0{,}01 & 0{,}12 & -0{,}10 \\ -0{,}15 & -0{,}10 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

19. Використовуючи дані завдань 17 і 18, визначити точковий та інтервальний прогнози залежної змінної, якщо пояснювальна змінна дорівнює 10.

7.8. Основні терміни і поняття

Гомоскедастичність
Гетероскедастичність
Параметричний тест Гольдфельда - Квандта
Непараметричний тест Гольдфельда - Квандта
Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена)
Дисперсія залишків
Матриця коваріацій параметрів
Незміщена оцінка
Критерій μ
Додатно визначена матриця
Вектор коваріацій
Помилка прогнозу
Функція Лагранжа
Тест Глейсера

ЛЕКЦІЯ 8. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

8.1. ПРИЧИНИ ВИНИКНЕННЯ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ В ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЯХ

8.1.1. Поняття автокореляції

Означення 8.1. ***Автокореляція — це взаємозв'язок послідовних елементів часового чи просторового ряду даних***.

В економетричних моделях особливе значення має автокореляція залишків. Звернемось знову до другої необхідної умови лінійної моделі:

$$M(uu') = \sigma_u^2 E.$$

Це означає, що коваріації між залишками економетричної моделі відсутні, а дисперсія є сталою для всіх спостережень. Ці умови були названі в розд. 7 ***явищем гомоскедастичності.*** У цьому самому розділі було показано, що за відсутності коваріації залишків дисперсія може змінюватися для груп спостережень чи для кожного спостереження. Ці умови були названі ***явищем гетероскедастичності.***

В економетричних дослідженнях часто виникають і такі ситуації, коли дисперсія залишків стала, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають ***автокореляцією залишків.***

Автокореляція залишків найчастіше спостерігається тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної, то спостерігатиметься і кореляція послідовних значень залишків.

Автокореляція може бути також наслідком помилкової специфікації економетричної моделі. Крім того, наявність автокореляції залишків може означати, що необхідно ввести до моделі нову незалежну змінну.

У загальному випадку ми вводимо до моделі лише деякі з істотних змінних, а вплив змінних, які виключені з моделі, має позначитися на зміні залишків. Існування кореляції між послідовними значеннями виключеної з розгляду змінної не обов'язково має тягти за собою відповідну кореляцію залишків, бо вплив різних змінних може взаємно погашатися. Якщо кореляція послідовних значень виключених з моделі змінних спостерігається, то загроза виникнення автокореляції залишків стає реальністю.

Проілюструємо проблему автокореляції залишків на прикладі економетричної моделі з двома змінними. Нехай

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t\,, \tag{8.1}$$

де ми припускаємо, що залишки u_t задовольняють схему авторегресії першого порядку, тобто залежать тільки від залишків попереднього періоду:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{8.2}$$

для якої $|\rho| < 1$, а ε_t мають такі властивості:

$$M(\varepsilon_t) = 0;$$

$$\begin{cases} M(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = \sigma_s^2, & s = 0; \\ M(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Величина ρ характеризує рівень взаємозв'язку кожного наступного значення з попереднім, тобто коваріацію залишків.

Специфікація моделі (8.1) на відміну від моделей, які розглядались у розд. 7, має індекс *t*, що свідчить про її динамічний характер, тобто *t* — період часу, для якого будується така модель на основі динамічних (часових) рядів вихідних даних.

Розглянемо залишки моделі u_t, враховуючи (8.2):

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t = \rho(\rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \ldots =$$
$$= \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

Звідси

$$u_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r \varepsilon_{t-r}\,. \tag{8.3}$$

Оскільки $M(\varepsilon_t) = 0$, то $M(u_t) = 0$.

$$M(u_t^2) = M(\varepsilon_t^2) + \rho^2 M(\varepsilon_{t-1}^2) + \rho^4 M(\varepsilon_{t-2}^2) + \ldots.$$

Ураховуючи, що послідовні значення ε_t незалежні, запишемо

$$M(u_t^2) = (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots)\sigma_\varepsilon^2.$$

Тоді

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}. \quad (8.4)$$

Коваріація послідовних значень залишків запишеться у вигляді

$$M(u_t u_{t-1}) = \rho\sigma_u^2, \qquad M(u_t u_{t-2}) = \rho^2\sigma_u^2,$$

і в загальному випадку

$$M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2, \quad (8.5)$$

тобто для моделі (8.1) не задовольняється гіпотеза про незалежність послідовних значень залишків.

Вираз (8.5) можна записати так:

$$\frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2} = \rho^s. \quad (8.6)$$

Це означає, що за наявності автокореляції залишків друга необхідна умова подається у вигляді:

$$M(u\,u') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів автокореляції s-го порядку для ряду u_t, або

$$M(uu') = V,$$

тобто

$$M(u\,u') = V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Порівнявши матрицю, яку маємо в даному разі, з матрицею за наявності гетероскедастичності, побачимо, що вони істотно відрізняються одна від одної. Це пов'язано з тим, як порушується друга умова для застосування методу 1МНК при явищі гетероскедастичності та автокореляції.

Отже, ***для гетероскедастичних залишків, розглянутих у розд. 7, існує одна форма порушення стандартної гіпотези, згідно з якою*** $M(uu') = \sigma_u^2 S$, ***для автокореляційних залишків ми стикаємося з другою формою порушення цієї гіпотези.***

8.1.2. Наслідки автокореляції залишків

Якщо знехтувати автокореляцією залишків і оцінити параметри моделі 1МНК, то дійдемо таких **трьох наслідків.**

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути невиправдано великими.

2. Оскільки вибіркові дисперсії обчислюються не за уточненими формулами, то статистичні критерії t- і F-статистики, які знайдено для лінійної моделі, практично не можуть бути використані в дисперсійному аналізі.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить, як правило, до неефективних прогнозів, тобто прогнозів з дуже великою вибірковою дисперсією.

За відсутності автокореляції залишків матриця коваріацій для вектора оцінок $\hat{A}$ така:

$$\operatorname{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = S_{(\hat{A})}^2 \quad (8.8)$$

Припустимо, що незалежні змінні і залишки можна подати у вигляді стаціонарних марковських процесів першого порядку, тобто:

$$\begin{aligned} x_t &= \lambda x_{t-1} + v_t, \quad |\lambda| < 1; \\ u_t &= \rho u_{t-1} + w_t, \quad |\rho| < 1. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Якщо коефіцієнти λ і ρ додатні, то говорять про додатну автокореляцію. Від'ємна автокореляція в економетричних моделях спостерігається дуже рідко.

Помилки v_t і w_t взаємно незалежні і їх автокореляційні матриці діагональні. Тоді можна показати, що звичайний метод найменших квадратів дає нам при достатньо великому *n* таку оцінку дисперсії параметрів $\hat{A}$:

$$\operatorname{var}(\hat{A}) = S^2_{(\hat{A})} \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}. \tag{8.10}$$

Із (8.10) бачимо, що зміщення дисперсії параметрів тим більше, чим більші значення λ і ρ (більша автокореляція). Нехай λ = ρ = 0,5, тоді величина зміщення $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{5}{3}$. Цей множник і буде загубленим при використанні 1МНК, що призводить до заниження дисперсії порівняно з її справжнім значенням приблизно на 40%. При збільшенні λ і ρ, наприклад, ρ = λ = 0,8, зміщення буде $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{1+0{,}64}{1-0{,}64} = \frac{1{,}64}{0{,}36} = 4{,}5$, тобто істинне значення дисперсії у чотири з половиною рази перевищуватиме те, яке дістали при застосуванні 1МНК.

Якщо додатна автокореляція спостерігається і в залишках, і в незалежній змінній, то 1МНК дає зміщення і для залишкової дисперсії. Припустивши, як і раніше, що x_t і u_t підлягають однаковій схемі авторегресії, знайдемо:

$$M(u\,u') = \sigma_u^2 \left[n - \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} \right]. \tag{8.11}$$

Якщо ρ = λ = 0,5 і *n* = 20, то $M(uu') = \frac{18{,}3}{19}\sigma_u^2$, тобто недооцінка дисперсії залишків становить близько 4 %, а при ρ = λ = 0,8; *n* = 20 ця недооцінка дорівнюватиме приблизно 20 %.

Отже, при застосуванні 1МНК вибіркові дисперсії будуть заниженими. Навіть після коригування оцінок вибіркових дисперсій на величину зміщення не можна бути впевненим у коректності рівнів значущості для *t*- і *F*-статистик, оскільки наявність автокореляції залишків означає, що величина $\frac{e'e}{\sigma^2}$ може не розподілятися за законом χ^2 і не буде незалежною від $\hat{A} - A$.

8.2. ПЕРЕВІРКА НАЯВНОСТІ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ

8.2.1. Критерій Дарбіна — Уотсона

Для перевірки наявності автокореляції залишків найчастіше застосовується критерій Дарбіна — Уотсона (*DW*):

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \tag{8.12}$$

Він може набувати значеннь з проміжку [0, 4]: $DW \in [0{,}4]$.

Якщо залишки u_t є випадковими величинами, нормально розподіленими, а не автокорельованими, то значення *DW* містяться поблизу 2. При додатній автокореляції *DW* < 2, при від'ємній — *DW* > 2. Фактичні значення критерію порівнюються з критичними (табличними) при різному числі спостережень *n* і числі незалежних змінних *m* для вибраного рівня значущості α. Табличні значення мають нижню межу DW_1 і верхню — DW_2.

Коли *DW*факт < DW_1, то залишки мають автокореляцію. Якщо *DW*факт > DW_2, то приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. Коли $DW_1 < DW < DW_2$, то конкретних висновків зробити не можна: необхідно далі провадити дослідження, беручи більшу сукупність спостережень. Зауважимо, що цей критерій призначений для малих вибіркових сукупностей.

Вибірковий розподіл значень критерію Дарбіна — Уотсона залежить від емпіричних спостережень пояснювальних змінних і навіть якщо взяти до уваги цю обставину, можна стверджувати: параметр ρ для генеральної сукупності має тісний зв'язок з критерієм *DW*. Якщо ρ = 1, то значення *DW* = 0, при ρ = 0 *DW* = 2 і при ρ = –1 значення критерію *DW* = 4. Наведені співвідношення показують, що існують області, в яких застосування критерію Дарбіна — Уотсона не може дати певних результатів, про що вже було сказано. Верхні та нижні межі критерію DW визначають межі цієї області для різних розмірів вибірки, заданого числа пояснювальних змінних та певного рівня значущості.

Приклад 8.1. Нехай обсяг вибірки складається з 20 спостережень. На основі цієї вибірки побудовано модель, яка включає три пояснювальні змінні. Наведено табличні значення критерію Дарбіна — Уотсона DW_1 і DW_2 для 1 %- і 5 %-го рівня значущості:

	DW_1	DW_2
$\alpha_1 = 1\ \%$	0,77	1,41
$\alpha_2 = 5\ \%$	1,00	1,68

Для додатної автокореляції залишків ці значення є межами п’яти інтервалів, на основі яких можна прийти до таких висновків:

1) $0 \le DW \le 0{,}77$ — нульова гіпотеза відхиляється як при 1 %-му, так і на 5%-му рівнях значущості;

2) $0{,}77 \le DW \le 1{,}00$ — нульова гіпотеза відхиляється при 5 %-му рівні значущості; для 1 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

3) $1{,}00 \le DW \le 1{,}41$ — критерій не дає певних результатів як при одному, так і при іншому рівні значущості;

4) $1{,}41 \le DW \le 1{,}68$ — нульова гіпотеза не відхиляється при 1 %-му рівні значущості, для 5 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

5) $1{,}68 \le DW \le 2{,}00$ — нульова гіпотеза не відхиляється при обох рівнях значущості.

Дж. Джонстон [3]наводить ряд спостережень, які свідчать про те, що верхня межа DW_2 ближча до істинної межі прийняття гіпотези, яка перевіряється. Тому якщо виникають сумніви, можна обмежитись одним показником — DW_2. Це означає, що сам критерій також може мати зміщення, він указує на наявність серійної кореляції першого порядку і там, де її не повинно бути. Дж. Джонстон зауважує, що оскільки наслідок некоректного прийняття нульової гіпотези може бути набагато серйознішим, ніж наслідок її некоректного відхилення, тому в сумнівних випадках нульову гіпотезу, як правило, краще відхилити. Якщо оцінка критерію DW перевищує 2, то при перевірці нульової гіпотези можна як альтернативну використовувати гіпотезу про існування від’ємної автокореляції першого порядку; у такому разі необхідно відняти відповідні значення від 4 і скористатись тими самими табличними значеннями DW.

8.2.2. Критерій фон Неймана

Для виявлення автокореляції залишків використовується також критерій фон Неймана:

$$Q = \frac{\dfrac{\sum\limits_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{n-1}}{\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n}u_t^2}{n}}. \tag{8.13}$$

Звідси $Q = DW\dfrac{n}{n-1}$. При $n \to \infty$ $Q = DW$. Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і заданого числа спостережень. Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція.

8.2.3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції

Цей коефіцієнт виражає ступінь взаємозв’язку залишків кожного наступного значення з попереднім, а саме:

І ряд — $u_1, u_2, u_3 ... u_{n-1}$;

ІІ ряд — $u_2, u_3, u_4 ... u_n$.

Він обчислюється за формулою:

$$r^* = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}(u_t u_{t-1}) - \dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{t=1}^{n}u_t)(\sum\limits_{t=2}^{n}u_{t-1})}{\sqrt{\left[\sum\limits_{t=1}^{n}u_t^2 - \dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{t=1}^{n}u_t)^2\right]\left[\sum\limits_{t=2}^{n}u_{t-1}^2 - \dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{t=2}^{n}u_{t-1})^2\right]}} \tag{8.14}$$

Коефіцієнт r^* може набувати значень в інтервалі (–1;+1). Від’ємні значення його свідчать про від’ємну автокореляцію, додатні — про додатну. Значення, що містяться в деякій критичній області біля нуля, свідчать про відсутність автокореляції, тобто стверджують нульову гіпотезу про відсутність автокореляції залишків. Оскільки ймовірнісний розподіл r^* встановити трудно, то на практиці замість r^* обчислюють циклічний коефіцієнт автокореляції r^0.

8.2.4. Циклічний коефіцієнт автокореляції

Він виражає ступінь взаємозв'язку рядів:

І ряд — $u_1, u_2, u_3 ... u_{n-1}, u_n$;

ІІ ряд — $u_2, u_3, u_4, ..., u_n, u_1$.

Циклічний коефіцієнт обчислюється за формулою:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n} u_t)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n} u_t)^2} \tag{8.15}$$

Для досить довгих рядів вплив циклічних членів на величину коефіцієнта r^0 незначний, тому можна вважати, що ймовірнісний розподіл r^* наближається до розподілу r. Якщо останній член ряду дорівнює першому, тобто $u_1 = u_n$, то нециклічний коефіцієнт автокореляції дорівнює циклічному. Очевидно, що коли залишки не містять тренду, то припущення про рівність $u_1 = u_n$ недалеке від реальності і циклічний коефіцієнт автокореляції наближається до нециклічного.

Фактично обчислене значення циклічного коефіцієнта автокореляції порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і довжини ряду *n*. Якщо $r_{\text{факт}} \geq r_{\text{табл}}$, то існує автокореляція. Припускаючи, що $\sum_{t=1}^{n} u_t \approx \sum_{t=2}^{n} u_{t-1} \approx 0$, циклічний коефіцієнт автокореляції можна записати у вигляді

$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \tag{8.16}$$

На практиці часто замість (8.16) обчислюють

$$r = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \tag{8.17}$$

8.3. ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ З АВТОКОРЕЛЬОВАНИМИ ЗАЛИШКАМИ

8.3.1. Метод Ейткена

Нехай в економетричній моделі

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t,$$
$$u_t = \hat{\rho}\, u_t + \varepsilon_t,$$

де ε_t — нормально розподілені випадкові залишки. Тоді, щоб усунути автокореляцію залишків u_t, треба перетворити основну модель так, щоб вона мала залишки ε_t. Оскільки $\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$, то для такого перетворення треба записати модель для попереднього періоду

$$y_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1} + u_{t-1},$$

помножити ліву і праву частину її на $\hat{\rho}$ та відняти від моделі для періоду *t*.

У результаті дістанемо таку економетричну модель:

$$y_t - \hat{\rho}\, y_{t-1} = a_0(1 - \hat{\rho}) + a_1(x_t - \hat{\rho}\, x_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho}\, u_{t-1})$$

Звідси очевидно, що коли вихідні дані перетворені, а саме $y_t - \hat{\rho}\, y_{t-1}$, $x_t - \quad -\hat{\rho}\, x_{t-1}$, то для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК. Причому для перетворення можна використати перші різниці $y_t - y_{t-1}$ і $x_t - x_{t-1}$, коли $\hat{\rho}$ наближається до одиниці. Якщо $\hat{\rho}$ близьке до нуля, то справджується обернене твердження. Зауважимо, що коли $\hat{\rho} = 1$, у перетвореній моделі відсутній вільний член (як виняток може бути ситуація, коли вихідна модель містить лінійний часовий тренд). Якщо залишки вихідної моделі характеризувались додатною автокореляцією, використання перших різниць спричинюється до від'ємної автокореляції.

Параметр ρ наближено можна знайти на основі залишків, якщо обчислити циклічний коефіцієнт кореляції r. На практиці, як правило, $\rho \approx r$, але r коригується на величину зміщення.

Усі ці міркування покладені в основу методів оцінки параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Для оцінювання параметрів економетричної моделі, що має автокореляцію залишків, можна застосувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена), який базується на скоригованій вихідній інформації з урахуванням коваріації залишків.

У розд. 7 було розглянуто метод Ейткена і доведено, що система рівнянь для оцінки параметрів моделі на основі методу Ейткена запишеться так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y, \tag{8.18}$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y, \tag{8.19}$$

$\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів економетричної моделі;

X — матриця незалежних змінних;

X' — матриця, транспонована до матриці X;

S^{-1} — матриця, обернена до матриці кореляції залишків;

V^{-1} — матриця, обернена до матриці V, де $V = \sigma_u^2 S$, а σ_u^2 — залишкова дисперсія;

Y — вектор залежних змінних.

Звідси

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y,$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y.$$

Отже, щоб оцінити параметри моделі на основі методу Ейткена, треба сформувати матрицю S або V.

Матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

У цій симетричній матриці ρ^s виражає коефіцієнт автокореляції s-го порядку для залишків u_t. Очевидно, що коефіцієнт автокореляції нульового порядку дорівнює 1.

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матриця, обернена до матриці S, матиме такий вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

Таку матрицю іноді пропонується використовувати при оцінюванні параметрів моделі з автокорельованими залишками за методом Ейткена.

Покажемо, як використовується циклічний коефіцієнт кореляції для обчислення ρ.

$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2},$$

або

$$r' = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2},$$

де u_t — величина залишків у період t; u_{t-1} — величина залишків у період $t-1$; n — число спостережень.

Якщо $n \to \infty$, то $r = r'$.

Зауважимо, що параметр r (або r') має зміщення. Тому, використовуючи такий параметр для формування матриці S, необхідно скоригувати його на величину зміщення

$$r'_{\text{скор}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} + \frac{m+1}{n},$$

де $\frac{m+1}{n}$ — величина зміщення (m — кількість незалежних змінних), або

$$r'_{\text{скор}} = r' + \frac{r+\lambda}{(n-1) - \frac{1+r\lambda}{1-r\lambda}}.$$

Матриця $V = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 — залишкова дисперсія, що визначається за формулою

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m-1} u'u,$$

де u' — вектор, транспонований до вектора залишків u; $n - m - 1$ — число ступенів свободи.

Дисперсія залишків з урахуванням зміщення обчислюється так:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m-1} u'u \left[n - \frac{1+\lambda\rho}{1-\lambda\rho} \right].$$

Величину λ можна обчислити методом 1МНК з допомогою авторегресійного рівняння $x_t = \lambda\, x_{t-1} + \varepsilon_t$. У такому разі

$$\lambda = \frac{\sum_{i=2}^{n} x_t x_{t-1}}{\sum_{i=2}^{n} x_{t-1}^2},$$

де x_t взято як відхилення від свого середнього значення.

При реалізації алгоритму Ейткена для оцінки параметрів моделі застосовують такі п’ять кроків.

Крок 1. Оцінка параметрів моделі за методом 1МНК.

Крок 2. Дослідження залишків на наявність автокореляції.

Крок 3. Формування матриці коваріації залишків V або S.

Крок 4. Обернення матриці V або S.

Крок 5. Оцінка параметрів методом Ейткена, тобто згідно з (8.18), (8.19).

Приклад 8.1. З допомогою двох взаємопов’язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Вихідні дані наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздріб-ний товаро-обіг	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Дохід	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Розв’язання.

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y_t — роздрібний товарообіг у період t, залежна змінна;

X_t — дохід у період t, пояснювальна змінна;

звідси

$$Y_t = f(X_t,\ u_t),$$

де u_t — стохастична складова, залишки.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t\,;$$

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t\,;$$

$$u_t = Y_t - \hat{Y}_t\,.$$

3. Визначимо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ за методом найменших квадратів, припускаючи що залишки u_t не корельовані:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

де X' — матриця, транспонована до X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27{,}1 \\ 1 & 28{,}2 \\ 1 & 29{,}3 \\ 1 & 31{,}3 \\ 1 & 34{,}0 \\ 1 & 36{,}0 \\ 1 & 38{,}7 \\ 1 & 43{,}7 \\ 1 & 50{,}0 \\ 1 & 52{,}1 \end{pmatrix};$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 370{,}4 \\ 370{,}4 & 14441{,}62 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}0002 & -0{,}513 \\ -0{,}513 & 0{,}0014 \end{pmatrix};$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 322{,}1 \\ 12555{,}09 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0{,}597 & 0{,}416 \\ 0{,}416 & 0{,}348 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 196{,}400 \\ 252{,}222 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}3 \\ 6{,}1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0{,}172;$$

$$\hat{a}_1 = 0{,}865.$$

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{Y}_t = 0{,}172 + 0{,}865X_t\,.$$

4. Знайдемо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі $\hat{Y}_t = 0{,}172 + 0{,}865X_t$ і визначимо залишки u_t (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

ік	t	$\hat{Y}_t$	t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	4,0	3,612	0,388	0,150	-	-	-
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	-0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	27,245	-0,245	0,060	-0,430	0,1848	-0,045
5	8,8	9,581	0,779	0,609	-0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	-0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	-0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	-0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	-0,020	0,0002	-0,149	0,0222	-0,003
10	45,5	45,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	-0,005
	22,1			**1,4152**		**1,1550**	**0,7276**

Знайдемо оцінку критерію Дарбіна - Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}u_t^2} = \frac{1{,}155}{1{,}4152} = 0{,}816.$$

Порівняємо значення критерію DW з табличним для $\alpha = 0{,}05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$DW_1 = 0{,}879$ — нижня межа;

$DW_2 = 1{,}320$ — верхня межа.

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити згідно з критерієм фон Неймана.

Критерій фон Неймана $Q = \frac{10}{10-1} DW = 0{,}906$. Це значення порівнюється з табличним; $Q_{\text{табл}} = 1{,}18$ при $n = 10$ і рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Оскільки $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція залишків.

6. Використаємо метод Ейткена для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками. Оператор оцінювання запишеться так:

$$\hat{A} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y,$$

або

$$\hat{A} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y.$$

де S^{-1} — матриця, обернена до матриці S; V^{-1} — матриця, обернена до матриці V.

Матриця S — матриця коваріацій залишків, яка має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \sigma_u^2 S.$$

7. Щоб сформувати матрицю S або V, необхідно визначити величину ρ, яка характеризує взаємозв'язок між послідовними членами ряду залишків. Нехай залишки описуються автокореляційною моделлю першого степеня $u_t = \rho u_t + \varepsilon_t$,

$$\rho \approx r = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} + \frac{m+1}{n} = \frac{10}{9} \frac{0{,}7276}{1{,}4156} + \frac{2}{10} = 0{,}77.$$

Отже, матриця S матиме вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 & 0{,}125 & 0{,}097 \\ 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 & 0{,}125 \\ 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 \\ 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 \\ 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 \\ 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 \\ 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 \\ 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 \\ 0{,}125 & 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 \\ 0{,}097 & 0{,}125 & 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $(X^T S^{-1}) = \begin{pmatrix} 0{,}565 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}565 \\ 13{,}204 & 3{,}640 & 2{,}069 & 2{,}708 & -5{,}722 & 3{,}314 & 0{,}616 & 3{,}165 & 14{,}453 & 33{,}412 \end{pmatrix}$;

2) $(X^T S^{-1} X) = \begin{pmatrix} 28{,}56 & 47{,}26 \\ 52{,}53 & 51{,}13 \end{pmatrix}$;

3) $(X^T S^{-1} X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}08 & 0{,}07 \\ 0{,}07 & -0{,}07 \end{pmatrix}$;

4) $(X^T S^{-1} Y) = \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix}$;

5) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}9815 & -0{,}0924 \\ -0{,}0924 & 0{,}0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}442 \\ 0{,}861 \end{pmatrix}$;

$$\hat{a}_0 = 0{,}442;\ \hat{a}_1 = 0{,}861.$$

Отже, економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y}_t = 0{,}442 + 0{,}861 X_t. \qquad (1)$$

8. Знайдемо розрахункові значення $\hat{Y}_t$ на основі побудованої економетричної моделі та визначимо залишки (табл. 8.3).

Таблиця 8.3

Рік	Y_t	$\hat{Y}_t^*$	v_t	v_t^2	$v_t - v_{t-1}$	$(v_t - v_{t-1})^2$	$v_t v_{t-1}$
1	24,0	23,784	0,216	0,0468	-	-	-
2	25,0	24,731	0,269	0,0724	0,0526	0,0028	0,0528
3	25,7	25,678	0,022	0,0005	-0,2774	0,0612	0,0058
4	27,0	27,401	-0,401	0,1608	-0,4226	0,1786	-0,0086
5	28,8	29,727	-0,927	0,8586	-0,5255	0,2762	0,3716
6	30,8	31,449	-0,649	0,4215	0,2774	0,0769	0,6016
5	33,8	33,775	0,025	0,0006	0,6745	0,4549	-0,0164
8	38,1	38,081	0,019	0,0004	-0,0066	0,00004	0,0005
9	43,4	43,508	-0,108	0,0116	-0,1262	0,0159	0,0020
10	45,5	45,316	0,184	0,0937	0,2912	0,0848	0,9908
				1,6069		**1,1514**	**0,9908**

9. Обчислимо критерій Дарбіна — Уотсона і фон Неймана:

$$DW = \frac{1{,}1514}{1{,}6069} = 0{,}716.$$

Порівнявши його з критичним значенням при $n = 10$ і $\alpha = 0{,}05$, коли $DW_{факт} < DW_1$, доходимо висновку, що ми не звільнились від автокореляції залишків. Це означає, що вихідна гіпотеза, коли залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку, не виконується. Якщо залишки описуються авторегресійною схемою вищого порядку, то доцільно виконати оцінку параметрів моделі методом Кочрена — Оркатта або Дарбіна, які будуть розглянуті далі.

10. Визначаємо оцінку параметрів моделі, скориставшись оберненою матрицею S^{-1}, яка має вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставивши $\rho = 0{,}77$, дістанемо:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}2{,}469 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938\end{pmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів моделі:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}3{,}9815 & -0{,}0924\\ -0{,}0924 & 0{,}0024\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}71{,}8148\\ 3089{,}991\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}442\\ 0{,}861\end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{a}_0=0{,}442$; $\hat{a}_1=0{,}861$, і економетрична модель подається у вигляді

$$\hat{Y}_t=0{,}442+0{,}861X_t. \qquad (2)$$

Порівнявши обидві економетричні моделі (1) і (2), побачимо, що при оцінюванні параметрів методом Ейткена доцільніше користуватись матрицею, коли коваріація залишків для $S>2$ відсутня. У такому разі побудова моделі спрощується, а точність оцінок не зменшується.

8.3.2. Метод перетворення вихідної інформації

Випадок, коли залишки задовольняють авторегресійну модель першого порядку, допускає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації при застосуванні для цього параметра ρ;

2) застосування 1МНК для оцінки параметрів на основі перетворених даних.

Для цього треба знайти матрицю перетворення T, щоб модель

$$TY=TXA+Tu \qquad (8.23)$$

мала скалярну дисперсійну матрицю

$$M(Tuu'T')=\sigma_u^2E.$$

Розглянемо матрицю T_1 розміром $n\times n$:

$$T_1=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} \qquad (8.24)$$

Безпосереднім множенням легко переконатись, що

$$M(T_1uu'T_1')=\sigma_u^2E.$$

А це означає, що можна застосувати 1МНК до перетворених даних T_1Y і T_1X, які мають вигляд

$$T_1Y=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\rho^2}\,y_1\\ y_2-\rho y_1\\ y_3-\rho y_2\\ y_4-\rho y_3\\ \ldots\\ y_n-\rho y_{n-1}\end{pmatrix};$$

$$T_1X=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2}\,x_1^1 & \ldots & \sqrt{1-\rho^2}\,x_1^m\\ 1-\rho & x_2^1-\rho x_1^1 & \ldots & x_2^m-\rho x_1^m\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1-\rho & x_n^1-\rho x_n^1 & \ldots & x_n^m-\rho x_n^m\end{pmatrix}.$$

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1)\times n$, яка отримується з матриці T_2 внаслідок викреслювання першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко показати, що застосування 1МНК до даних T_1Y і T_1X дає таку саму оцінку параметрів моделі, як і метод Ейткена, а для даних T_2Y і T_2X — забезпечує порівняно добру апроксимацію.

У загальному випадку, коли ми не маємо інформації ні про порядок авторегресійної моделі, ні про значення параметрів у ній, а через це не можемо застосувати ні метод Ейткена, ні метод перетворення вихідної інформації, в економетричній літературі пропонуються наближені методи Кочрена — Оркатта і Дарбіна.

Приклад 8.3. Згідно з даними, які наведено в табл. 8.1 (приклад 8.2), необхідно оцінити параметри економетричної моделі, яка має автокорельовані залишки, методом перетворення вихідної інформації.

Роз'язання.

1. Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вихідних даних:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перетворимо змінні Y_t, X_t на основі матриці T_1:

$$T_1Y_t = \begin{pmatrix} 15{,}27 \\ 6{,}49 \\ 6{,}42 \\ 7{,}18 \\ 7{,}97 \\ 8{,}58 \\ 10{,}04 \\ 12{,}03 \\ 14{,}01 \\ 12{,}02 \end{pmatrix}; \quad T_1X_t = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 17{,}25 \\ 0{,}23 & 7{,}30 \\ 0{,}23 & 7{,}55 \\ 0{,}23 & 8{,}70 \\ 0{,}23 & 9{,}86 \\ 0{,}23 & 9{,}77 \\ 0{,}23 & 10{,}93 \\ 0{,}23 & 13{,}85 \\ 0{,}23 & 16{,}29 \\ 0{,}23 & 13{,}53 \end{pmatrix}.$$

3. Для перетворених даних скористаємося оператором 1МНК:

$$\hat{A} = (X'\,X)^{-1}X'Y \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = (X*'\,X*)^{-1}X*'\,Y*.$$

Позначимо $T_1Y_t = Y*$, $T_1X_t = X*$. Тоді маємо

3.1. $X*'\,X* = \begin{pmatrix} 0{,}8756 & 33{,}3368 \\ 33{,}3368 & 1436{,}007 \end{pmatrix}.$

3.2. $X*'\,Y* = \begin{pmatrix} 29{,}1003 \\ 1251{,}584 \end{pmatrix}.$

3.3. $(X*'\,X)^{-1} = \begin{pmatrix} 9{,}8299 & -0{,}2282 \\ -0{,}2282 & 0{,}006 \end{pmatrix}.$

3.4. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}9815 & -0{,}0924 \\ -0{,}0924 & 0{,}0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}442 \\ 0{,}861 \end{pmatrix}.$

Звідси $\hat{a}_0 = 0{,}442;$ $\hat{a}_1 = 0{,}861;$ економетрична модель:

$$\hat{Y}_t = 0{,}442 + 0{,}861X_t. \qquad (3)$$

Оцінки параметрів моделі, які визначені згідно з методом перетворення вихідної інформації, не відрізняються від оцінок, здобутих методом Ейткена при різних матрицях коваріацій залишків. Це означає, що обидва методи є альтернативними, коли залишки — стаціонарні марковські процеси.

Дещо відрізняються одна від одної оцінки параметрів моделі, якщо для перетворенння вихідних даних використовується матриця T_2. Так, вектор оцінок

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0{,}862 & 0{,}884 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\hat{a}_0 = -0{,}862$; $\hat{a}_1 = 0{,}884$; економетрична модель:

$$\hat{Y}_t = -0{,}862 + 0{,}884 X_t. \tag{4}$$

8.3.3. Метод Кочрена — Оркатта

Нехай задано економетричну модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t, \quad t = \overline{1,n}; \tag{8.25}$$

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$.

Перетворивши вихідну інформацію за допомогою ρ, дістанемо:

$$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t. \tag{8.26}$$

У цій моделі залишки ε_t мають скалярну дисперсійну матрицю.

Сума квадратів залишків на основі (8.26) визначатиметься співвідношенням

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1-\rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1}) \right]^2. \tag{8.27}$$

Безпосередня мінімізація функції (8.27) приводить до системи нелінійних рівнянь, тому аналітичний вираз оцінок параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ дістати важко.

Метод наближеного пошуку параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ, які мінімізують суму квадратів (8.27), дає ітеративний метод, запропонований Кочреном і Оркаттом і названий на їхню честь.

Опишемо його алгоритм.

Крок 1. Довільно вибирають значення параметра ρ, наприклад $\rho = r_1$. Підставивши його в (8.27), обчислюють $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Поклавши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у (8.27) і обчислимо $\rho = r_1$.

Крок 3. Підставивши в співвідношення (8.27) значення $\rho = r_2$, знайдемо $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використаємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків (8.27) за невідомим параметром $\rho = r_3$. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ не будуть відрізнятись менш як на задану величину.

Цей ітеративний метод, як і інші подібні процедури, має дві проблеми:

а) збіжності;

б) характеру знайденого мінімуму — локальний чи глобальний.

Проведені дослідження за цими двома проблемами показали, що в результаті застосування методу Кочрена — Оркатта завжди знаходимо глобальний оптимум і алгоритм забезпечує порівняно добру збіжність.

Часто пропонується альтернативний підхід до використання цього ітеративного методу.

На відміну від попереднього, у ньому подальші ітерації припиняються тоді, коли на основі критерію Дарбіна — Уотсона робиться висновок про відсутність автокореляції залишків.

Розглянемо алгоритм

Крок 1. Приймається гіпотеза $r_1 = 0$ і мінімізується на основі 1МНК сума квадратів: $\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t)^2$. Отже, так само й далі обчислюються параметри для моделі (8.25).

Крок 2. Знаходяться залишки і на основі критерію Дарбіна — Уотсона перевіряється нульова гіпотеза відносно автокореляції залишків. Якщо гіпотеза відхиляється, то переходять до кроку 3.

Крок 3. На даному кроці мінімізується сума квадратів відхилень:

$$\sum_{t=1}^{n} \left[(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t) - r(y_{t-1} - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_{t-1}) \right]^2,$$

де $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$ — оцінки параметрів, знайдені на першому кроці 1МНК. У результаті параметр r_2 визначається як коефіцієнт регресії залишків, знайдених 1МНК, на їх лагові змінні, які стосуються минулого періоду.

Крок 4. Використовуючи значення оцінки параметра r_2, визначають оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$ на основі 1МНК, який застосовується до перетворених даних $(y_t - r_2 y_{t-1})$ і $(x_t - r_2 x_{t-1})$.

Крок 5. Визначаються залишки і перевіряються на наявність автокореляції. Якщо гіпотеза про наявність автокореляції відхиляється, то ітеративний процес припиняється. У противному разі переходимо до кроку 3, де використовуються знайдені оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Коли ітеративний процес припиняється, то виконується перевірка значущості параметрів з допомогою останньої економетричної моделі. У такому разі звичайні формули дадуть обгрунтовані оцінки дисперсій залишків.

8.3.4. Метод Дарбіна

Дарбін запропонував просту двокрокову процедуру, яка також дає оцінки параметрів, вони асимптотично мають той самий вектор середніх і ту саму матрицю дисперсій, що й оцінки методу найменших квадратів.

Крок 1. Підставимо значення залишків, яке підпорядковане авторегресійній моделі першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, до економетричної моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$. Тоді дістанемо $y_t = a_0 + a_1 x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, де $u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{t-1}$.

Звідси $y_t = a_0(1-\rho) + \rho y_{t-1} + a_1 x_t - a_1 \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$,

де ε_t має скалярну матрицю дисперсій.

Згідно з 1МНК визначаються параметри цієї моделі, куди входить і коефіцієнт ρ. У результаті обчислень маємо $\rho = r$.

Крок 2. Значення $\rho = r$ використовується для перетворення змінних $(y_t - r\,y_{t-1})$ і $(x_t - r\,x_{t-1})$, а 1МНК застосовується до перетворених даних. Коефіцієнт при $(x_t - r\,x_{t-1})$ є оцінкою параметра a_1, а вільний член, поділений на $-r$, оцінює параметр a_0.

Метод Дарбіна дуже просто поширюється на випадок кількох незалежних змінних і для автокореляції вищих порядків.

Нехай задано модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \ldots + a_m x_{mt} + u_t, \tag{8.28}$$

де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$.

Підставивши значення u_t в (8.28), дістанемо:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \hat{a}_1 x_{1t} + \ldots + \hat{a}_m x_{mt} -$$
$$- \rho_1 \hat{a}_1 x_{1,t-1} - \ldots - \rho_1 \hat{a}_m x_{m,t-1} - \rho_2 \hat{a}_1 x_{1,t-2} - \ldots - \rho_2 \hat{a}_m x_{m,t-1} + \varepsilon_t.$$

Застосувавши 1МНК, обчислимо параметри цієї моделі. Коефіцієнти $\rho_1 = r$ і $\rho_2 = r_2$ використаємо для перетворення даних:

$$(y_t - r_1 y_{t-1} - r_2 y_{t-2}),\ \ (x_{jt} - r_1 x_{j,t-1} - r_2 x_{j,t-2}),\ \ j = \overline{1,m},\quad t = \overline{1,n}.$$

Знову застосуємо 1МНК для цих перетворених даних і знайдемо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_j\ (j = \overline{1,m})$.

Описаний щойно ітеративний метод Кочрена - Оркатта і розглянута двокрокова процедура Дарбіна за наявності автокореляції залишків асимптотично ефективіший, ніж 1МНК.

Але при цьому постають два важливі запитання:

1) Чи будуть ці методи ефективнішими, ніж 1МНК для малих вибіркових сукупностей?

2) Якою — однаковою чи різною — буде ефективність застосування методів Кочрена — Оркатта і Дарбіна для малих вибірок?

Числовий аналіз, виконаний Гриліхесом і Рао з [1] за допомогою методу Монте-Карло, дав відповідь на ці запитання.

Висновок 1. 1МНК дає менш ефективні оцінки порівняно з іншими методами, якщо сукупність спостережень n = 20 одиниць, а $|\rho| > 0{,}3$.

Висновок 2. Якщо $|\rho| < 0{,}3$, то зниження ефективності оцінок 1МНК порівняно зі складнішими процедурами невелике.

Висновок 3. Метод Дарбіна забезпечує найкращу оцінку для ширшого кола параметрів порівняно з іншими методами.

Висновок 4. Нелінійний метод оцінювання параметрів не дає відчутних переваг порівняно з двокроковою процедурою Дарбіна.

8.4. ПРОГНОЗ

Теоретичні дослідження прогнозу в разі порушення умови (4.3) було розглянуто в розд. 7.

Нехай маємо модель: $Y = XA + u$, де $M(u) = 0$ і $M(uu') = \sigma_u^2 S = V$, яка побудована для n спостережень.

Використаємо цю модель для визначення прогнозу залежної змінної Y_{n+1} для періоду $n+1$ коли для цього періоду задано незалежну змінну x_{n+1}. Формула дає найкращий незміщений прогноз:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + W' V^{-1} e,$$

де $\hat{A}$ — оцінка параметрів моделі згідно з методом Ейткена,

$$e = Y - X\hat{A}$$

і

$$W = \begin{bmatrix} M(u_1 u_{n+1}) \\ M(u_2 u_{n+1}) \\ M(u_3 u_{n+1}) \\ \dots \\ M(u_n u_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

Якщо залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку, то з урахуванням рівності $M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2$ можна записати:

$$W = \rho^s \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \rho^{n-1} \\ \rho^{n-2} \\ \rho^{n-3} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, вектор W можна дістати, помноживши ρ на останній стовпець матриці V. Але оскільки $V V^{-1} = E$, то добуток $W V^{-1}$ являє собою останній рядок матриці E, помножений на ρ.

Звідси $W' V^{-1} e_n = \rho e_n$.

Формула прогнозу має вигляд

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho e_n. \qquad (8.29)$$

Приклад 8.4. Використовуючи економетричну модель, яку побудовано на підставі даних про роздрібний товарообіг та дохід (приклад 8.2), визначити прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становитиме x_{n+1} = 55.

Розв'язання.

1. Запишемо співвідношення, яке визначатиме прогнозний рівень залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho e_n,$$

де $x_{n+1}\hat{A}$ — оцінка прогнозної величини; ρe_n — залишки прогнозу.

2. Скористаємося економетричною моделлю роздрібного товарообігу (приклад 8.2, формула 1) для обчислення прогнозу:

$$\hat{y}_{n+1} = 0{,}442 + 0{,}861 x_{n+1} = 0{,}442 + 0{,}861\ 55 = 0{,}442 + 47{,}35 = 47{,}8;$$

3. Знайдемо оцінку залишків прогнозу ρe_n, де ρ — коефіцієнт коваріації залишків; e_n — залишки за моделлю для t = 10.

$$\rho = 0{,}77;\ e_n = 0{,}18;$$

$$\rho\, e_n = 0{,}77 \cdot 0{,}18 \approx 0{,}14.$$

4. Визначимо прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік ($n + 1$):

$$\hat{y}_{n+1} = 47{,}8 + 0{,}14 = 47{,}94.$$

8.5. КОРОТКІ ВИСНОВКИ

1. Часто при побудові економетричної моделі стикаються з порушенням другої необхідної умови для застосування 1МНК, коли $M(uu') = \sigma_u^2 S,$ де матриця S ($n \times n$) характеризує коваріації між залишками, а дисперсія лишається сталою. Це явище спостерігається насамперед тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів і називається автокореляцією залишків.

2. Виникнення автокореляції залишків пов’язане ось із чим:

1) автокореляцією послідовних елементів векторів залежної і незалежних змінних;

2) автокореляцією послідовних значень змінної (змінних), які не ввійшли до економетричної моделі;

3) помилковою специфікацією економетричної моделі.

3. Оскільки коваріація послідовних значень залишків подається у вигляді

$$\rho^s = \frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2},$$

то друга з необхідних умов записується так:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів коваріацій s-го порядку для елементів ряду u_t або $M(uu') = V,$ де $V = \sigma_u^2 S$.

4. За наявності автокореляції залишків оцінювання параметрів моделі 1МНК може мати такі результати:

1) оцінки параметрів моделі будуть зміщеними;

2) статистичні критерії Стьюдента (t-критерій) і Фішера (F-критерій) не можуть бути використані в дисперсійному аналізі економетричної моделі;

3) неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить до неефективних прогнозів.

5. Наявність автокореляції перевіряється за такими критеріями:

1) Дарбіна — Уотсона — DW (d);

2) фон Неймана — Q;

3) нециклічного коефіцієнта автокореляції r^*;

4) циклічного коефіцієнта автокореляції r.

6. Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками можна застосувати такі методи:

1) Ейткена;

2) перетворення вихідної інформації;

3) Кочрена — Оркатта;

4) Дарбіна.

Перші два методи використовуються тоді, коли залишки задовольняють авторегресійну модель першого порядку, третій і четвертий можна застосувати і тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю вищого порядку.

7. Метод Ейткена базується на скоригованій вихідній інформації з урахуванням коваріації залишків. Система рівнянь для оцінювання параметрів моделі запишеться так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y,$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y.$$

Звідси оператор оцінювання за методом Ейткена має вигляд

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Матриця S у цьому операторі:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матрицю, обернену до S, іноді доцільно подавати у вигляді

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Метод перетворення вихідної інформації дає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації з допомогою параметра ρ;

2) застосування 1МНК для оцінок параметрів згідно з перетвореними даними.

Доведено, що $M(Tuu'T') = \sigma_u^2 E$, тому перетворення вихідної інформації виконується з допомогою матриці

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

розміром $n \times n$.

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1) \times n$, яка утворюється з матриці T_1 викреслюванням першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Метод Кочрена — Оркатта є ітеративним методом оцінювання параметрів економетричної моделі, коли мінімізується сума квадратів залишків, яка для моделі

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t,$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

визначається так:

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1-\rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1}) \right]^2.$$

Для мінімізації цієї функції використовується наведений далі алгоритм.

Крок 1. Довільно вибираємо значення параметра ρ, наприклад $\rho = r_1$, і підставляємо у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, а на основі 1МНК знаходимо параметри $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Узявши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, та обчислимо $\rho = r_2$.

Крок 3. Підставивши $\rho = r_2$, знайдемо оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використовуємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків за невідомим параметром $\rho = r_3$ і т.д. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів

$\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ практично не відрізнятимуться від попередніх або відрізнятимуться на задану величину.

10. Метод Дарбіна також є ітеративним методом, який складається з двокрокової процедури. На першому кроці визначаються 1МНК оцінки параметрів моделі

$$y_t = a_0 + \sum_j a_j x_{tj} + u_t ,$$

де $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, або $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$ і т.д.

На другому кроці 1МНК застосовується для перетворених даних з допомогою параметра ρ, який визначено на першому кроці, тобто змінні наберуть вигляду $(y_t - \rho y_{t-1})$, $(x_{tj} - \rho x_{tj-1})$.

Коефіцієнт при $x_{tj} - \rho x_{tj-1}$ є оцінкою параметра a_j, а вільний член, поділений на ρ, — оцінкою параметра a_0.

11. Оцінку прогнозного рівня залежної змінної можна дістати, скориставшись співвідношенням:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + W'V^{-1}e,$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі з автокорельованими залишками $e = Y - X\hat{A}$. Оскільки $W'\,V^{-1}e_n = \rho\, e_n$, то формула найкращого незміщеного прогнозу запишеться у вигляді:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho e_n .$$

8.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення автокореляції.

2. Які причини виникнення автокореляції залишків?

3. Як впливає автокореляція залишків на оцінку параметрів економетричної моделі?

4. Чим відрізняється метод оцінювання параметрів за методом Ейткена при автокореляції?

5. Запишіть матриці перетворення вихідної інформації згідно з двокроковою процедурою.

6. В яких випадках при автокореляції залишків доцільніше використовувати методи Кочрена — Оркатта або Дарбіна?

7. Дайте коротку характеристику алгоритму метода Кочрена — Оркатта.

8. Чим відрізняється метод Дарбіна від методу Кочрена — Оркатта?

9. Як записати формулу прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків? Чому вона має такий вигляд?

10. Для оцінювання параметрів моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$ *скористайтеся методом перетворення вихідної інформації, яку задано у вигляді двох взаємопов'язаних часових рядів:*

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	11	10	13	14	16
X	5	7	6	4	7	8	10

а залишки u_t *задовольняють авторегресійну схему першого порядку:* $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$.

11. Дайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі, заданої в завданні 10, на основі 1МНК і перетворення вихідної інформації.

12. Визначіть ступінь зміщення коваріації параметрів і залишкової дисперсії при застосуванні 1МНК для виконаного завдання 10.

13. Дайте оцінку параметрів моделі, за методом Кочрена — Оркатта, якщо порядок авторегресійної моделі для залишків є схемою другого порядку. Вказівка: r_1 *= 0,4,* r_1 *= 0,3 (за даними завдання 10).*

14. Виконайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі із завдання 10, знайдених з допомогою перетворення вихідної інформації, а також за методом Кочрена — Оркатта. Обгрунтуйте результати порівняння, виходячи з особливостей цих двох методів.

15. Для моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$, де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, дайте оцінку параметрів за методом Дарбіна, якщо вихідна інформація задана у вигляді двох часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6
Y	16	18	19	19	22	25
X	6	7	8	9	12	13

16. Використовуючи ρ_1 і ρ_2 із завдання 15, зробіть квазірізницеві перетворення вихідної інформації зі згаданого завдання.

17. Знайдіть прогнозне значення y_8 при $x_8 = 15$ за моделлю $\hat{y} = 5{,}3 + 0{,}6x_t + u_t$, скориставшись такими даними:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	13	11	14	15	14
u	-0,5	-0,3	0,2	0,4	0,1	-0,6	0,6

18. Визначіть вектор W, коли відомі залишки:

t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
u_t	*1*	*-1*	*1,2*	*1,1*	*-1,2*	*-1,1*	*0,6*	*-0,5*	*0,2*

8.7. Основні терміни і поняття

Автокореляція

Модель з автокорельованими залишками

Коваріація залишків

Стаціонарний марковський процес

Додатна автокореляція

Від'ємна автокореляція

Критерій Дарбіна — Уотсона

Критерій фон Неймана

Нециклічний коефіцієнт автокореляції

Циклічний коефіцієнт автокореляції

Метод перетворення вихідної інформації

Метод Кочрена — Оркатта

Метод Дарбіна

Авторегресійна схема першого порядку

Авторегресійна схема другого порядку

Головними причинами автокореляції можуть бути: *помилка специфікації*, *інерційність* в зміні економічних показників, ефект *павутиння.*

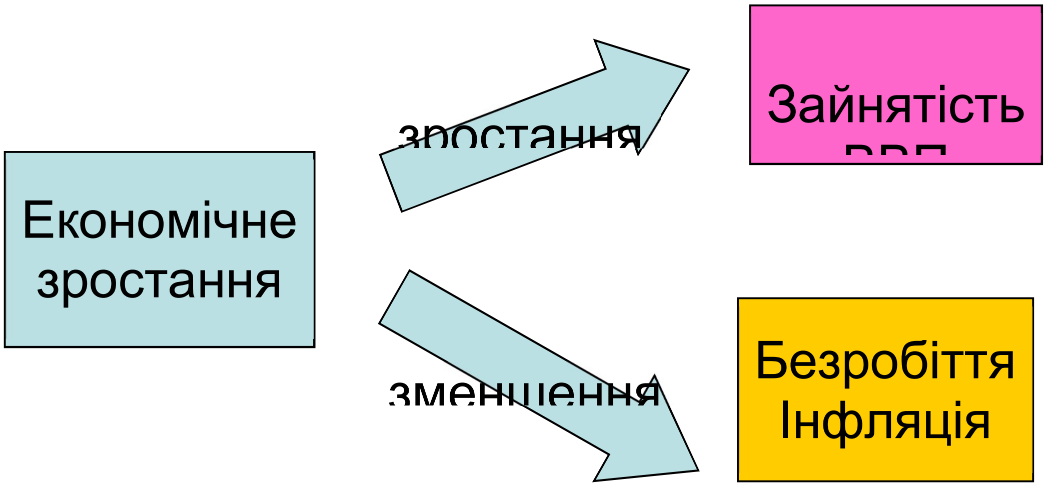
1. Помилки специфікації.

В цьому випадку в моделі можуть бути не враховані важливі пояснювальні змінні, або може бути неправильно вибрана залежність між регресандом У та регресорами *Xi* що, як правило, викликає відхилення реальних значень

У = *yi* від функції регресії.

2. *Інерційність.*

Багатьом економічним показникам, наприклад, інфляції, безробіттю, валовому продукту ВВП і т. ін., притаманна певна циклічність, яка пов'язана із хвилеподібним явищем ділової активності.



3. ***Статистична обробка інформації.***

При обробці статистичної інформації за певний період часу використовують *усереднені дані*, одержані на інтервалах часу, а це призводить до згладжування коливань, які можуть існувати для кожного інтервалу, що може бути однією з причин появи автокореляції.

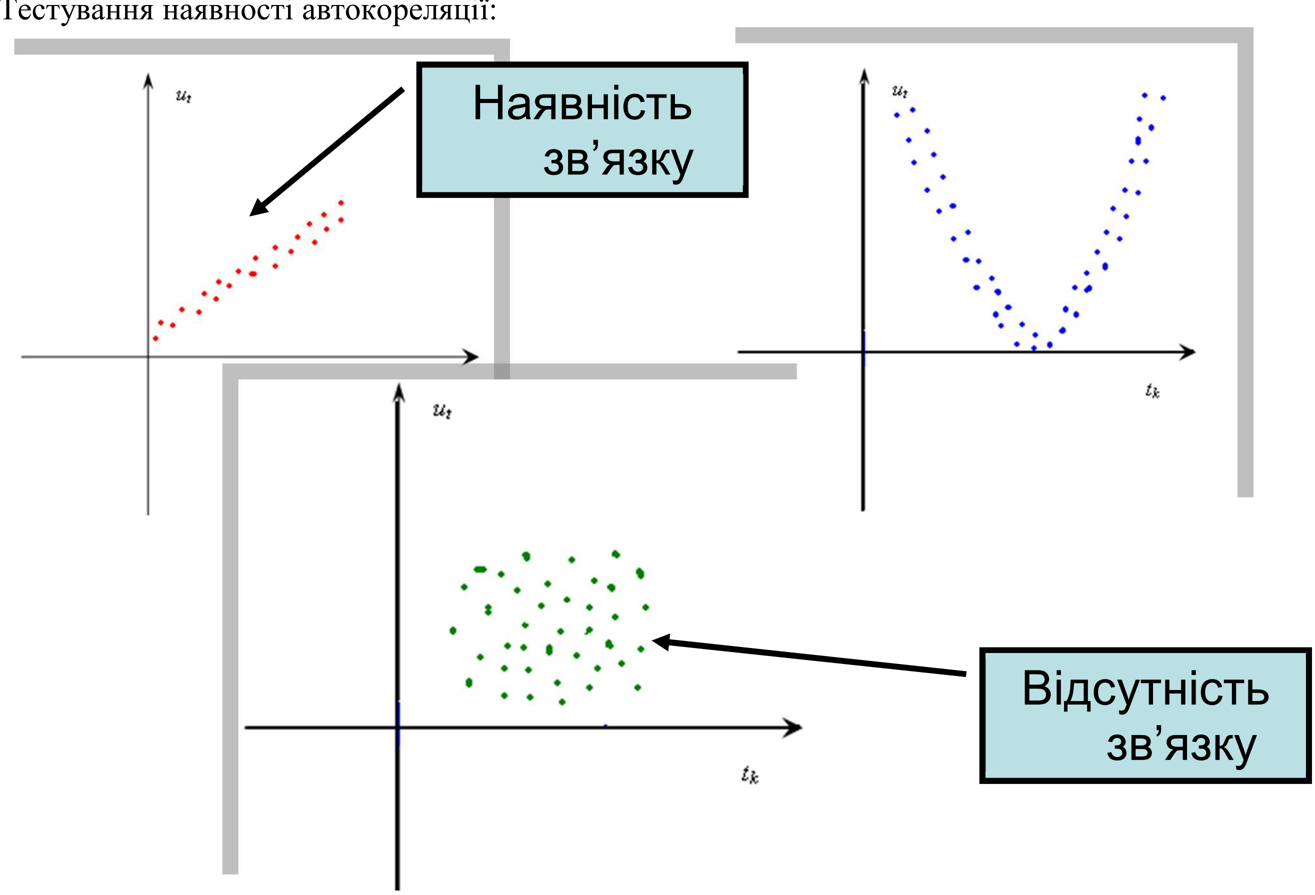
Наслідки автокореляції:

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок *a* можуть бути невиправдано великими.

2. Статистичні критерії *t* і F-статистик, які отримані для класичної лінійної моделі, не можуть бути використані для дисперсійного аналізу, бо їх розрахунок не враховує наявності коваріації залишків.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі, як правило, призводить до неефективних прогнозів, тобто прогнозні значення матимуть велику вибіркову дисперсію.

Тестування наявності автокореляції:



Тестування наявності автокореляції, як правило, здійснюється за *d*-тестом Дарбіна — Уотсона.

<u>Інші тести</u>: критерій фон Неймана, нециклічний коефіцієнт автокореляції, циклічний коефіцієнт автокореляції.

Критерій Дарбіна — Уотсона

Крок 1. Розраховується значення *d* - статистики за формулою

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$$

Зауваження. Доведено, що значення *d* -статистики Дарбіна — Уотсона перебуває в межах

$0 \le DW \le 4$

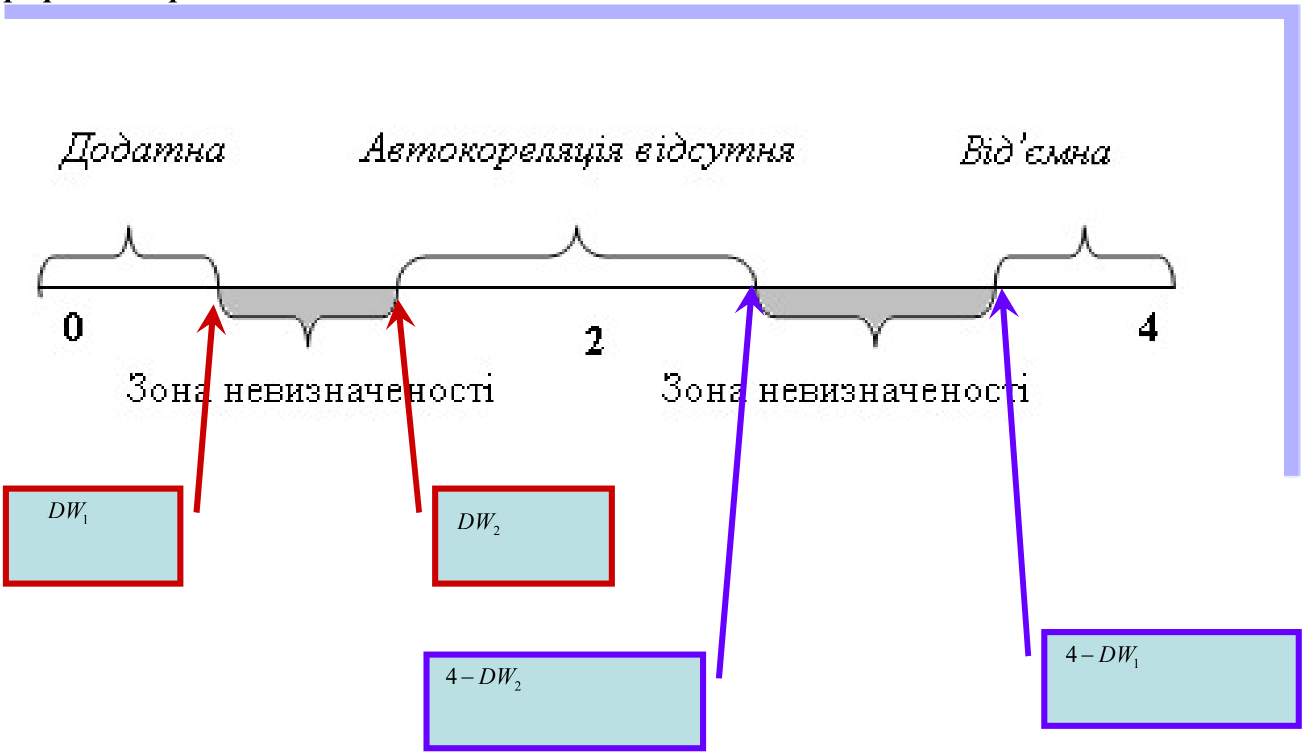
Крок 2. Задаємо рівень значущості α. За таблицею Дарбіна — Уотсона при заданому рівні значущості **α**, кількості факторів **m** і кількості спостережень **n** знаходимо два значення DW1 s DW2

Якщо $0 < DW < DW_1$ то наявна *додатна* автокореляція. Якщо $DW_1 \le DW \le DW_2$ або $4 - DW_2 \le DW \le 4 - DW_1$ ми *не можемо* зробити висновки ані про наявність, ані про відсутність автокореляції-DW потрапляє в зону невизначеності.

Якщо $4 - DW_1 < DW < 4$ маємо від'ємну автокореляцію.

Якщо $DW_2 < DW < 4 - DW_2$ автокореляція ***відсутня.***

Графічне зображення



ЛЕКЦІЯ 9. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ.

9.1. Історична довідка

В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак **сучасне математичне програмування** передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого, майбутнього нобелевського лауреата Л.В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л.В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був уведений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських учених Дж. Данцига та Г. Купманса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л.В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане в чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами. Тоді ж, на початку 50-х років, відомий американський економіст Р.Дорфман (1916-2001) запропонував узагальнюючий термін "математичне програмування", під "дахом" якого існують і взаємодіють всі моделі оптимізації, в узагальненому вигляді – лінійні та нелінійні.

Слід згадати, що у 30-х роках ще майже невідомий молодий економіст - майбутній нобелевський лауреат Василь Леонтьєв (19 років у 1925 р.) опублікував статтю про аналіз першого балансу народного господарства СРСР за 1923-25 рр. Саме ця видатна піонерська робота, що містила й таблицю міжгалузевих зв'язків, визначила майбутній потужний проблемно-методологічний напрямок – аналіз міжгалузевого балансу (МГБ) і була ефективно реалізована пізніше за допомогою лінійного математичного програмування.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений **основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод**, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, у якій наведено необхідні й достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач із сепарабельним опуклим функціоналом і лінійними обмеженнями; 1955 року — низка праць, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний внесок у розвиток якого зробив американський математик Р.Белман. Альтернативний метод до динамічного програмування – "Теорію оптимального управління" запропонував радянський вчений Л.С. Понтрягін. Центральним результатом математичної теорії оптимального управління є так званий "Принцип максимуму Понтрягіна" (1958 рік).

На жаль, у період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не простежувалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень щодо математичного моделювання економіки почалося в 60-80 роках і стосувалось опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських учених того періоду слід виокремити праці В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, Н.П. Федоренка, С.С. Шаталіна, В.М. Глушкова, В.С. Михалевича, Ю.М. Єрмольєва та ін.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

9.2. Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — ***детерміновані*** задачі і ***стохастичні***. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. В іншому випадку адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням***.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які у свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рис. 9.1 (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

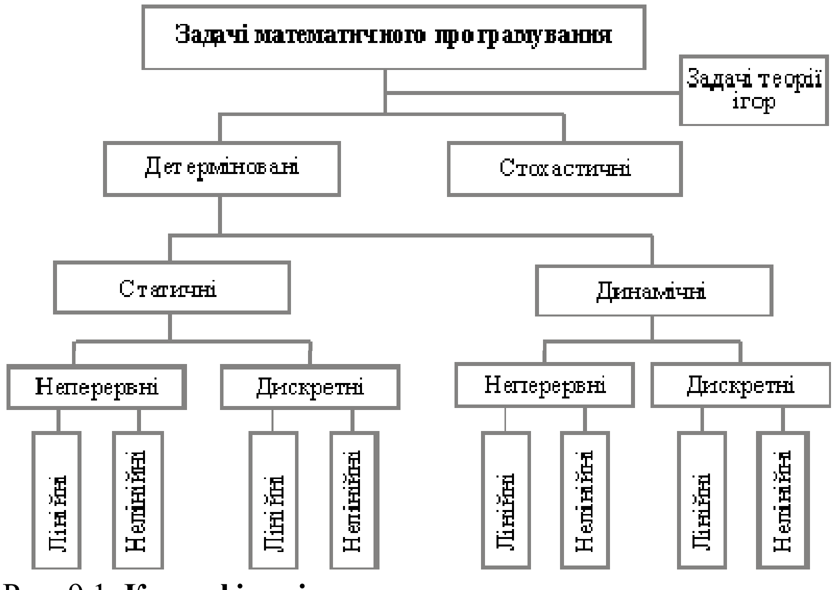


Рис. 9.1. **Класифікація задач математичного програмування**

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2012 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2012 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають ***стратегічним***. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними***. Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- і багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що, послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні***. Дискретними називають задачі, у яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, у яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на ***лінійні*** та ***нелінійні***. Якщо цільова функція та обмеження є лінійними, тобто містять змінні xj тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним методом*. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні й технологічні процеси, як звичайно, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле й квадратичне програмування. ***Задача належить до опуклого програмування*** в тому випадку, коли цільова функція ***вгнута***, якщо вона мінімізується, у ***опукла***, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу ($\geq$) їх ліві частини повинні бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. ***Квадратичне програмування*** — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це найбільшестосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають ***дробово-лінійне програмування***, коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі ***теорії ігор***, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

9.3. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ. ДВОЇСТІ ЗАДАЧІ

9.3.1. Правила побудови прямих і двоїстих задач

Прикладом найпростішої **прямої** задачі лінійного програмування є всесвітньовідома задача – задача “ОПТИМІЗАЦІЇ ПЛАНУ ВИРОБНИЦТВА” або за іншою назвою - задача “РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ”.

Є певне підприємство і відповідне виробництво із запасами сировини, палива і обмеженнями у споживанні енергії Ві (В1,В2,В3,В4) і є певна кількість видів виробів (деталей), які потрібно виготовляти щоб отримати максимальний прибуток. Відомі норми споживання (витрат) при виготовленні виробів Аі (А1,А2,А3,А4,А5), тобто відома матриця норм витрат Aij конкретних ресурсів для конкретних виробів. Відома вартість виробів на ринках Сі.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва, тобто кількість кожного виробу Хі згідно з нормами споживання (витрат) сировини на виробі і згідно з обмеженнями та залишками ресурсів на складах підприємства, щоб прибуток був максимальний.

Математична модель для прямої задачі складається з двох частин:

1.Критерій оптимізації $F=\sum CiXi \rightarrow MAX$

$F=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+C_4X_4+\ldots+C_nX_n$ -> MAX (Максимум прибутку або доходів)

2.Система обмежень, яка складається з однієї частини – одного виміру

$A_{11}X_1+A_{12}X_2+A_{13}X_3+A_{14}X_4+\ldots+A_{1n}X_n$ < або = B1 тобто $\sum AijXij$ < або = B1

$A_{21}X_1+A_{22}X_2+A_{23}X_3+A_{24}X_4+\ldots+A_{2n}X_n$ < або = B2 тобто $\sum AijXij$ < або = B2

$A_{31}X_1+A_{32}X_2+A_{33}X_3+A_{34}X_4+\ldots+A_{3n}X_n$ < або = B3 тобто $\sum AijXij$ < або = B3

………………………………………………..

$A_{m1}X_1+A_{m2}X_2+A_{m3}X_3+A_{m4}X_4+\ldots+A_{mn}X_n$ < або = Am – **перший і єдиний вимір**, (9.1)

де Х- невідома кількість відповіднихі деталей або виробів у плані виробництва;

n – максимальна кількість деталей у плані виробництва;

m – максимальна кількість обмежень (кількість різних видів необхідних ресурсів);

Aij- норми витрат: i - для кожної деталі або виробу та j - відповідних ресурсів: матеріалів, енергії (електричної, газу, теплової і т.і.), людських ресурсів і т.і., що може бути представлено у табличному вигляді (Таблиця 9.1).

Таблиця 9.1

Матриця норм витрат різних видів ресурсів при виготовленні різних виробів, вартостей, собівартостей, запаси сировини та розподіл потреб.

Обмеження (Bj) енергії, сировини, людей на підприємстві		Вартість виробів на ринку, Сі та невідома кількість виробів у плані Х					
		C1=10	C2=20	C3=15	C4=5	C5=40	
		X1	X2	X3	X4	X5	невідома кількість виробів у плані - Х
B1=2000кг	300	$A_{11}=7$	$A_{12}=6$	$A_{13}=8$	$A_{14}=9$	$A_{15}=5$	Норми витрати матеріалів
B2=100МВт/год	250	$A_{21}=5$	$A_{22}=4$	$A_{23}=7$	$A_{24}=6$	$A_{25}=8$	Норми витрати ел. енергії
B3=5000кг	350	$A_{31}=6$	$A_{32}=5$	$A_{33}=4$	$A_{34}=8$	$A_{35}=7$	Норми витрати палива

B4=16000 (20чол)	200	A_{41}=8	A_{42}=9	A_{43}=5	A_{44}=4	A_{45}=6	Норми витрати праці, люд/год

Для **побудови двоїстої задачі** необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\leq$», а для задачі на відшукання мінімального значення — до виду «$\geq$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана в стандартному вигляді, то **двоїста задача** ***утворюється за такими правилами***:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця,

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (9.2.)$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

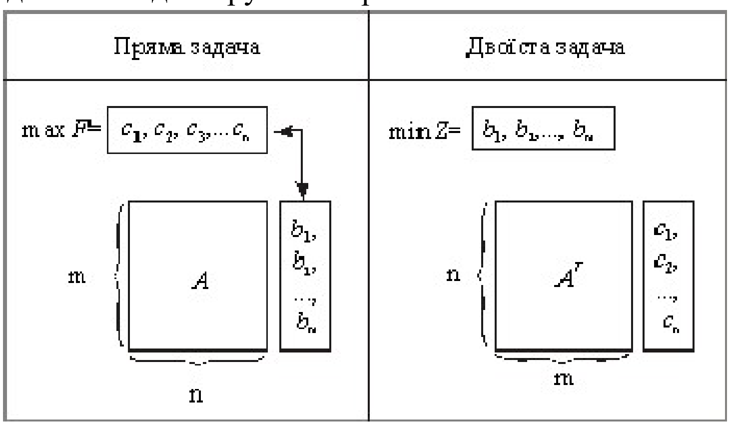


Рис. 9.2. Схема побудови двоїстої задачі до прямої

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід’ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої — лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Усі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено нижче.

Пряма задача	Двоїста задача
Симетричні задачі	
max F = CX AX $\le$ B X $\ge$ 0	min Z = BY ATY $\ge$ C Y $\ge$ 0
min F = CX AX $\ge$ B X $\ge$ 0	max Z = BY ATY $\le$ C Y $\ge$ 0

Приклад 3.1.

Несиметричні задачі

max F = CX AX = B X $\ge$ 0	min Z = BY ATY $\ge$ C Y $\in \left]-\infty;\infty\right[$
min F = CX AX = B X $\ge$ 0	max Z = BY ATY $\le$ C Y $\in \left]-\infty;\infty\right[$

Приклад 3.2.

До даної задачі лінійного програмування записати двоїсту.

max $F = -5x1 + 2x2$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мусять мати знак «$\le$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

max F = –5x1 + 2x2;

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$\min Z = -y_1 + 5y_2$;

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5; \\ -y_1 + 3y_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Або схематично (використовуючи компоненти векторів та матриць) зв'язок між парою цих задач можна зобразити так:

Пряма задача					Двоїста задача				
max F =	–5	2			min Z =	–1	5		
	–1	–1		–1		–1	2		–5
	2	3		5		–1	3		2

До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$\min F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \le 8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots 5.$

Розв'язання. Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F мінімізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мають бути виду «$\ge$». Тому друге обмеження задачі необхідно помножити на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \ge -8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$\max Z = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 8y_3 \le 1; \\ -4y_1 + y_2 + 7y_3 \le 6; \\ 13y_1 - 5y_2 - y_3 \le -7; \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1; \\ y_1 - y_2 - 9y_3 \le 5. \end{cases}$$

$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$

Оскільки перше обмеження початкової задачі є рівнянням, то відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати як додатного, так і від'ємного значення.

9.3.2. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої й двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості. Розглянемо модель задачі (9.1) з економічною інтерпретацією.

Лема 9.1 (**основна нерівність теорії двоїстості**). Якщо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ — допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

або $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. (9.3)

Доведення. Помножимо кожне рівняння системи (9.1) на відповідну змінну двоїстої задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; & y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m & y_m \end{array} \right. \quad (9.4)$$

Маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + \ldots + a_{1n}x_ny_1 \le b_1y_1; \\ a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_ny_2 \le b_2y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1y_m + a_{m2}x_2y_m + \ldots + a_{mn}x_ny_m \le b_my_m. \end{cases}$$

Підсумувавши праві і ліві частини нерівностей, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \quad (9.4)$$

Аналогічно перетворимо систему обмежень (3.5) двоїстої задачі:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; & x_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; & x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. & x_n \end{cases}$$

Підсумувавши після множення тут також ліві та праві частини, отримаємо нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \qquad (9.5)$$

Ліві частини нерівностей (3.8) та (3.9) збігаються, отже:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Нерівність доведено.

Лема 9.2 (**достатня умова оптимальності**). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_m^*)$ — допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \qquad (9.6)$$

то X^*, Y^* — оптимальні розв’язки відповідних задач.

Доведення. Нехай X_1— допустимий план прямої задачі. Тоді на підставі нерівності (9.4-9.5) маємо: $F(X_1) \le Z(Y^*)$. За умовою задачі $F(X^*) = Z(Y^*)$, отже

$$F(X_1) \le Z(Y^*) = F(X^*). \qquad (9.7)$$

Оскільки за допущенням X_1— довільний допустимий план прямої задачі, то нерівність (9.7) виконується для будь-якого з можливих розв’язків. Отже, маємо, що при X^*цільова функція набирає найбільшого значення, тобто є оптимальним розв’язком початкової задачі.

В аналогічний спосіб доводиться, що Y^*— оптимальний план двоїстої задачі.

Перша теорема двоїстості

Теорема (***перша теорема двоїстості***). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв’язок, причому для оптимальних розв’язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто

$$\max F = \min Z .$$

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв’язку*1.

**1: {Зауважимо, коли одна із задач не має допустимого розв’язку, то двоїста до неї задача також може не мати допустимого розв’язку, тобто зворотне твердження щодо другої частини теореми в загальному випадку не виконується.}*

Доведення. Допустимо, що початкова задача має оптимальний план, який отриманий симплексним методом. Не порушуючи загальності, можна вважати, що останній базис складається з перших *m* векторів $A_1, A_2, \ldots A_m$. Остання симплексна таблиця має вигляд:

Таблиця 9.2

i	Базис	Сб	План	*c1*	*c2*	...	*cm*	*cm* + 1	...	*cn*
				x1	*x2*	...	*xm*	*xm* + 1	...	*xn*
1	*x*1	c_1^*	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	*x*2	c_2^*	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}

m	x_m	c_m^*	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	.. .	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F0$	0	0	...	0	Δ_{m+1}	.. .	Δ_n

Позначимо через *D* матрицю, що утворена з компонент векторів *A1, A2,…, Am* останнього базису в першій симплексній таблиці.

Для оптимального плану отримаємо:

$$B = DX^* \tag{9.8}$$

де $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, *B* — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень.

Звідси:

$$B = DX^* \Rightarrow X^* = D^{-1}B. \tag{9.9}$$

Симплексна таблиця 9.1 містить коефіцієнти розкладу векторів $A_1, A_2, \ldots A_n$ початкової системи обмежень задачі за векторами базису, тобто кожному вектору з системи обмежень задачі (9.1)—(9.3) *Aj* відповідає в симплексній таблиці вектор A_j', такий що

$$A_j = DA_j', (j = \overline{1,n}). \tag{9.10}$$

Позначимо через A' матрицю, що складається з коефіцієнтів розкладу векторів $A_j \left(j = \overline{1,n}\right)$. Тоді буде справджуватися рівність:

$$A = DA',$$

звідки

$$A' = D^{-1}A. \tag{9.11}$$

Враховуючи (9.9), значення оптимального плану даної задачі знаходиться у вигляді:

де $C^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots c_m^*)$,

причому

$$\overline{F} = C^*A' - C = (c_1^*A_1' - c_1; c_2^*A_2' - c_2; \ldots; c_n^*A_n' - c_n) =$$
$$= (F_1 - c_1; F_2 - c_2; \ldots; F_n - c_n),$$

тобто всі компоненти вектора $\overline{F}$ є оцінками оптимального плану задачі, а тому

$$C^*A' - C = \left(F_j - c_j\right) \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{9.12}$$

Оскільки оптимальний план початкової задачі подано у вигляді $X^* = D^{-1}B$, то за правилами побудови двоїстої задачі можна допустити, що її оптимальний план матиме вигляд:

$$Y^* = C^*D^{-1} \tag{9.13}$$

Доведемо, що $Y^* = C^*D^{-1}$ дійсно є оптимальним планом двоїстої задачі.

Система обмежень двоїстої задачі у векторно-матричній формі матиме вигляд:

$YA \geq C = YA - C \geq 0$.

Підставимо в цю нерівність значення Y^*. Тоді, враховуючи (9.11), (9.12) та (9.13), отримаємо:

$$Y^*A - C = C^*D^{-1}A - C = C^*A' - C \geq 0.$$

Звідки: $Y^*A \geq C$. Отже, Y^* задовольняє систему обмежень двоїстої задачі, тому є допустимим планом задачі.

Для даного плану значення функціонала дорівнюватиме:

$$Z(Y^*) = Y^*B, \tag{9.14}$$

де $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Підставимо в (9.14) значення Y^* з (9.13) та, враховуючи (9.14), матимемо:

$$Z(Y^*) = Y^*B = C^*D^{-1}B = C^*X^* = \max F \quad (9.15)$$

Доведено, що $Z(Y^*)$ збігається зі значенням оптимального плану початкової задачі.

Отже, за лемою 9.2 (достатня умова оптимальності плану задачі лінійного програмування) план Y^* є оптимальним планом двоїстої задачі.

Аналогічно доводиться, що коли двоїста задача має розв'язок, то початкова також має розв'язок і виконується рівність:

$$\min Z = \max F .$$

Для доведення другої частини теореми допустимо, що лінійна функція початкової задачі необмежена зверху. Тоді з нерівності $F(X) \leq Z(Y)$ маємо, що $Z(Y) \geq +\infty$, що не має змісту. Отже, двоїста задача в даному випадку не має розв'язків.

Доведена теорема дає змогу в процесі розв'язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток (*Fmax*) підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, однак таку саму суму грошей ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

ЛЕКЦІЯ 10.
НЕМЕРЕЖЕВА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ДВОІСТА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА
10.1. Немережева транспортна задача.

Є чотири склади із запасами сировини Ai (A1,A2,A3,A4) і п'ять пунктів її споживання із потребами Bi (B1,B2,B3,B4,B5). Відома матриця собівартості перевезень Cij з конкретного i-го складу в конкретний пункт споживання.

Необхідно визначити оптимальний план перевезень сировини зі складів на пункти споживання, щоб витрати на перевезення сировини були мінімальними.

Приклад 1 . ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА 1 (немережева).

Таблиця 10.1

Матриця собівартостей, запаси сировини та розподіл потреб різних споживачів.

Перший вимір - Початковий пункт-склади з запасами, Ai		Пункт призначення – пункт споживання, Bj					
		B1	B2	B3	B4	B5	Другий вимір
		250	200	300	200	150	Замовлення споживачів
A1	300	C11=7 X11- ?	C12=6 X12- ?	C12=8 X13- ?	C14=9 X14- ?	C15=5 X15- ?	
A2	250	C21=5 X21 - ?	C22=4 X22 - ?	C23=7 X23 - ?	C24=6 X24 - ?	C25=8 X25 - ?	
A3	350	C31=6 X31 - ?	C32=5 X32 - ?	C33=4 X33 - ?	C34=8 X34 - ?	C35=7 X35 - ?	
A4	200	C41=8 X41 - ?	C42=9 X42 - ?	C43=5 X43 - ?	C44=4 X44 - ?	C45=6 X45 - ?	

Таблиця 10.2

Матриця собівартостей, запаси сировини та розподіл потреб різних споживачів.

Початковий пункт-склади з запасами, Ai		Пункт призначення – пункт споживання, Bj					
		B1	B2	B3	B4	B5	
		250	200	300	200	150	
A1	300	7	6	8	9	5	
A2	250	5	4	7	6	8	
A3	350	6	5	4	8	7	
A4	200	8	9	5	4	6	

Приклад 2 . ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА 2.

Таблиця 10.3

Транспортна задача непотокова (немережева)

		Пункты назначения			число туристов в исх пункте	
исходный пункт	1	2	3	4		Критерій оптимізації
1	0	0	0	1	15	0
2	2	7	9	0	25	
3	0	4	6	8	5	
Місця в готелі	5	15	15	10		

1					0
2					0
3					0
	0	0	0	0	

Математична модель транспортної задачі складається з двох частин:
1)Критерій оптимізації (мінімум витрат на перевезення)

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (10.1)$$

Детально:

$F=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{14}X_{14}+ C_{15}X_{15} + C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{24}X_{24}+ C_{25}X_{25}+$
$C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}+C_{34}X_{34}+ C_{35}X_{35} + C_{41}X_{41}+C_{42}X_{42}+C_{43}X_{43}+C_{44}X_{44}+ C_{45}X_{45}$ ---> MIN (10.2)

Або спрощено: $F=\sum CijXij \rightarrow MIN$ (10.3)

2)Система обмежень, яка теж складається з двох частин – двох вимірів:
Перший вимір (запаси на складах) детально:

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}\ldots+X_{1n} <= B_1$ - склад 1 (10.3)
або $\sum Xij <= B_1$ (10.4)
$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}\ldots+X_{2n}<= B_2$ - склад 2 (10.5)
або $\sum Xij <= B_2$ (10.6)
$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}\ldots+X_{3n}<= B_3$ - склад 3 (10.7)
або $\sum Xij <= B_3$ (10.8)
$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+ X_{45}\ldots+ X_{4n}<= B_4$ - склад 4 (10.9)
або $\sum Xij <= B_4$ (10.10)

………………………………..
$X_{m1}X+X_{m2}X+X_{m3}X+X_{m4}X+\ldots+X_{mn}X$ ->Bm - інші склади (10.11)

Другий вимір (замовлення споживачів) детально:
$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+\ldots+X_{m1}$ => A1 - замовник 1 (10.12)
або ∑Xij => A1 (10.13)
$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+\ldots+X_{m2}$ = A2 - замовник 2 (10.14)
або ∑Xij = A2 (10.15)
$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+\ldots+X_{m3}$ <= A3 - замовник 3 (10.16)
або ∑Xij <= A3 (10.17)
……………………………………………..
$A_{1m}X_{1m}+A_{2m}X_{2m}+A_{3m}X_{3m}+A_{4m}X_{4m}+\ldots+A_{nm}X_{nm}$ <(= або >)Am – другий вимір (10.18)

Математична модель транспортної задачи може бути **замкнута (закрита)** ∑A=∑B (10.19) і **незамкнута (відкрита)** у протилежному випадку. У випадку незамкнутої задачі може з'явитися необхідність пом'якшити обмеження задля можливості знайти можливі рішення моделі і задачи.

10.2. Двоїста транспортна задача.

Один із способів розв'язування транспортної задачі ґрунтується на розгляді двоїстої задачі. Розглянемо транспортну задачу. Позначимо змінні двоїстої задачі, які відповідають рівнянням (10.3-10.11), через $u_i\ (i=\overline{1,m})$, а для рівнянь (10.12-10.18) — через $v_j\ (j=\overline{1,n})$. Оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, то пара спряжених задач є несиметричною і ніякі обмеження на знаки змінних двоїстої задачі $u_i\ (i=\overline{1,m})$ та $v_j\ (j=\overline{1,n})$ не накладаються.

Для **побудови двоїстої задачі** поставимо у відповідність обмеженням початкової задачі змінні двоїстої:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1; \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m; \end{cases} \left| \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array}\right. \quad (10.20)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1; \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n. \end{cases} \left| \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}\right. \quad (10.21)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

Згідно з загальними правилами побудови двоїстих задач маємо:

$$\max Z=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j \quad (10.22)$$

за умов:

$$u_i+v_j\le c_{ij}, \quad (10.23)$$

$i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n$.

Змінні *ui* та *vj* задачі (10.22), (10.23) двоїстої до транспортної мають назву потенціалів.

ЛЕКЦІЯ 11. ЗАДАЧА ПРИЗНАЧЕННЯ НА ПОСАДИ. ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗКЛАДІВ.

11.1. Задача оптимізації призначення на посади

Слід зазначити, що задача є булевою, а модель має бути двійковою.

Спочатку всі претенденти проходять співбесіду і отримують оцінки на предмет відповідності всім можливим посадам (вакансіям). У ході рішення значення невідомих X можуть набувати тільки двох значень – 0 (не призначено на посаду) або 1 (призначено на посаду).

Таблиця 11.1

Оптимизация призначення на посади.

	Поса-да 1	Поса-да 2	Поса-да 3	Поса-да 4	Поса-да 5	Поса-да 6	Поса-да 7	призначено
претендент А	C11=7 X11-?	C12=6 X12- ?	C12=8 X13- ?	C14=9 X14- ?	C15=5 X15- ?	C14=9 X14- ?	C15=5 X15- ?	1
претендент Б	C21=5 X21-?	C22=4 X22 - ?	C23=7 X23 - ?	C24=6 X24 - ?	C25=8 X25 - ?	C24=6 X24 - ?	C25=8 X25 - ?	1
претендент В	C31=6 X31-?	C32=5 X32 - ?	C33=4 X33 - ?	C34=8 X34 - ?	C35=7 X35 - ?	C34=8 X34 - ?	C35=7 X35 - ?	1
Претендент Г	C41=8 X41 - ?	C42=9 X42 - ?	C43=5 X43 - ?	C44=4 X44 - ?	C45=6 X45 - ?	C44=4 X44 - ?	C45=6 X45 - ?	1
претендент Д	C51=8 X51-?	C52=9 X52 -?	C53=5 X53 - ?	C54=4 X54 - ?	C55=6 X55 - ?	C64=4 X64 - ?	C75=6 X75 - ?	1
зайнято	1	5	5	5	5	5	5	145
не зайнято	1	1	0	0	0	0	1	Цільова функція

Таблиця 11.2

Оптимизация призначення на посади.

	Поса-да 1	Поса-да 2	Поса-да 3	Поса-да 4	Поса-да 5	Поса-да 6	Поса-да 7	призначено
претендент А	1	1	1	1	1	1	1	7
претендент Б	1	1	1	1	1	1	1	7
претендент В	1	1	1	1	1	1	1	7
Претендент Г	1	1	1	1	1	1	1	7
претендент Д	1	1	1	1	1	1	1	7
зайнято	1	5	5	5	5	5	5	145
не зайнято	1	1	0	0	0	0	1	Цільова функція

Математична модель задачи призначення на посади дуже схожа на умови **двомірної** транспортної задачі і складається з двох частин:

1.Критерий оптимізації (максимум корисності від призначень для організації)

$$F=\sum CijXij \rightarrow MAX$$

$F=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{14}X_{14}+ C_{15}X_{15} + C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{24}X_{24}+ C_{25}X_{25}+ C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}+C_{34}X_{34}+ C_{35}X_{35} + C_{41}X_{41}+C_{42}X_{42}+C_{43}X_{43}+C_{44}X_{44}+ C_{45}X_{45}$ ---> MAX

2.Система обмежень, яка теж складається з двох частин – двох вимірів:
Додаткове обмеження: невідомі X можуть набувати тільки двох значень – 0 (не призначено на посаду) або 1 (призначено на посаду).
Перший вимір (кожен ПРЕТЕНДЕНТ може обіймати тільки одну посаду):

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n$$

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}…+X_{1n} = B_1 <$ або $=1$
$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}…+X_{2n}= B_2 <$ або $=1$
$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}…+X_{3n}= B_3 <$ або $=1$
……………………………………………………..
$X_{m1}X+X_{m2}X+X_{m3}X+X_{m4}X+…+X_{mn}X$ ->Bm – перший вимір

Другий вимір (кожна посада може надаватися певній кількості претендентів- в першому наближенні - одному):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n$$

$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+…+X_{m1} <= A1$(=1 або = 5 наприклад)
$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+…+X_{m2} <= A2$(=1 або = 3 наприклад)
$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+…+X_{m3} <= A3$(=1 або = 4 наприклад)
……………………………………………………..
$A_{1m}X_{1m}+A_{2m}X_{2m}+A_{3m}X_{3m}+A_{4m}X_{4m}+…+A_{nm}X_{nm}$ <(= або >)Am – другий вимір

Математична модель задачи може бути **замкнута (закрита)** $\sum A=\sum B$
і **незамкнута (відкрита)** у протилежному випадку. У випадку незамкнутої задачі може з'явитися необхідність пом'якшити обмеження задля можливості знайти можливі рішення моделі і задачи.

11.2. Задача оптимізації розкладів.

Слід зазначити, що задача є булевою, а модель має бути двійковою. У ході рішення значення невідомих X можуть набувати тільки двох значень – 0 (чергує) або 1 (не чергує).

Відомо скільки чергових потрібно виводити кожного дня протягом тижня при певних обмеженнях, наприклад, що тривалість щотижневої роботи не може перевищувати 40 годин. Метою задачи є визначення конкретних чергових на кожен день.

Таблиця 11.3

Задача оптимізації розкладів.

	Неділя	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота		
Лариса	0	0	0	0	0	1	1	5	=
Надя	0	0	0	0	0	1	0	5	=
Галя	0	0	0	0	1	1	0	5	=
Аня С.	0	0	0	1	1	0	0	5	=
Аня В.	0	0	0	1	0	0	0	5	=
Олена	0	0	1	1	0	0	0	5	=

Оксана	0	0	1	0	0	0	0	5	=
Віта	0	1	1	0	0	0	0	5	=
Ліда	1	1	0	0	0	0	0	5	=
Жанна	0	0	0	0	0	0	1	6	=
Всього	4	6	7	9	8	7	10		
Треба	4	6	7	9	8	7	10	51	

Математична модель задачи ***оптимізації розкладів*** складається з двох частин:

1.Критерий оптимізації (мінімум кількості зайнятих людей) $A=\sum Xij \rightarrow MIN$

$F=X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+\ldots+X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}+\ldots+X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{45}-+\ldots{-}{-}> MIN$

2.Система обмежень, яка теж складається з двох частин – двох вимірів:
Додаткове обмеження: невідомі X можуть набувати тільки двох значень – 0 (чергує) або 1 (не чергує).
Перший вимір обмежень (кожен працівник має право працювати не більше 40 год на тиждень, тобто не більше 5 днів):
$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}\ldots+X_{1n}$ < або = $B_1=5$
$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}\ldots+X_{2n}$< або =$B_2=5$
$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}\ldots+X_{3n}$< або = $B_3=5$
………………………………………………..
$X_{m1}X+X_{m2}X+X_{m3}X+X_{m4}X+\ldots+X_{mn}X$ ->Bm – перший вимір

Другий вимір обмежень (кожного дня необхідно точно забезпечити певну кількість чергових):
$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+\ldots+X_{m1} = A1(=4)$
$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+\ldots+X_{m2} = A2(=6)$
$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+\ldots+X_{m3} = A3(=7)$
………………………………………………..
$A_{1m}X_{1m}+A_{2m}X_{2m}+A_{3m}X_{3m}+A_{4m}X_{4m}+\ldots+A_{nm}X_{nm}$ <(= або >)Am – другий вимір.

Математична модель задачи може бути **замкнута (закрита)** $\sum A=\sum B$ або незамкнута (відкрита).

ЛЕКЦІЯ 12. ПОТОКОВІ ЗАДАЧІ. ТЕОРІЯ ГРАФІВ. ЗАДАЧА НА МАКСИМАЛЬНИИЙ ПОТІК І МІНІМАЛЬНИЙ ПЕРЕРІЗ. ЗАДАЧА НА ПОТІК МІНІМАЛЬНОЇ ВАРТОСТІ.

Будь-який вибір набору параметрів *називається* ***рішенням***. ***Оптимальними*** вважаються ті рішення, що в обговореному заздалегідь сенсі мають переваги над іншими. Виходячи з мети цієї теорії, можна сказати, що **основним завданням дослідження операцій є знаходження оптимальних рішень у меж обраної моделі**.

Модель операції — це якомога точніший опис операції за допомогою математичного апарату.

Ефективність операції — це ступінь її пристосованості до виконання поставленої мети, що кількісно виражається у вигляді цільової функції. Вибір критерію ефективності визначає практичну цінність дослідження.

Визначення 12.1. *Пропускною спроможністю перетину* (X,X) назвемо MAX величину .

Очевидно, в загальному випадку $C(X,X) \neq C(,X\,X)$.

S-t-перетин є най*ужчим місцем* мережі. З цього випливає, що величина потоку *v* не може перебільшувати пропускну спроможність довільного *s-t*-перетину, тобто

$v \leq C(X,X)$, $s \in X$, $t \in X$. Тоді:

<u>Теорема </u>Форда – Фалкерсона. В мережі величина максимального *s-t*-потоку дорівнює пропускної спроможності мінімального *s-t*-перетину.

12.1. Задача на максимальний потік.

Розв’язати оптимізаційну потокову задачу методами потокового математичного програмування і знайти максимальний потік для представленої мережі (для зваженого орієнтованого графа) з використанням надбудови “Пошук рішення” MS EXCEL.

Математична модель задачі про максимальний потік й мінімальний переріз – одна з найвідоміших в світи задач.

Як будь-яка оптимізаційна модель, вона складається з двох частин – **критерія оптимізації (цільової функції)** й **системи обмежень**. Як будь-яка **потокова (мережева)** оптимізаційна модель, вона обов’язково пов’язана з відповідним **графом** (схемою **вузлів**, що з’єднані **ребрами або дугами**).

Для отримання математичної моделі задачі введемо невід’ємні (позитивні або такі, що дорівнюють 0) змінні Xij, які інтерпретуються як величина потоку по дузі (i,j). Тоді математична модель **прямої задачі** (на максимальний потік) може мати, наприклад, наступний вигляд:

Критерій оптимізації (цільова функція):

$$\sum_{j=1}^{n} Xsj \rightarrow MAX \qquad (12.1)$$

Система обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} Xsj - \sum_{i=1}^{n} Xii = 0 \qquad (12.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Xij - \sum_{i=1}^{n} Xji = 0 (\forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t) \qquad (12.3)$$

$$0 \leq Xij \leq Cij \qquad (12.4)$$

$$Xij \in Z(\forall i, j \in \{1,2,...,n\}) \qquad (12.5)$$

де: Xij – пошукові значення потоків;

Cij – пропускна спроможність;

Z – множина цілих чисел.

Критерій оптимізації (1) вимагає досягнення максимального значення потоку в графі. **Обмеження (2)** вимагає, щоб величина потоку, що виходить з джерела s, дорівнювала величині потоку, що приходить у вершину t. **Обмеження (3)** як закон Кірхгофа вимагає, щоб у всіх проміжних вузлах вхідні значення потоків дорівнювали відповідним вихідним. **Обмеження (4)** вимагає, щоб шлях, що розшукується був зв’язним, тобто проходив скрізь вершини графа G. **Обмеження (5)** вимагає, щоб всі змінні моделі були невід’ємними цілочисельними змінними.

Завдання задачі: використовуючи заданий граф мережі, знайти максимальний потік з використанням надбудови “Пошук рішення” програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE.

Виконання. На робочому аркуші програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE потрібно певним чином розташувати вихідні дані і в певних комірках створити робочі формули для проміжних розрахунків методом перебору значень критерія оптимізації й обмежень.

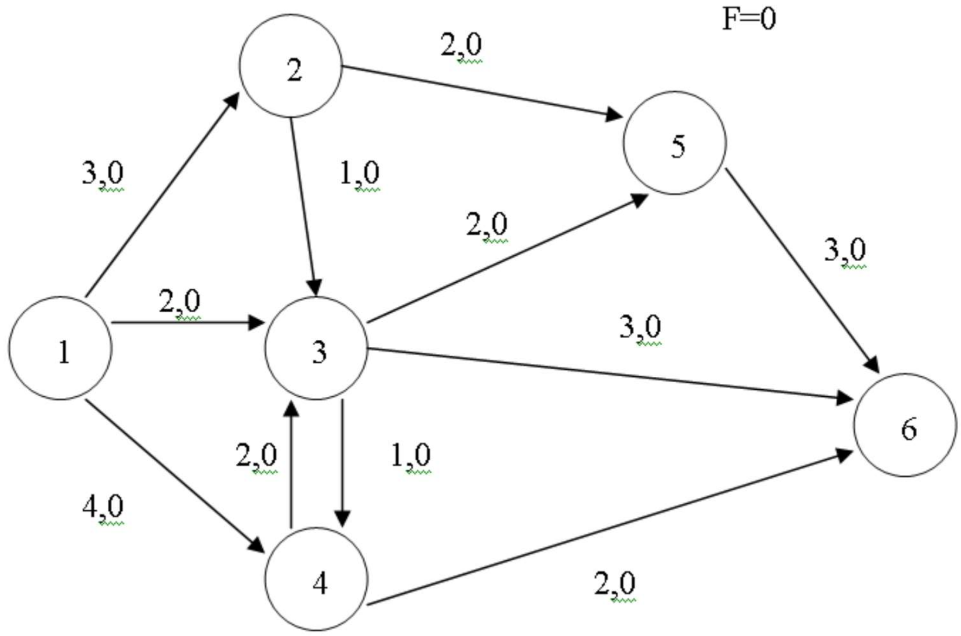


Рис.12.1. Пошук максимального потоку

Означення 1. *Запровадимо такі поняття й позначення.*

1. *Для довільної вершини v:*
   - in(v) — *множина дуг з кінцевою вершиною v (спрямованих у v);*
   - out(v) — *множина дуг з початковою вершиною v (спрямованих з v).*
2. *Мережею називають орієнтований граф* (G, V, E) *разом з ваговою функцією c: E →* $\mathbb{N}$ *(з множини ребер E у множину натуральних чисел* $\mathbb{N}$*) та вершинами a, z, що мають відповідно нульові степені входу й виходу:*
   - *жодна дуга не закінчується в вершині a, що записують так:* $|\,\mathrm{in}\,(a)\,| = 0$;
   - *жодна дуга не починається в вершині z, що записують так:* $|\,\mathrm{out}\,(z)\,| = 0$.
3. *Потоком у мережі* (G, V, E) *називають функцію f: E →* $\mathbb{N}_0$ *(з множини ребер E у множину невід'ємних цілих чисел* $\mathbb{N}_0$ *), при якій:*
   - *для довільної дуги e справджуються нерівності:* $0 \le f\,(e) \le c(e)$;
   - *для довільної вершини, відмінної від a та z, маємо:*

$$\Sigma_{\,e\,\in\,\mathrm{out}\,(v)} f\,(e) = \Sigma_{\,e\,\in\,\mathrm{in}\,(v)} f\,(e).$$

Мережа є моделлю водогону, у якій:
$c(e)$ — максимальна швидкість транспортування в напрямку, поданому дугою e;
$f\,(e)$ — (реальна) швидкість транспортування в напрямку, поданому дугою e.
Рівність сум в означенні потоку описує відсутність накопичення рідини на проміжних станціях, поданих вершинами графа.

Теорема 1. *Для довільного потоку f маємо:*

$$\Sigma_{\,e\,\in\,\mathrm{out}\,(a)} f\,(e) = \Sigma_{\,e\,\in\,\mathrm{in}\,(z)} f\,(e),$$

тобто сумарні потоки через джерело a і стік z збігаються.

Доведення. Нехай S — довільна підмножина V, що містить a, але не містить z, а $T = V \setminus S$. Додавши почастинно рівності з означення потоку за всіма вершинами S, відмінними від a, отримаємо еквівалентні рівності:

$$\sum_{v \in S \setminus \{a\}} \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) = \sum_{v \in S \setminus \{a\}} \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e)\ ;$$
$$\sum_{v \in S \setminus \{a\}} \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) - \sum_{v \in S \setminus \{a\}} \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) = 0;$$
$$\sum_{v \in S} \sum_{e \in \text{out}(v)} f(e) - \sum_{v \in S} \sum_{e \in \text{in}(v)} f(e) = \sum_{e \in \text{out}(a)} f(e)\ .$$

Позначимо через $(S; T)$ множину дуг, спрямованих з S у T, через $(T; S)$ — множину дуг, спрямованих з T в S.У лівій частині останньої рівності, якщо обидві вершини дуги e належать до S, то потік по e буде враховано в обох сумах, а відповідні доданки взаємно знищаться:

- від першої суми (зменшуваного) залишаться потоки по дугах з $(S; T)$;
- від другої суми (від'ємника) залишаться потоки по дугах з $(T; S)$.

Маємо:

$$\sum_{e \in (S;\, T)} f(e) - \sum_{e \in (T;\, S)} f(e) = \sum_{e \in \text{out}(a)} f(e)\ .$$

Отже, для довільної множини вершин S, що містить a і не містить z, різниця потоків, які виходять з S і входять в S, дорівнює потоку, що витікає з a.

Виберемо: $S = V \setminus \{z\}$, $T = \{z\}$, при яких:

- множина $(T; S)$ порожня, а відповідна сума у лівій частині останньої рівності дорівнює 0;
- множина $(S; T)$ є множиною дуг, спрямованих у z, яку позначають через in (z).

Врахувавши все це, маємо: $\sum_{e \in \text{out}(a)} f(e) = \sum_{e \in \text{in}(z)} f(e)$, що й потрібно було довести.

Означення 2. *Запровадимо такі поняття й позначення:*

1. *Величиною потоку f називають величину* $\sum_{e \in \text{out}(a)} f(e) = \sum_{e \in \text{in}(z)} f(e)$, *яку позначають через* val (f).
2. *Нехай S — довільна підмножина V, T = V \ S. Перерізом* $(S; T)$ *називають множину дуг, спрямованих з S у T. Якщо S містить джерело a і T містить стік z, то такий переріз називають a – z перерізом.*
3. *Величину* $C(S, T) = \sum_{e \in (S;\, T)} c(e)$ *називають пропускною спроможністю перерізу.*
4. *Потік* $f_{\max}$ *називають максимальним, якщо його величина не менша від величини будь-якого можливого потоку f у мережі:* val $(f) \le$ val $(f_{\max})$.
5. *a – z переріз* $(S; T)$ *називають мінімальним перерізом, якщо* $C(S, T)$ *не перевищує пропускну спроможність довільного a – z перерізу.*

Теорема 2. *Нехай f — довільний потік у мережі S — довільна підмножина V, що містить джерело a і не містить стік z, T = V \ S. Тоді* val $(f) \le C(S, T)$.

Доведення. val $(f) = \sum_{e \in (S;\, T)} f(e) - \sum_{e \in (T;\, S)} f(e) \le \sum_{e \in (S;\, T)} f(e) \le \sum_{e \in (S;\, T)} c(e) = C(S, T)$.

Наслідок 1. *Якщо* val $(f) = C(S, T)$ *при деяких потоці f та a – z перерізі* $(S; T)$, *то f — максимальний потік, C — мінімальний переріз.*

Наслідок 2. *Рівність* val $(f) = C(S, T)$ *справджується тоді й лише тоді, коли:*

- $f(e) = c(e)$ *при всіх e з* $(S; T)$;
- $f(e) = 0$ *при всіх e з* $(T; S)$.

Пошук максимального потоку здійснимо шляхом збільшення потоку, починаючи з нульового, таким чином. Формуємо ланцюг — послідовність дуг, що сполучають вершини a – z без урахування напряму дуг. Для кожного такого ланцюга збільшуємо загальний потік, якщо це можливо, змінивши потік лише вздовж ланок ланцюга:

- збільшуємо потік вздовж дуг, спрямованих вздовж напрямку руху від a до z без виходу за межі пропускної спроможності;

- зменшуємо потік вздовж дуг, спрямованих проти напрямку руху від a до z без виходу за область невід'ємних чисел.

Кожній вершині поставимо у відповідність упорядковану пару, у якій:

- перший елемент — попередня вершина в побудованому ланцюгу;
- другий елемент — резерв, тобто величина:
  - на яку можна збільшити потік, якщо орієнтація дуги збігається з напрямком руху від a до z;
  - на яку можна зменшити потік, якщо орієнтація дуги протилежна до напрямком руху від a до z.

12.2. Алгоритм Форда-Фалкерсона (Ford-Fulkerson algorithm)

1. Встановлюємо, що кожної вершини її попередник невизначений і резерв від'ємний (невизначений). Означимо резерв для вершини a як ∞, щоб не обмежувати резерв решти вершин. Покладемо $A = \{a\}$.
2. Якщо A — порожня множина, то припиняємо виконання алгоритму, бо потік максимізовано. Інакше вибираємо довільну вершину v з множини A і вилучаємо її з A.
3. Розглянемо всі вершини w, що задовольняють такі умови:
   - $(v; w)$ є дугою;
   - $f((v; w)) < c((v; w))$.

   Для кожної такої вершини w обчислимо мінімум з різниці $c((v; w)) - f((v;w))$ та резерву вершини v. Якщо обчислена на попередньому кроці величина більша за резерв вершини w, то:
   - замінюємо величину резерву w на цю величину;
   - (пере)означимо попередника w — вершину v;
   - якщо w відмінна від z, то долучаємо w до множини A.
4. Розглянемо всі вершини w, що задовольняють такі умови:
   - $(w; v)$ є дугою;
   - $0 < f((w; v))$.

   Для кожної такої вершини w обчислимо мінімум з $f((v;w))$ та резерву вершини v. Якщо обчислена на попередньому кроці величина більша за резерв вершини w, то:
   - замінюємо величину резерву w на цю величину;
   - (пере)означимо попередника w — вершину v;
   - якщо w відмінна від z, то долучаємо w до множини A.
5. Якщо резерв і попереднник вершини z невизначені, то переходимо до виконання пункту 2.
6. Якщо резерв і попереднник вершини z визначено, то:
   - використовуючи попередників вершин, відновлюємо ланцюг $a - z$;
   - для кожної дуги ланцюга, орієнтація якої збігається з напрямком руху від a до z вздовж ланцюга, збільшуємо потік на визначений резерв вершини z;
   - для кожної дуги ланцюга, орієнтація якої протилежна до напрямку руху від a до z вздовж ланцюга, зменшуємо потік на визначений резерв вершини z;
   - переходимо до виконання пункту 1.

Теорема 3. *Алгоритм Форда-Фалкерсона будує максимальний потік у мережі.*

Доведення. Позначимо через S множину всіх тих вершин, для яких визначено резерв під час останнього проходження алгоритму, $T = V \setminus S$. Множина S непорожня, бо містить вершину a. При цьому:

- якщо e — довільна дуга з $(S; T)$, то $f(e) = c(e)$, бо інакше для кінця дуги e визначено попередника;

- якщо *e* — довільна дуга з $(T; S)$, то $f(e) = 0$, бо інакше для кінця початку *e* визначено попередника;

Згідно з наслідками 1–2 f є максимальним потоком, а $(S; T)$ — мінімальним перерізом.

Наслідок 3. Потік f у мережі *є максимальним тоді й лише тоді, коли існує переріз* $(S; T)$, *при якому*

$$\mathrm{val}\,(f) = C(S, T).$$

Подамо **приклад програми мовою Turbo Pascal 7.0** з коментарями щодо стуктури вхідних і вихідних даних. **Це є одночасно імітаційна модель**.

```
{$I+}{$N+}              {Верхні межі:}
const nv_max=2000;     {кількості вершин}
    l_max=2147483647;        {потоку}
type  pointe=^edge;
    edge=record              {Дуга:}
    v,                    {початок}
    w: word;                 {кінець}
    c,        {пропускна спроможність}
    f: longint;              {потік}
        {вказівник на наступну дугу}
    b,          {з тим самим початком}
    e: pointe end;        {... кінцем}

    pointa=^forsetA;
    forsetA=record   {Елемент списку A}
    v: word;                {вершина}
    n: pointa end;  {наступний елемент}
  pointer=array[1..nv_max] of pointe;
  longers=array[1..nv_max] of longint;
var p:^pointer;    {Дуги з попередниками}
   r:^longers;         {Резерви вершин}
  n0,           {Вказівники на першу й}
  n,    {останню дуги з даним початком}
  m0,           {Вказівники на першу й}
m:^pointer; {останню дуги з даним кінцем}
 A1,          {Перший елемент списку A}
 A ,        {Поточний елемент списку A}
 Aw: pointa;       {Елемент w списку A}
  e: pointe;                 {Ребро}
 nv,                {Кількість вершин}
  aa,                     {Джерело}
   z,                       {Стік}
 v,w: word;      {Дуга: початок, кінець}
   c,        {і пропускна спроможність}
  rw: longint; {Можливий резерв вершини}
   o: text;                {Файл даних}
 stop: boolean; {Потрібно припинити цикл}

      {Долучення вершини w до множини A}
procedure includew;              BEGIN
if A1=nil then begin
```

```
new(A1);  {A порожня}
A1^.v:=w;
A1^.n:=nil       end           else begin
A:=A1;    {A не порожня}
stop:=false;
while (A^.v<>w) and (A^.n<>nil)do A:=A^.n;
if    A^.v<>w then                begin
new(Aw);    {Якщо w не належить до A}
 A^.n:=Aw;
Aw^.v:=w;
Aw^.n:=nil                   end end END;

 {Запис у вихідний файл даних про потік:
 у кожному рядку - початок і кінець дуги
 й потік вздовж неї. Дуги перераховано у
 порядку зростання початку, а для сталого
 початку - у тому самому порядку, як вони
          зустрічалися у вхідному файлі}
procedure output;                  BEGIN
assign (o,'FLOW.RES');   rewrite(o);
for v:=1 to nv do                 begin
if n0^[v]<>nil then                begin
e:=n0^[v];
stop:=false;
repeat writeln(o,v,' ',e^.w,' ',e^.f);
      if e^.b=nil then stop:=true
                 else e:=e^.b
until stop                       end end;
close(o);  halt                        END;
                             BEGIN
nv:=0;  new(n0); new(n); new(m0); new(m);
for v:=1 to nv_max do              begin
n0^[v]:=nil;
m0^[v]:=nil                        end;
assign(o,'FLOW.DAT');   reset(o);
{Зчитування рядків вхідного файлу, кожний
з яких містить: початок дуги, кінець дуги
              і пропускну спроможність}
REPEAT readln(o,v,w,c);
      if v>nv then nv:=v;
      if w>nv then nv:=w;
      new(e);
      e^.v:=v;
      e^.w:=w;
      e^.c:=c;
      e^.f:=0;
      e^.b:=nil;
      e^.e:=nil;
             {Облік дуг з початком v}
      if n0^[v]=nil then n0^[v]   :=e
                 else  n^[v]^.b:=e;
      n^[v]:=e;
               {Облік дуг з кінцем w}
```

```
      if m0^[w]=nil then m0^[w]   :=e
                  else  m^[w]^.e:=e;
      m^[w]:=e;
UNTIL  seekeof(o);        close(o);
new(p);   new(r);   new(A1);
aa:=1;                         {Джерело}
z:=nv;                          {Стік}
REPEAT                          {Крок 1}
for v:=1 to nv do begin
p^[v]:=nil;
r^[v]:=-1          end;
r^[aa]:=l_max;
A1^.v:=aa;
A1^.n:=nil;
REPEAT   if A1=nil then output else begin
                          {Кроки 2-5}
v:=A1^.v;    {Вилучення першого елемента
                         зі списку A}
if A1^.n=nil then A1:=nil
            else         begin
                 A:=A1;
                A1:=A1^.n;
                dispose(A) end;
n^[v]:=n0^[v];
stop:=false;
repeat            {Розгляд дуг (v;w)}
  w:=n^[v]^.w;
  if n^[v]^.f < n^[v]^.c       then begin
     rw:=n^[v]^.c-n^[v]^.f     ;
     if r^[v] < rw then rw:=r^[v];
     if r^[w] < rw then            begin
       r^[w]:=rw;
       p^[w]:=n^[v];
       if w<>z then includew     end end;
     if n^[v]^.b<>nil then n^[v]:=n^[v]^.b
                  else stop:=true;
until stop;
if m0^[v]<>nil then                begin
   m^[v]:=m0^[v];
   stop:=false;
   repeat            {Розгляд дуг (w;v)}
     w:=m^[v]^.v;
     if  0 < m^[v]^.f         then begin
       rw:=m^[v]^.f;
        if r^[v] < rw then rw:=r^[v];
        if r^[w] < rw then         begin
           r^[w]:=rw;
           p^[w]:=m^[v];
           if w<>z then includew  end end;
     if m^[v]^.e<>nil then m^[v]:=m^[v]^.e
                  else stop:=true;
   until stop                  end end
UNTIL r^[z]>0;
```

```
w:=z;                     {Крок 6}
repeat e:=p^[w];
     if w =e^.w then   begin
       w:=e^.v;
       e^.f:=e^.f+r^[z] end else begin
       e^.f:=e^.f-r^[z];
       w:=e^.w                end
until  w=aa;
UNTIL A1=nil;  output              END.
```

12.3. Задача на потік мінімальної вартості

Розв'язати оптимізаційну потокову задачу на потік мінімальої вартості методами потокового математичного програмування і знайти потік мінімальної вартості з заданою матрицею загальних попиту (100) та пропозиції (100), питомих витрат і пропускної спроможності (для зваженого орієнтованого графа) з використанням надбудови "Пошук рішення" MS EXCEL. Знайти потік перевозки грузів, щоб:

1. Загальні витраты = Потік*Витраты -> min
2. При обмеженнях: Вихід – Вхід (Сума) = Попит/Пропозиція;
3. Потоки <= Пропускна спроможність,
4. Всі Потоки >= 0.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Задача про поток минимальной стоимости													
2	Узлы							Дуги						
3	Узол	Сл/Пр	Т-цена	Вход	Выход	Сума		Поток	Н-стоим	Начало	Конец	Затраты	ПС	Всего
4	Киев	100		0	0	0				Киев	Минск	4	70	0
5	Минск			0	0	0				Киев	Варшава	6	50	0
6	Варшава			0	0	0				Киев	Талин	3	45	0
7	Талин			0	0	0				Минск	Париж	3	20	0
8	Москва			0	0	0				Варшава	Париж	2	80	0
9	Осло			0	0	0				Париж	Варшава	2	90	0
10	Берлин			0	0	0				Талин	Варшава	3	100	0
11	Мюнхен			0	0	0				Варшава	Талин	3	60	0
12	Лондон			0	0	0				Варшава	Осло	6	55	0
13	Париж			0	0	0				Талин	Москва	3	85	0
14	Вена	-100		0	0	0				Москва	Осло	3	25	0
15	Даос			0	0	0				Осло	Мюнхен	4	39	0
16										Осло	Берлин	3	80	0
17										Париж	Мюнхен	6	200	0
18										Париж	Лондон	5	100	0
19										Париж	Вена	8	90	0
20										Мюнхен	Лондон	3	24	0
21										Мюнхен	Даос	4	39	0
22										Берлин	Даос	7	28	0
23										Лондон	Вена	3	27	0
24										Даос	Вена	3	39	0
25										Вена	Даос	3	20	0
26													Об_затраты=	0

Рис.12.2.Задача потоку мінімальної вартості

Математична модель задачі про потік мінімальної вартості.

Як будь-яка оптимізаційна модель, складається з двох частин – **критерія оптимізації (цільової функції)** й **системи обмежень**. Як будь-яка **потокова (мережева)** оптимізаційна модель, вона обов'язково пов'язана з відповідним **графом** (схемою **вузлів**, що з'єднані **ребрами або дугами**). Це класична потокова задача, де дуги мережі характеризуються питомими витратами на перевезення і пропускною спроможністю. Необхідно визначити оптимальні маршрути перевезення заданого обсягу від вузла-джерела до кінцевого вузла мінімальної загальної вартості. При цьому всі проміжні вузли мають нульові потенціали й є сугубо транзитними. Як правило, транспортна мережа задається змішано-орієнтованою сіткою, початковими даними є: питомі витрати на кожній дузі між всіма вузлами, пропускна спроможність кожної дуги між вузлами, попит й пропозиція.

Для отримання математичної моделі задачі введемо невід'ємні (позитивні або такі, що дорівнюють 0) змінні Xij, які інтерпретуються як величина потоку по дузі (i,j). Тоді математична модель **прямої задачі** може мати, наприклад, наступний вигляд:

Критерій оптимізації (цільова функція):

$$\sum_{j=1}^{n} CsjXsj \rightarrow MIN \tag{12.6}$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xsj - \sum_{i=1}^{n} Xii = (ПОПИТ \,/\, ПРОПОЗИЦІЯ) & (12.7) \\ \sum_{i=1}^{n} Xij - \sum_{i=1}^{n} Xji = 0(\forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t) & (12.8) \\ 0 \leq Xij \leq Pij & (12.9) \\ Xij \in Z(\forall i, j \in \{1,2,...,n\}) & (12.10) \end{cases}$$

де: Xij – пошукові значення потоків;
Csj – питомі витрати на дугах;
Pij – пропускна спроможність;
Z – множина цілих чисел.

Критерій оптимізації (1) вимагає досягнення мінімального значення потоку в графі. **Обмеження (2)** вимагає, щоб величина потоку, що виходить з джерела s, дорівнювала величині потоку, що приходить у вершину t з врахуванням відношення "**Попит/Пропозиція**". **Обмеження (3),** як закон Кірхгофа вимагає, щоб у всіх проміжних вузлах вхідні значення потоків дорівнювали відповідним вихідним. **Обмеження (4)** вимагає, щоб шлях, що розшукується був зв'язним, тобто проходив скрізь вершини графа G. **Обмеження (5)** вимагає, щоб всі змінні моделі були невід'ємними цілочисельними змінними.

Завдання задачі: використовуючи заданий граф мережі, знайти мінімальний потік з використанням надбудови "Пошук рішення" програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE.

Виконання. На робочому аркуші програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE потрібно певним чином розташувати вихідні дані і в певних комірках створити робочі формули для проміжних розрахунків методом перебору значень критерія оптимізації й обмежень.

ЛЕКЦІЯ 13
ПОТОКОВІ ЗАДАЧІ. ЗАДАЧА НА НАЙКОРОТШИЙ ШЛЯХ, ЗАДАЧА НА НАЙДОВШИЙ ШЛЯХ (СІТЬОВИЙ ГРАФІК). МЕРЕЖЕВА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА.

13.1. Задача пошуку найкоротшого шляху.

Вирішити оптимізаційну потокову задачу методами потокового математичного програмування і знайти найкоротший шлях для представленої мережі (для зваженого орієнтованого графа) з використанням надбудови "Пошук рішення" MS EXCEL

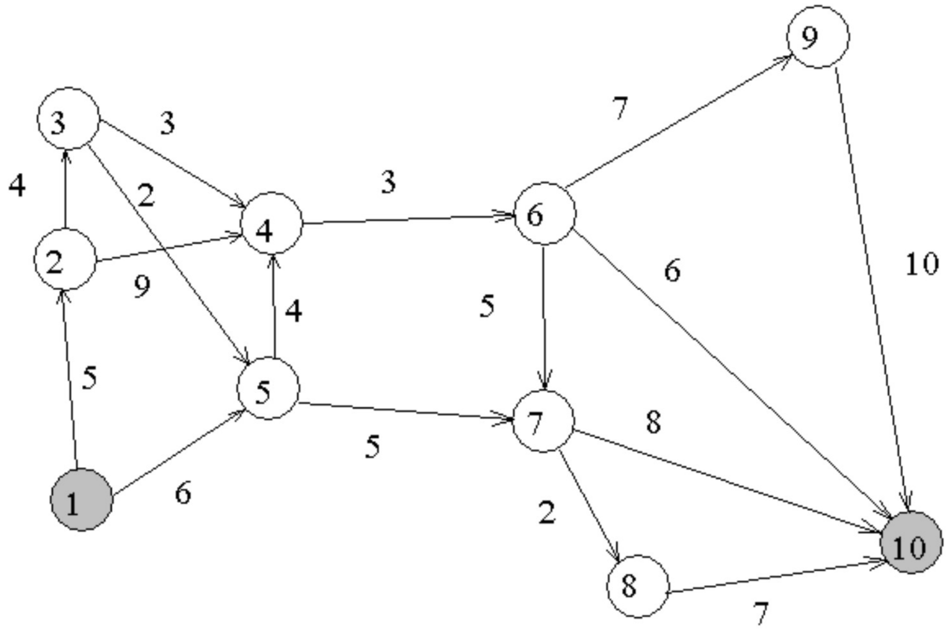


Рис.13.1. Граф задачи пошуку найкоротшого шляху

Задача о критическом пути

Операции (работы)

	Название операции	Дуга	Начало	Конец	Пр-сть	Н-стоим
4	Разработка документации		1	2	3	
5	Подготовка територии		2	3	8	
6	Заказ материалов		2	4	5	
7	Подготовка кадров		3	4	5	
8	Доставка материалов		3	6	6	
9	Закладывание фундамента		4	5	9	
10	Ограждения територии		5	6	3	
11	Строительство основных елементов		5	7	2	
12	Оформления благо-ва		5	9	5	
13	Строительство стен		6	7	4	
14	Строительство подвала		6	8	7	
15	Строительство окон		7	8	6	
16	Строительство крыши		7	9	5	
17	Внутрение работы		8	9	10	

События

Событие	№ узла	Вход	Выход	Сума	Огра-ничение	Т-цена
Старт	1	0	0	0	1	
Разрешение на строит.	2	0	0	0	0	
Заказ материалов	3	0	0	0	0	
Начало строит работ	4	0	0	0	0	
Закладывание фундамента	5	0	0	0	0	
Подготовка к строит стен	6	0	0	0	0	
Окончание строит основных элементов	7	0	0	0	0	
Окончание внешних работ	8	0	0	0	0	
Готовность к здаче	9	0	0	0	-1	
					Длитель ность	0

Рис. 13.2 Математична модель задачі про пошук найкоротшого шляху.

Математична модель задачі про пошук найкоротшого шляху **– булева** або **двійкова задача –** змінні можуть набувати виключно два значення: 0 або 1.

Як будь-яка оптимізаційна модель, вона складається з двох частин – **критерія оптимізації (цільової функції)** й **системи обмежень**. Як будь-яка **потокова (мережева)** оптимізаційна модель, вона обов'язково пов'язана з відповідним **графом** (схемою **вузлів**, що з'єднані **ребрами або дугами**).

Для отримання математичної моделі задачі введемо булеви невід'ємні (позитивні або такі, що дорівнюють 0) змінні Xij, які інтерпретуються наступним чином: Xij=0 якщо дуга (i,j) не входить у маршрут і Xij=1, якщо дуга входить у маршрут. Тоді математична модель може мати, наприклад, наступний вигляд:

Критерій оптимізації (цільова функція):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} CijXij \rightarrow MIN \qquad (13.1)$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xsj - \sum_{i=1}^{n} Xis = 1 & (13.2) \\ \sum_{j=1}^{n} Xtj - \sum_{i=1}^{n} Xit = -1 & (13.3) \\ \sum_{i=1}^{n} Xij - \sum_{i=1}^{n} Xji = 0(\forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t) & (13.4) \\ Xij \in \{0,1\} & (13.5) \\ Xij \in Z(\forall i, j \in \{0,1\}) & (13.6) \end{cases}$$

де: Xij – пошукові значення двійкової ознаки належності до маршруту;
Cij – відстань між пунктами (вершинами на графі);
Z – множина цілих чисел.

Обмеження (2) вимагає,щоб пошуковий шлях починався у вершині *S*. Обмеження (3) вимагає, щоб пошуковий шлях закінчувався у вершині *t*. Обмеження (4) вимагає, щоб пошуковий шлях був зв’язним, тобто проходив через вершини графа G. Обмеження (5,6) вимагають, щоб всі змінні моделі були булевими (двійковими) без проміжних значень.

Завдання задачі: використовуючи заданий граф, знайти найкоротший шлях між вихідною (початковою) та кінцевою вершинами за допомогою надбудови “Пошук рішення” програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE або за допомогою інших програм.

Якщо, наприклад, у заданому графі 10 вершин і 16 дуг, то в математичній моделі буде 16 (шістнадцять) змінних X: $X_{1,2}$; $X_{1,5}$; $X_{2,3}$; $X_{2,4}$; $X_{3,4}$; $X_{3,5}$; $X_{4,6}$; $X_{5,4}$; $X_{5,7}$; $X_{6,9}$; $X_{6,10}$; $X_{6,7}$; $X_{7,8}$; $X_{7,10}$; $X_{8,10}$; $X_{9,10}$.

Критерій оптимізації і обмеження математичної моделі такої задачі має наступний вигляд:

$$F = X_{1,2}+X_{1,5}+X_{2,3}+X_{2,4}+X_{3,4}+X_{3,5}+X_{4,6}+X_{5,4}+ \\ +X_{5,7}+X_{6,9}+X_{6,10}+X_{6,7}+X_{7,8}+X_{7,10}+X_{8,10}+X_{9,10} \rightarrow MIN \qquad (13.7)$$

Система обмежень виглядає так:

$$\begin{cases} X_{1,2} + X_{1,5} = 1; \\ X_{6,10} + X_{7,10} + X_{8,10} + X_{9,10} = 1; \\ X_{1,2} - X_{2,3} - X_{2,4} = 0; \\ X_{2,3} - X_{3,4} + X_{3,5} = 0; \\ X_{2,4} + X_{3,4} - X_{4,6} = 0; \\ X_{1,5} + X_{3,5} - X_{5,4} - X_{5,7} = 0; \\ X_{4,6} + X_{5,7} - X_{6,9} - X_{6,10} - X_{6,7} = 0; \\ X_{5,7} + X_{6,7} - X_{7,8} - X_{7,10} = 0; \\ X_{7,8} - X_{8,10} = 0; \\ X_{6,9} - X_{9,10} = 0; \\ X_{1,2}; X_{1,5}; X_{2,3}; X_{2,4}; X_{3,4}; X_{3,5}; X_{4,6}; X_{5,4}; X_{5,7}; X_{6,9}; X_{6,10}; X_{6,7}; X_{7,8}; X_{7,10}; X_{8,10}; X_{9,10}, \in \{0,1\} \end{cases} \qquad (13.8)$$

13.2. Задача на критичний шлях

Розв'язати оптимізаційну потокову задачу на критичний шлях методами потокового математичного програмування і знайти критичний для мережевого графіку з заданою матрицею продуктивності праці (для зваженого орієнтованого графа) з використанням надбудови "Пошук рішення" MS EXCEL.

Математична модель задачі про пошук найдовшого шляху – "задача про критичний шлях".

За допомогою такої моделі будується так званий **сітьовий (мережевий) графік**, без якого не обходиться жодне будівництво чи інший важливий проект і який дозволяє:
а) визначити **критичний найдовший маршрут виконання робіт**;
б) визначити **критичний (найдовший) термін виконання робіт** будь-якого проекту;
в) **сконцентрувати усі важливі ресурси** (людські, матеріальні, обладнання, фінанси, паливо і інші) у першу чергу саме на роботи критичного маршруту з метою своєчасного закінчення всього проекту.

Математична модель задачі про пошук найдовшого шляху **– булева або двійкова задача –** змінні можуть набувати виключно два значення: 0 або 1.

Як будь-яка оптимізаційна модель, вона складається з двох частин – **критерія оптимізації (цільової функції)** й **системи обмежень**. Як будь-яка **потокова (мережева)** оптимізаційна модель, вона обов'язково пов'язана з відповідним **графом** (схемою **вузлів**, що з'єднані **ребрами або дугами**).

Для отримання математичної моделі задачі введемо булеви невід'ємні (позитивні або такі, що дорівнюють 0) змінні Xij, які інтерпретуються наступним чином: Xij=0 якщо дуга (i,j) не входить у маршрут і Xij=1, якщо дуга входить у маршрут. Тоді математична модель може мати, наприклад, наступний вигляд:

Критерій оптимізації (цільова функція):

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} CijXij \rightarrow MAX \qquad (13.9)$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xsj - \sum_{i=1}^{n} Xis = 1 & (13.10)\\ \sum_{j=1}^{n} Xtj - \sum_{i=1}^{n} Xit = -1 & (13.11)\\ \sum_{i=1}^{n} Xij - \sum_{i=1}^{n} Xji = 0(\forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t) & (13.12)\\ Xij \in \{0,1\} & (13.13)\\ Xij \in Z(\forall i, j \in \{0,1\}) & (13.14) \end{cases}$$

де: Xij – пошукові значення двійкової ознаки належності до найдовшого маршруту;
Cij – відстань між пунктами (вершинами на графі);
Z – множина цілих чисел.

Обмеження (2) вимагає,щоб пошуковий шлях починався у вершині *S*. Обмеження (3) вимагає, щоб пошуковий шлях закінчувався у вершині *t*. Обмеження (4) вимагає, щоб пошуковий шлях був зв'язним, тобто проходив через вершини графа G. Обмеження (5,6) вимагають, щоб всі змінні моделі були булевими (двійковими) без проміжних значень.

Завдання задачі: використовуючи заданий граф, знайти найдовший шлях між вихідною (початковою) та кінцевою вершинами за допомогою надбудови "Пошук рішення" програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE або за допомогою інших програм.

Якщо, наприклад, у заданому графі 10 вершин і 16 дуг, то в математичній моделі буде 16 (шістнадцять) змінних X: $X_{1,2}$; $X_{1,5}$; $X_{2,3}$; $X_{2,4}$; $X_{3,4}$; $X_{3,5}$; $X_{4,6}$; $X_{5,4}$; $X_{5,7}$; $X_{6,9}$; $X_{6,10}$; $X_{6,7}$; $X_{7,8}$; $X_{7,10}$; $X_{8,10}$; $X_{9,10}$.

Критерій оптимізації математичної моделі такої задачі має наступний вигляд:

$$F= X_{1,2}+X_{1,5}+X_{2,3}+X_{2,4}+X_{3,4}+X_{3,5}+X_{4,6}+ \\ +X_{5,4}+X_{5,7}+X_{6,9}+X_{6,10}+X_{6,7}+X_{7,8}+X_{7,10}+X_{8,10}+X_{9,10} \rightarrow MAX \qquad (13.15)$$

Система обмежень виглядає так:

$$\begin{cases} X_{1,2} + X_{1,5} = 1; \\ X_{6,10} + X_{7,10} + X_{8,10} + X_{9,10} = 1; \\ X_{1,2} - X_{2,3} - X_{2,4} = 0; \\ X_{2,3} - X_{3,4} + X_{3,5} = 0; \\ X_{2,4} + X_{3,4} - X_{4,6} = 0; \\ X_{1,5} + X_{3,5} - X_{5,4} - X_{5,7} = 0; \\ X_{4,6} + X_{5,7} - X_{6,9} - X_{6,10} - X_{6,7} = 0; \\ X_{5,7} + X_{6,7} - X_{7,8} - X_{7,10} = 0; \\ X_{7,8} - X_{8,10} = 0; \\ X_{6,9} - X_{9,10} = 0; \\ X_{1,2}; X_{1,5}; X_{2,3}; X_{2,4}; X_{3,4}; X_{3,5}; X_{4,6}; X_{5,4}; X_{5,7}; X_{6,9}; X_{6,10}; X_{6,7}; X_{7,8}; X_{7,10}; X_{8,10}; X_{9,10} \in \{0,1\} \end{cases} \qquad (13.16)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Задача о критическом пути													
2	Операции (работы)							События						
3	Название операции	Дуга	Начало	Конец	Пр-сть	Н-стоим		Событие	№ узла	Вход	Выход	Сума	Огра-ничение	Т-цена
4	Разработка документации		1	2	3			Старт	1	0	0	0	1	
5	Подготовка територии		2	3	8			Разрешение на строит.	2	0	0	0	0	
6	Заказ материалов		2	4	5			Заказ материалов	3	0	0	0	0	
7	Подготовка кадров		3	4	5			Начало строит работ	4	0	0	0	0	
8	Доставка материалов		3	6	6			Закладывание фундамента	5	0	0	0	0	
9	Закладывание фундамента		4	5	9			Подготовка к строит стен	6	0	0	0	0	
10	Ограждения територии		5	6	3			Окончание строит основных элементов	7	0	0	0	0	
11	Строительство основных елементов		5	7	2			Окончание внешних работ	8	0	0	0	0	
12	Оформления благо-ва		5	9	5			Готовность к здаче	9	0	0	0	-1	
13	Строительство стен		6	7	4								Длитель ность	0
14	Строительство подвала		6	8	7									
15	Строительство окон		7	8	6									
16	Строительство крыши		7	9	5									
17	Внутрение работы		8	9	10									

Рис.13.3. Задача про критичний шлях

13.3. Мережева транспортна задача

З використанням надбудови "Пошук рішення" MS EXCEL знайти потік розподілу продукту, щоб виконати умови:

1. Загальні витрати = Поток*Затраты → min.
2. При обмеженнях: Вихід – Вхід (Сума) = Попит/Пропозиція,
3. Всі Потоки >= 0.

Математична модель мережевої транспортної задачі.

Як будь-яка оптимізаційна модель, складається з двох частин – **критерія оптимізації (цільової функції)** й **системи обмежень**. Як будь-яка **потокова (мережева)** оптимізаційна модель, вона обов'язково пов'язана з відповідним **графом** (схемою **вузлів**, що з'єднані

ребрами або дугами). Це класична потокова задача, де дуги мережі характеризуються питомими витратами на перевезення. Необхідно визначити оптимальні маршрути перевезення заданого обсягу товарів від вузлів-джерел (Пропозиції) до кінцевого вузла з мінімальною загальною вартістю (Попит). При цьому необов'язково проміжні вузли мають нулеві потенціали й є сугубо транзитними. Як правило, транспортна мережа задається змішано-орієнтованою сіткою, початковими даними є: питомі витрати (відстань) на кожній дузі між всіма вузлами, пропускна спроможність кожної дуги між вузлами, попит й пропозиція.

Приклад: Ставиться завдання в межах економічного региону задовольнити попит на певний продукт оптимальним чином (критерій – мінімум загальних затрат на перевезення), використовуючи розподілені у територіальному просторі пропозиції і існуючу транспортну мережу.

Узагальнена модель

1. Знайти Потік розподілу продукту так, щоб
2. Загальні затрати = Потік*Затрати →MIN
3. При обмеженнях: Вихід – Вхід (Сума) = Попит/Пропозиції в різних вузлах, а також всі Потоки >= 0.

Для отримання математичної моделі задачі введемо невід'ємні (позитивні або такі, що дорівнюють 0) змінні Xij, які інтерпретуються як величина потоку по дузі (i,j). Тоді математична модель **прямої задачі** може мати, наприклад, наступний вигляд:

Критерій оптимізації (цільова функція):

$$\sum_{j=1}^{n} CsjXsj \to MIN \qquad (13.7)$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xsj - \sum_{i=1}^{n} Xii = ПОПИТ\ /\ ПРОПОЗИЦІЯ & (13.8) \\ \sum_{i=1}^{n} Xij - \sum_{i=1}^{n} Xji \neq 0 (\forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t) & (13.9) \\ 0 \leq Xij \leq Pij & (13.20) \\ Xij \in Z(\forall i, j \in \{1,2,...,n\}) & (13.21) \end{cases}$$

де: Xij – пошукові значення потоків;
Csj – питомі вирати на дугах;
Pij – пропускна спроможність;
Z – множина цілих чисел.

Критерій оптимізації (1) вимагає досягнення мінімальної вартості перевезень в графі. **Обмеження (2)** вимагає, щоб величина потоку, що виходить з джерела s, дорівнювала величині потоку, що приходить у вершину t. **Обмеження (3)** не вимагає, щоб у всіх проміжних вузлах вхідні значення потоків дорівнювали відповідним вихідним, тому що вузол одночасно може бути постачальником товару й транзитним пунктом. **Обмеження (4)** вимагає, щоб шлях, що розшукується був зв'язним, тобто проходив скрізь вершини графа G. **Обмеження (5)** вимагає, щоб всі змінні моделі були невід'ємними цілочисельними змінними.

Завдання задачі: використовуючи заданий граф мережі, знайти мінімальну вартість перевезень з використанням надбудови "Пошук рішення" програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE.

Виконання. На робочому аркуші програми електронних таблиць EXCEL MS OFFICE потрібно певним чином розташувати вихідні дані і в певних комірках створити робочі формули для проміжних розрахунків методом перебору значень критерія оптимізації й обмежень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Сетевая транспортная задача													
2	Узлы								Дуги					
3	Узол	Сп/Пр	Т-цена	Вход	Выход	Сума	Остаток		Поток	Н-стоим	Начало	Конец	Затраты	Всего
4	Киев	100		0	0	0	100				Киев	Минск	4	0
5	Минск	-5		0	0	0	-5				Киев	Варшава	6	0
6	Варшава	-40		0	0	0	-40				Киев	Талин	3	0
7	Талин	-6		0	0	0	-6				Минск	Париж	3	0
8	Москва	21		0	0	0	21				Варшава	Париж	2	0
9	Осло	9		0	0	0	9				Париж	Варшава	2	0
10	Берлин	6		0	0	0	6				Талин	Варшава	3	0
11	Мюнхен	4		0	0	0	4				Варшава	Талин	3	0
12	Лондон	-7		0	0	0	-7				Варшава	Осло	6	0
13	Париж	-10		0	0	0	-10				Талин	Москва	3	0
14	Вена	-25		0	0	0	-25				Москва	Осло	3	0
15	Даос	-32		0	0	0	-32				Осло	Мюнхен	4	0
16											Осло	Берлин	3	0
17											Париж	Мюнхен	6	0
18											Париж	Лондон	5	0
19											Париж	Вена	8	0
20											Мюнхен	Лондон	3	0
21											Мюнхен	Даос	4	0
22											Берлин	Даос	7	0
23											Лондон	Вена	3	0
24											Даос	Вена	3	0
25											Вена	Даос	3	0
26													Об_затраты=	0

Рис.13.4. Мережева транспортна задача

13.4. Задача Комівояжера.

Розв'язати оптимізаційну потокову двійкову (булеву) задачу комівояжера методами потокового математичного програмування і знайти найкоротший маршрут для мережі з заданою матрицею відстаней (для зваженого неорієнтованого графа) з використанням надбудови "Пошук рішення" MS EXCEL.

Приклад 1.

Міста	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

Це найскладніша оптимізаційна задача. Роз'язок займає від 5 до 15 хвилин на звичайному комп'ютері. Майже єдина задача, де необхідно використати три таблиці.

Математична модель.

Визначімо булеви змінні задачі: $x_{ij} = 1$, якщо комівояжер переїзджає з міста i в місто j, и $x_{ij} = 0$, якщо комівояжер не переїзджає з міста i в місто j.

Тоді задача заключається у визначенні мінімуму цільової функції F→ MIN

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (13.22)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n$$ – тільки один в'їзд в місто j, (13.23)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n$$ – тільки один виїзд з міста i. (13.24)

В моделі задачі комівояжера необхідна ще одна умова, а саме:

	A	B	C	D	E	F
1		Матрица переменных				
2		Париж	Берлин	Рим	Лондон	Ограничения
3	Париж	0	0	0	1	1
4	Берлин	1	0	0	0	1
5	Рим	0	1	0	0	1
6	Лондон	0	0	1	0	1
7	Ограничения:	1	1	1	1	ЦФ
8	Переменные u:	0	0	-1	-2	610
9		Матрица стоимостей проезда				
10		Париж	Берлин	Рим	Лондон	
11	Париж	0	270	430	160	
12	Берлин	70	0	160	10	
13	Рим	200	130	0	350	
14	Лондон	210	160	250	0	
15	Ограничения по дополнительным переменным U_i					
16	Имя	u2	u3	u4	n=	4
17	u2	0,00	1,00	2,00		
18	u3	2,00	0,00	1,00	n-2=	2
19	u4	-2,00	2,00	0,00		

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2, \quad i \ne j, \; i, j = 2, \dots, n \qquad (13.25)$$

Ця спеціальна умова забезпечує усунення декількох непов'язаних між собою маршрутів і циклів, тобто забезпечує пересування комівояжера за замкнутим частково маршрутом.

Отже, оптимальне рішення: цільова функція F = 18, маршрут: 1 – 4 – 3 – 5 – 2 – 1.

Приклад 2 і 3.

Рис.13.5. Три таблиці задачі Комівояжера

	A	B	C	D	E	F	G
1	ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА						
2		Матрица переменных					Ограничения
3		1	2	3	4	5	
4	1	0	0	0	0	0	=СУММ(B4:F4)
5	2	0	0	0	0	0	=СУММ(B6:F6)
6	3	0	0	0	0	0	=СУММ(B6:F6)
7	4	0	0	0	0	0	=СУММ(B7:F7)
8	5	0	0	0	0	0	=СУММ(B8:F8)
9	Ограничения	=СУММ(B4:B8)	=СУММ(C4:C8)0	=СУММ(D4:D8)0	=СУММ(E4:E8)0	=СУММ(F4:F8)0	
10	Целевая функция в B10	=СУММПРОИЗВ (B4:F8;B14:F18)					
11	Переменные u в C11:F11						
12		Матрица расстояний					
13		1	2	3	4	5	
14	1	10000	9	8	4	10	
15	2	6	10000	4	5	7	
16	3	5	3	10000	6	2	
17	4	1	7	2	10000	8	
18	5	2	4	5	2	10000	
19	Формулы для Ограничений по дополнительным переменным u						
20		u2	u3	u4	u5		
21	u2	=C11-C11+4*C5	=C11-D11+4*D5	=C11-E11+4*E5	=C11-F11+4*F5		
22	u3	=D11-C11+4*C6	=D11-D11+4*D6	=D11-E11+4*E6	=D11-F11+4*F6		
23	u4	=E11-C11+4*C7	=E11-D11+4*D7	=E11-E11+4*E7	=E11-F11+4*F7		
24	u5	=F11-C11+4*C8	=F11-D11+4*D8	=F11-E11+4*E8	=F11-F11+4*F8		

Рис. 13.6. Три таблиці задачі Комівояжера в EXCEL

ЛЕКЦІЯ 14. МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ІГОР

...Гра не філософія і не релігія,
це особлива дисципліна, за своїм характером
вона найближча до мистецтва...”
Г.Гессе, “Гра в бісер”

14.1. Елементи теорії ігор

▼ Типові приклади

Приклад 1. Фірма виготовляє устаткування для легкої промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А-1, А-2, А-3.* Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М-1, М-2, М-3* залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл. 14.1.

Таблиця 14.1.

Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум.од.

	Модифікація

Тип	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає вузв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в будь-кому бипадку не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$\min\limits_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5$;

$\min\limits_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7$;

$\min\limits_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5$;

$\alpha = \max\limits_{j} \min\limits_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому випадку, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших умов вона дає найменші витрати 7 тис.од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри:

$\max\limits_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10$;

$\max\limits_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7$;

$\max\limits_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9$;

$\beta = \min\limits_{i} \max\limits_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ верхня ціна гри:

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших витрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Приклад 2. Маємо гру гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

Гравець В

$$\text{Гравець А}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри й оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання.

Для гравця А перша стратегія є домінуючою над третьою, тому третю стратегію треба вилучити.

Для гравця В перша стратегія є домінуючою на п’ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для гравця В. Отже, маємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Розглянемо стратегії гравця А:

$\min\limits_{i=1} a_{ij} = \min\{6;3;8;5\} = 3$;

$\min\limits_{i=2} a_{ij} = \min\{6;5;7;6\} = 5$;

$\min\limits_{i=3} a_{ij} = \min\{4;4;3;8\} = 3$;

$\alpha = \max\limits_{j} \min\limits_{i} a_{ij} = \max\{3;5;3\} = 5$ нижня ціна гри.

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати α=5, а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною в даній грі.

Для гравця В:

$\max\limits_{j=1} a_{ij} = \max\{6;6;4\} = 6$;

$\max\limits_{j=2} a_{ij} = \max\{3;5;4\} = 5$;

$\max\limits_{j=3} a_{ij} = \max\{8;7;3\} = 8$;

$\max\limits_{j=4} a_{ij} = \max\{5;6;8\} = 8$;

$\beta = \min\limits_{i} \max\limits_{j} a_{ij} = \min\{6;5;8;8\} = 5$ верхня ціна гри.

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною в грі. Оскільки α=β, то ця гра має сідлову точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максимінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих його стратегій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

Приклад 3. Фірма розробила шість бізнес-планів $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ для їх здійснення в наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено п'ять ситуацій $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$. Для кожного варіанта $X_i \quad (i = \overline{1,6})$ бізнес-плану та зовнішньої ситуації $Y_j \quad (i = \overline{1,5})$ обчислені прибутки, які наведені у табл. 14.2.

Таблиця 14.2

	Зовнішня ситуація

Варіант бізнес-	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн.				
X_1	1,	1,	2,	2,	3,
X_2	1,	1,	2,	2,	3,
X_3	1,	1,	2,	2,	2,
X_4	2,	2,	3,	2,	1,
X_5	2,	2,	3,	1,	1,
X_6	2,	2,	3,	2,	2,

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів. Розв'язати приклад за допомогою програм *Excel* і *Mathcad*, зведенням матричної гри до задачі лінійного програмування.

Розв'язання.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

$\alpha = max\ \{min(1{,}0;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}7;\ 3{,}2);\ min(1{,}2;\ 1{,}4;\ 2{,}5;\ 2{,}9;\ 3{,}1);\ min(1{,}3;\ 1{,}6;\ 2{,}4;\ 2{,}8;\ 2{,}1);\ min(2{,}1;\ 2{,}4;\ 3;\ 2{,}7;\ 1{,}8);\ min(2{,}4;\ 2{,}9;\ 3{,}4;\ 1{,}9;\ 1{,}5); min(2{,}6;\ 2{,}7;\ 3{,}1;\ 2{,}3;\ 2)\} = max\{1{,}0;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}8;\ 1{,}5;\ 2\} = 2$,

а також

$\beta = min\ (max(1{,}0;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 2{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}6);\ max(1{,}5;\ 1{,}4;\ 1{,}6;\ 2{,}4;\ 2{,}9;\ 2{,}7);\ max(2;2{,}5;2{,}4;3;3{,}4;3{,}1);\ max(2{,}7;2{,}9;2{,}8;2{,}7;1{,}9;2{,}3); max(3{,}2;3{,}1;2{,}1;1{,}8;1{,}5;2)\}= min\{2{,}6;2{,}9;3{,}4;2{,}9;3{,}2\} = 2{,}6$.

Отже, $\alpha \neq \beta$, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов:

$$\begin{cases} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \geq 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \geq 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \geq 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \geq 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \geq 1; \end{cases}$$

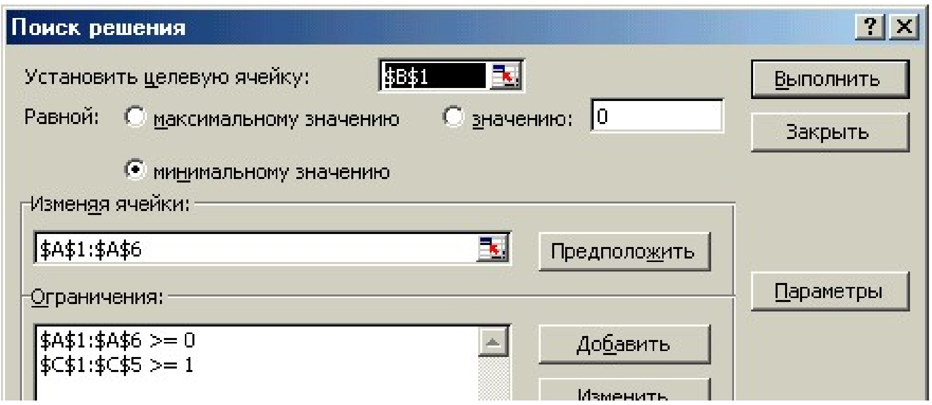
$$t \geq 0 \quad (i = \overline{1{,}6})$$

14.2. Розв'язок за допомогою програми *Excel*

Виділимо комірки A1:A6 під значення $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$. У комірку B1 вводимо формулу цільової функції у вигляді =A1+A2+A3+A4+A5+A6, а у комірки C1:C5 ліві частини обмежень у вигляді

=A1+1,2*A2+1,3*A3+2,1*A4+2,4*A5+2,6*A6;
=1,5*A1+1,4*A2+1,6*A3+2,4*A4+2,9*A5+2,7*A6;
=2*A1+2,5*A2+2,4*A3+3*A4+3,4*A5+3,1*A6;
=2,7*A1+2,9*A2+2,8*A3+2,7*A4+1,9*A5+2,3*A6;
=3,2*A1+3,1*A2+2,1*A3+1,8*A4+1,5*A5+2*A6.

Встановлюємо курсор у комірку B1. Обираємо команду Сервіс. Відкриваємо діалогове вікно "Поиск решения" і задаємо сценарій:



Натиснути Выполнить і отримати результати. У комірці D1 записати формулу =A1/B1і скопіювати її у комірки D2:D6 (*щоб увести позначки долара* B1, *треба після введення* B1 *натиснути клавішу* F4). Отримуємо в комірках D2:D6 оптимальні значення частот. Щоб знайти ціну гри, треба у комірку B2 ввести формулу =1/B1отримаємо результати у вигляді таблиці:

B1 = =A1+A2+A3+A4+A5+A6

	A	B	C	D	E
1	0,00	**0,44**	1,00	0,00	
2	0,11	**2,26**	1,05	0,24	
3	0,00		1,31	0,00	
4	0,00		1,08	0,00	
5	0,00		1,00	0,00	
6	0,34			0,76	
7					

Оптимальний розв'язок задачі: t_2=0,11; t_6= 0,34 . Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$. Ціна гри υ= 2,264.

14.3. Знайдемо розв'язок за допомогою програми *Mathcad*

Розв'яжемо задачу в матричному вигляді:

Початкові наближення:

$t_1 := 0 \quad t_2 := 0 \quad t_3 := 0 \quad t_4 := 0 \quad t_5 := 0 \quad t_6 := 0$

$$T(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix}$$ -вектор змінних цільової функції

$$C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - коефіцієнти цільової функц

$Z(t) := C \cdot T(t)$ - цільова функція

$t_1 \ge 0 \quad t_2 \ge 0 \quad t_3 \ge 0 \quad t_4 \ge 0 \quad t_5 \ge 0 \quad t_6 \ge 0$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.3 & 2.1 & 2.4 & 2.6 \\ 1.5 & 1.4 & 1.6 & 2.4 & 2.9 & 2.7 \\ 2 & 2.5 & 2.4 & 3 & 3.4 & 3.1 \\ 2.7 & 2.9 & 2.8 & 2.7 & 1.9 & 2.3 \\ 3.2 & 3.1 & 2.1 & 1.8 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$ - матриця коефіцієнтів лівих частин обмежень

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - вектор правих частин обмежень

Given

$D \cdot T(t) \geq B$

$T(t) \geq 0$

Розв'язок

$t := \text{minimize}(Z, t)$

$t^T = (0 \;\; 0 \;\; 0.11 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0.34)$

$Z(t) = 0.442$

$\upsilon := \dfrac{1}{Z(t)}$ $\quad \upsilon = 2.264$ - ціна гри

14.4. Приклади та завдання для самостійної роботи

1. Дана матриця гри. Знайти нижню і верхню ціну гри і мінімаксні стратегії сторін:

а). $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б). $A = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 10 \\ 5 & 11 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Спростити гру:

а). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б). $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Підприємство може випускати три види продукції (А,Б,В), одержує при цьому прибуток, що залежить від попиту. Попит може набувати одне з чотирьох станів (I,II,III,IV). Задана матриця прибутку:

	I	II	III	IV
А	К	3	6	2
Б	4	5	6	5
В	1	7	4	К

Визначити оптимальні пропорції випуску продукції.

Розв’язати приклад за допомогою програм *Excel* і *Mathcad*, зведенням матричної гри до задачі лінійного програмування.

4. Розв’язати матричну гру з платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$$

(К—номер студента у журналі).
5. Розв'язати графічно ігри.

а). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ б). $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

в). $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & k & 3 \end{pmatrix}$

г). $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -k & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ЛЕКЦІЯ 15. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

15.1 Багатокроковий процес прийняття рішень

Будь-яку **багатокрокову задачу** можна розв'язувати по-різному: або знаходити відразу всі елементи розв'язку на всіх кроках, або будувати оптимальне управління поступово, крок за кроком (на кожному етапі розрахунків оптимізуючи лише один крок).Як звичай, другий спосіб оптимізації є значно простішим, ніж перший, насамперед при значній кількості кроків. Оптимізація одного кроку є простішою порівняно з оптимізацією всього процесу, тому краще багато разів розв'язувати простіші задачі, ніж один раз — складну.

Динамічний процес поділяється на сукупність послідовних етапів або кроків. На кожному етапі оптимізується тільки один крок, а рішення, під впливом якого система переходить з поточного стану в новий, вибирається з урахуванням його наслідків у майбутньому і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі.

Плануючи **багатокроковий процес**, слід обирати управління на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на тих кроках, які ще попереду. Лише на останньому кроці можна прийняти рішення, яке дасть максимальний ефект, оскільки наступного кроку для нього не існує. Тому оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується останній крок. На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають умовно-оптимальним.

Для всіх кроків його знаходять із припущення, що попередній крок закінчився згідно з однією з можливих гіпотез.

Коли всі умовно-оптимальні управління на всіх кроках відомі, то це означає, що визначено, як необхідно керувати на кожному кроці, яким би не був процес на початку.У такому випадку можна знайти не умовно-оптимальне, а оптимальне управління.

Дійсно, якщо відомо початковий стан S_0, то можна вибрати для нього оптимальне управління x_1^*, що приведе до стану S_1, для якого також відоме оптимальне управління x_2^*, і т. д.

Отже, у процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес виконується двічі. Перший раз — від кінця до початку, у результаті чого знаходять умовно-оптимальні управління й умовно-оптимальні виграші для всіх кроків. Другий раз — від початку до кінця, у результаті чого знаходять вже оптимальні покрокові управління, тобто оптимальне управління процесом у цілому.

Перший етап — знаходження умовно-оптимальних управлінь є дуже складним та довгим у порівняно з другим. На другому етапі залишається лише «прочитати» рекомендації, що отримані на першому. Зауважимо, що «кінець» і «початок» можна поміняти місцями і здійснювати процес оптимізації також і в іншому напрямку (приклад 9.1).

Враховуючи вищезазначене, опишемо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування, який складається з послідовності таких операцій:

1. Визначають специфічні показники стану досліджуваної керованої системи і множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи описується в такий спосіб, щоб можна було забезпечити зв'язок між послідовними етапами розв'язання задачі і мати змогу отримати допустиме рішення задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на наступних етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.
2. Поділяють процес на етапи (кроки), які, як звичайно, відповідають певним періодам планування динамічних процесів, або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткуванню тощо) у разі підготовки рішень щодо керування ними.
3. Формулюють перелік управлінь $x_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.
4. Визначають ефект, який забезпечує управління x_j на *j*–му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, у вигляді функції ефективності:
5. $\max Z(S, x_j)$.
6. Визначають, як змінюється стан *S* системи під впливом управління x_j на *j*-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j).$$

Будують рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(S)$, починаючи з *j*–го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(S')$:

$$Z_j(S) = \max_{x_1}\{Z_j(S)\} = \max_{x_1}\{f_j(S, x_j) + Z_{j+1}(S', x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на *j*-му кроці $\{x_j(S)\}$.

Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість врахувати змінений стан системи, тобто

$$S' = \varphi_j(S, x_j).$$

Використовують умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, визначаючи множину станів *S*, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану. Умовно-оптимальний ефект на *n*-му кроці обчислюють за формулою:

$$Z_n(S) = \max_{x_n}\{f_n(S, x_n)\}.$$

Потім знаходять умовно-оптимальне управління $x_n(S)$, в результаті реалізації якого цей максимум буде досягнуто.

Проводять умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(n-2)$-го та інших кроків за рекурентними залежностями (див. п. 6) і визначають для кожного кроку умовно-оптимальне управління: $x_n^*(S_{n-1})$.

Проводять безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно ці дії повторюють до останнього етапу (кроку).

У результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, що забезпечує максимальну ефективність Z^*.

15.2. Зауваження

Розв'язування наведених задач динамічного програмування грунтується на визначеному Беллманом принципі оптимальності. Безумовно, **Беллман** один з перших зрозумів суть принципу оптимальності і з дивовижною винахідливістю став застосовувати його до сотень різних оптимізаційних задач, що виникають як в економіці, так і в математиці, техніці тощо. У книжці «Кібернетика і медична діагностика» Беллман писав: «Найцінніша ознака математики — її універсальність. Математичні методи, розроблені для дослідження економіки, можуть знайти застосування при вивченні питань хіміотерапії; теорія, первісно розроблена для розрахунку оптимальних орбіт космічних кораблів, може використовуватися для конструювання протезів. Нові ідеї, раз народившись, швидко знаходять собі застосування в найрізноманітніших галузях».

Зрозуміло, що викладення такого напрямку, як динамічне програмування у вигляді короткого конспекту, є неповним. Основну увагу було зосереджено на двох головних моментах: по-перше, на основних поняттях та формальних побудовах, що складають сутність теорії динамічного програмування; по-друге, на описанні обчислювального методу динамічного програмування.

Залишились поза увагою такі цікаві задачі динамічного програмування, що стосуються резервування ресурсів, розподілу ресурсів із вкладенням доходів у виробництво, марківські моделі прийняття рішень тощо. Детальніше задачі динамічного програмування розглядаються в літературі [7, 8, 12, 19].

15.3. Принцип оптимальності

З викладених у попередніх параграфах міркувань можна дійти висновку, що для **прийняття оптимального рішення** на k-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх його попередніх кроках, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв'язок задачі лише в тому випадку, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і є сутністю так званого ***принципу оптимальності Р. Беллмана***, який формулюється так:

Оптимальний розв'язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ має ту властивість, що яким би не був стан системи b_i у результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління x_{i+1}^* на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.

Доведемо справедливість такого твердження, міркуючи від протилежного. Нехай маємо задачу на максимізацію функції $Z = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$ і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є її оптимальним планом (стратегією, поведінкою) n-крокового процесу (n-вимірної задачі) з початковим параметром стану b.

Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $(x_2^*, \dots, x_n^*)$ повинен бути оптимальним планом $(n-1)$ крокового процесу $(n-1)$ вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b - x_1^*$. Припустимо протилежне, тобто, що вектор $(x_2^*, \dots, x_n^*)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є якийсь інший план $(x_2', \dots, x_n')$. Тоді дістанемо:

$$\max_{x_2, \dots, x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$

$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') = \max_{x_1} \max_{x_2, \dots, x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \max_{x_1, \dots, x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j).$$

15.4. Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Планується на наступний рік діяльність виробничої системи, яка складається з *n* підприємств. Відома початкова сума коштів — b_0, що має бути розподілена між всіма підприємствами. Сума вкладень *x* приносить *k*-му підприємству прибуток $g_k(x)$. Значення функції $g_k(x)$ $\left(k = \overline{1,n};\ 0 \le x \le b_0\right)$ задані таблицею.

Необхідно визначити x_k — кошти, які потрібно виділити *k*-му підприємству так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток від вкладення коштів у всі підприємства $\left(\max Z = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right)$.

Позначимо кількість коштів, що залишилися після *k*-го кроку (тобто кошти, які необхідно розподілити між рештою (*n* – *k*) підприємств через b_k:

$$b_k = b_{k-1} - x_k \ \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Задача розв’язується поетапно. У даному випадку етапами є вкладення коштів у кожне підприємство.

I етап. Кошти вкладаються лише в одне (наприклад, перше) підприємство. Найбільший прибуток (ефективність першого етапу), що може бути отриманий, позначимо через $R_1(b_0)$. Маємо:

$$R_1(b_0) = \max_{0 < x_1 < b_0} \{g_1(x)\}:$$

II етап. Порівняємо ефективність, яку отримаємо, вкладаючи кошти лише у перше підприємство та вкладаючи кошти одночасно і в перше, і в друге підприємства. Якщо позначити ефективність другого етапу через $R_2(b_0)$, то отримаємо:

$$R_2(b_0) = \max_{\substack{0 < x_1 < b_0 \\ 0 < x_2 < b_1}} \{R_1(x_1) + g_2(x_2)\}.$$

Приклад 9.1.

Для *k*-го етапу маємо рекурентне співвідношення:

$$R_k(b_0) = \max_{0 < x_1 < b_1} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}:$$

Послідовно розв’язуючи отримані рівняння, визначаємо оптимальні рішення на кожному етапі.

Наведемо **найпростішу задачу динамічного програмування**.

Виробнича система складається з чотирьох філіалів. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку. Фірма виділяє на додаткові капітальні вкладення 200 тис. ум. од. (для спрощення розрахунків допустимо, що додаткові вкладення будуть здійснені в обсягах 50, 100, 150 і 200 тис. ум. од.).

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіалами для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох філіалів за умови, що відомі прирости прибутку для кожного з них (табл. 15.1):

Таблиця 15.1

Капіталовкладення, тис. ум. од.	Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'язання. У даному прикладі етапами задачі буде не час, як у попередніх викладках, а розподіл коштів між філіалами. Отже, маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_i(x)$ — приріст прибутку в *i*-му філіалі за умови капіталовкладень у нього обсягом *x* тис. ум. од. Умова задачі має вигляд (табл. 15.2):

Таблиця 15.2

Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

І етап

Найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв'язування задачі, — це вкладення коштів лише у перший філіал. Якщо маємо в розпорядженні суму коштів $b_1 = 50$ тис. ум. од., то ефективність вкладення цієї суми відповідає прибутку, що його буде отримано від інвестування в перший філіал — 25 тис. ум. од. Ефективність першого етапу позначимо через $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le b_1}[g(x_1)] = \max_{\substack{x_1=0,\\ x_1=50}}[g(0), g(50)] = g(50) = 25$$
.

Аналогічно робимо тоді, коли в розпорядженні маємо суму $b_2 = 100$ тис. ум. од. Тоді з наявних коштів вкладати можна суму величиною x_2, що може набувати таких значень: $x_2 = 0$, або $x_2 = 50$, або $x_2 = 100$ тис. ум. од. Очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність будемо мати, вклавши кошти в сумі 100 тис. ум. од. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці першого етапу — $R_1(b_2 = 100) = 60$, потім на третьому кроці — $R_1(b_3 = 150) = 100$ тис. ум. од. і т. д.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді «таблиці найбільших ефективностей», де відображено можливі прибутки за умови різних вкладень тільки в першу філію (табл. 15.3):

Таблиця 15.3

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

II етап

На кожному етапі необхідно зіставити ефективності прийнятих рішень на попередньому й поточному етапах. Тобто, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома філіалами фірми, порівнюючи отриманий прибуток з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_1<b_1} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}:$$

Для нашого прикладу величина $R_1(x_1)$ — ефективність, що дають вкладення на попередньому етапі (в даному прикладі — у перший філіал фірми), яка була розрахована на першому кроці, і позначалась через $R_1(b)$, а величина $g_2(b_0 - x_1)$ — прибуток, що дає другий філіал від залишку суми.

За введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0\le x\le b}[g_1(x) + g_2(b-x)] = \max_{0\le x\le b}[g_2(x) + R_1(b-x)].$$

Знову спочатку допускаємо, що розподіляється сума $b_1 = 50$. Тоді можливі два варіанти вкладення: $x_1 = 0$ (вкладаємо кошти лише в другий філіал) або $x_1 = 50$ (вкладаємо кошти лише в перший філіал), тоді:

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0\le x_1\le 50}[R_1(x_1) + g_2(b_1 - x_1)] = \max[g_2(0) + R_1(50); R_1(0) + g_2(50)];$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max[0 + 25; 30 + 0] = 30:$$

Для наочності подамо проміжні розрахунки у вигляді табл. 15.4:

Таблиця 15.4

x_1	$b_1 - x_1$	$R_1(x_1)$	$g_2(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	30	0 + 30 = 30
50	0	25	0	25 + 0 = 25

Стрілкою позначено найбільший з можливих прибутків за умови розподілу вкладення 50 тис. ум. од. одночасно в перший і другий філіали фірми.

У такий спосіб визначено наступний елемент «таблиці найбільших ефективностей» для випадку, коли $b_1 = 50$ (табл. 15.5):

Таблиця 15.5

b	$R_1(b)$	$R_1(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

Потім розглядаються можливі варіанти розподілу коштів, якщо $b_2 = 100$, тоді вкладати лише в другий філіал можна суму $x_2 \le b_2$. x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. Маємо такі результати: (табл. 15.6):

Таблиця 15.6

x_2	$b_2 - x_2$	$R_1(x_2)$	$g_2(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	70	0 + 70 = 70
50	50	25	30	30 + 25 = 55
100	0	60	0	60 + 0 = 60

З табл. 15.6 висновуємо, що вкладаючи 100 тис ум. од., з усіх варіантів найбільший прибуток буде дорівнювати 70 тис. ум. од. Отже, таблиця найбільших ефективностей після цього кроку поповнюється наступним елементом (табл. 15.7):

Таблиця 15.7

b	$R_1(b)$	$R_1(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3 = 150$ та $b_4 = 200$ тис. ум. од.

Нехай $b_3 = 150$ (розглядаються чотири можливі варіанти розподілу, табл. 15.8):

Таблиця 15.8

x_3	$b_3 - x_3$	$R_1(x_3)$	$g_2(b_3 - x_3)$	$R_2(b_3)$
0	150	0	90	0 + 90 = 90
50	100	25	70	25 + 70 = 95
100	50	60	30	60 + 30 = 90
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Нехай (розглядається п’ять можливих варіантів розподілу, табл. 15.9):

Таблиця 15.9

x_4	$b_4 - x_4$	$R_1(x_4)$	$g_2(b_4 - x_4)$	$R_2(b_4)$
0	200	0	122	0 + 122 = 122
50	150	25	90	25 + 90 = 115
100	100	60	70	70 + 60 = 130
150	50	100	30	100 + 30 = 130
200	0	140	0	140 + 0 = 140

Унесемо всі розрахунки другого етапу в таблицю максимальних ефективностей, (табл. 15.10):

Таблиця 15.10

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

III етап

Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують прибуток, який можна отримати від вкладення відразу в перший і другий філіал (стовпчик $R_2(b)$) і прибуток від вкладення одночасно в три філіали. Знову використаємо формулу:

$$R_3(b_0)=\max_{0\le x_2\le b_2}\left[R_2(x_2)+g_3(b_0-x_2)\right].$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку беремо $b_1=50$, тоді $x_1=0$ або $x_1=50$ тис. ум. од., маємо (табл. 15.11):

Таблиця 15.11

$x1$	b_1-x_1	$R_2(x_1)$	$g_3(b_1-x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

$$R_3(b_1=50)=36.$$

Другий крок: $b_2=100$, тоді x_2 може набувати таких значень: $x_2=0$, $x_2=50$, $x_2=100$ тис. ум. од. У результаті маємо (табл. 15.12):

Таблиця 15.12

x_2	b_2-x_2	$R_2(x_2)$	$g_3(b_2-x_2)$	$R_3(b_2)$
0	100	0	64	0 + 64 = 64
50	50	30	36	36 + 30 = 66
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$$R_3(b_2=100)=70.$$

При $b_3=150$ величина x_3 може набувати чотирьох значень: $x_3=0$, $x_3=50$, $x_3=100$, тис. ум. од., які означають частини загальної суми вкладення коштів лише в третє підприємство, відповідні їм чотири випадки: $b_3-x_3=150$, $b_3-x_3=100$, $b_3-x_3=50$, $b_3-x_3=0$ лишки коштів, що необхідно вкладати в перші два філіали. Маємо (табл. 15.13):

Таблиця 15.13

x_3	$b_3 - x_3$	$R_2(x_3)$	$g_3(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
0	150	0	95	0 + 95 = 95
50	100	30	64	30 + 64 = 94
100	50	70	36	70 + 36 = 106
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Отже, $R_3(b_3) = 106$.

Обчислення для останнього (четвертого) кроку $(b_4 = 200)$ третього етапу наведені в табл. 15.14:

Таблиця 15.14

x_4	$b_4 - x_4$	$R_2(x_4)$	$g_3(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
0	200	0	130	0 + 130 = 130
50	150	30	95	30 + 95 = 125
100	100	70	64	70 + 64 = 134
150	50	100	36	100 + 36 = 136
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_3(b_4) = 140$. Запишемо значення $R_3(b)$ у вигляді наступного стовпчика таблиці найбільших ефективностей (табл. 15.15).

Таблиця 15.15

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_1(b)$
50	25	30	36
100	60	70	70
150	100	100	106
200	140	140	140

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$, які наводяться без коментарів.
$b_1 = 50.$

Таблиця 15.16

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	28	0 + 28 = 28
50	0	36	0	36 + 0 = 36

$R_4(b_1) = 36$.
$b_2 = 100$.

Таблиця 15.17

x_2	$b_2 - x_2$	$R_3(x_2)$	$g_4(b_2 - x_2)$	$R_4(b_2)$
0	100	0	56	56 + 0 = 56
50	50	36	28	36 + 28 = 64
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_4(b_2) = 70$.
$b_3 = 150$.

Таблиця 15.18

x_3	$b_3 - x_3$	$R_3(x_3)$	$g_4(b_3 - x_3)$	$R_4(b_3)$
0	150	0	110	110 + 0 = 110
50	100	36	56	36 + 56 = 92
100	50	70	28	70 + 28 = 98
150	0	106	0	106 + 0 = 106

$R_4(b_3) = 110$.
$b_4 = 200$.

Таблиця 15.19

x_4	$b_4 - x_4$	$R_3(x_4)$	$g_4(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	142	142 + 0 = 142
50	150	36	110	36 + 110 = 146
100	100	70	56	70 + 56 = 126
150	50	106	28	106 + 28 = 134
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_4(b = 200 = b_4) = 146$.

Остаточно маємо табл. 15.20:

Таблиця 9.20

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

З табл. 15.20 легко помітити, що найбільший прибуток, який дадуть усі чотири філіали за умови вкладення коштів у розмірі 200 тис. ум. од., становить 146 тис. ум. од. Повертаючись до останнього кроку розрахунків (табл. 15.19), бачимо, що число 146 відповідає змінній $x_4 = 150$, $b_4 - x_4 = 50 \Rightarrow 110 + 36 = R_2(150)$.

Звідси маємо, що 150 тис. ум. од. необхідно вкласти в четвертий філіал, а 50 тис. ум. од. розподілити між трьома іншими. Знову повертаємося до елементів табл. 15.20. Використання 50 тис. ум. од. на трьох перших філіалах дає загальний прибуток обсягом 36 тис. ум. од. (виділений елемент таблиці 15.20). Це значення було розраховано на ІІІ етапі, на першому кроці: $b = 50 = b_1$ у такий спосіб (табл. 15.21):

Таблиця 15.21

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

Отже, маємо: $x_1 = 50$, а $g_3(50) = 36$. Це означає, що 50 тис. ум. од. виділяються третьому філіалу, $b_1 - x_1 = 0$, $R_2(0)$ — що в перші два філіали кошти взагалі не вкладаються.

Отже, оптимальним планом задачі є: $X^*(x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = 50;\ x_4^* = 150$ тис. ум. од.). При такому розподілі коштів між філіалами фірми максимальний прибуток становитиме 146 тис. ум. од.

Контрольні запитання і завдання

1. *Сформулюйте* ***задачу динамічного програмування****.*
2. *Назвіть методи розв’язування задач динамічного програмування.*
3. *Наведіть приклади економічних задач, що належать до класу задач динамічного програмування.*
4. *Сформулюйте* ***принцип оптимальності Р. Беллмана****.*
5. *Чи забезпечує принцип оптимальності незалежність наступних розв’язків від здобутих раніше?*

ЛЕКЦІЯ 16. МОДЕЛІ СМО МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.

16.1. Теорія масового обслуговування

Система масового обслуговування (СМО) — система, яка виконує обслуговування вимог, що надходять до неї . Обслуговування вимог у СМО проводиться обслуговуючими приладами. Класична СМО містить від одного до нескінченного числа приладів. Залежно від наявності можливості очікування вступниками вимогами початку обслуговування СМО поділяються на

1) системи з втратами, у яких вимоги, що не знайшли в момент надходження жодного вільного приладу, втрачаються;

2) системи з очікуванням, в яких є накопичувач нескінченної ємності для буферизації надійшли вимог, при цьому очікують вимоги утворюють чергу;

3) системи з накопичувачем кінцевої ємності (чеканням і обмеженнями), у яких довжина черги не може перевищувати ємності накопичувача; при цьому вимога, що надходить в переповнену СМО (відсутні вільні місця для очікування), втрачається.

Вибір вимоги з черги на обслуговування здійснюється за допомогою так званої дисципліни обслуговування. Їх прикладами є FCFS / FIFO (що прийшов першим обслуговується першим), LCFS / LIFO (що прийшов останнім обслуговується першим), RANDOM (випадковий вибір). У системах з очікуванням накопичувач в загальному випадку може мати складну структуру.

16.2. Основні поняття СМО

Вимога (заявка) — запит на обслуговування.

Вхідний потік вимог — сукупність вимог, що надходять у СМО.

Час обслуговування - період часу, протягом якого обслуговується вимога.

Математична модель СМО - це сукупність математичних виразів, що описують вхідний потік вимог, процес обслуговування та їх взаємозв'язок.

Теорія масового обслуговування (теорія черг) — розділ теорії ймовірностей, метою досліджень якого є раціональний вибір структури системи обслуговування та процесу обслуговування на основі вивчення потоків вимог на обслуговування, що надходять у систему і виходять з неї, тривалості очікування і довжини черг [1]. У теорії масового обслуговування використовуються методи теорії ймовірностей і математичної статистики.

Історія

Перші задачі ТМО (Теорії масового обслуговування) були розглянуті співробітником Копенгагенської телефонної компанії Агнером Ерлангом у період між 1908 і 1922 роками. Стояло завдання впорядкувати роботу телефонної станції і заздалегідь розрахувати якість обслуговування споживачів залежно від кількості використовуваних пристроїв.

Є телефонний вузол (обслуговуючий прилад), на якому телефоністки час від часу з'єднують окремі номери телефонів один з одним. Системи масового обслуговування (СМО) можуть бути двох видів: з очікуванням і без очікування (тобто з втратами). У першому випадку виклик (вимога, заявка), що прийшов на станцію в момент, коли зайнята потрібна лінія, залишається чекати моменту з'єднання. У другому випадку він «залишає систему» і не вимагає турбот СМО.

Потік

Розглядаються дві черги й два потоки – а) надходження замовлень і б) виконання замовлень.

Однорідний потік

Потік заявок *однорідний*, якщо:

- всі заявки рівноправні,
- розглядаються тільки моменти часу надходження заявок, тобто факти заявок без уточнення деталей кожної конкретної заявки.

Потік без післядії

Потік *без післядії*, якщо число подій за будь-який інтервал часу (t, $t+x$) не залежить від числа подій на будь-якому іншому (t, $t+x$) інтервалі часу.

Стаціонарний потік

Потік заявок *стаціонарний* , якщо імовірність появи n подій на інтервалі часу (t, $t+x$) не залежить від часу t, а залежить тільки від довжини цієї ділянки.

Найпростіший потік

Однорідний стаціонарний потік без післядії є *найпростішим* або пуассонівським потоком.

Число n подій такого потоку, що випадають на інтервал x, розподілено за *законом Пуассона*:

$$P(n,x)=\frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!}.$$

Пуассонівський потік заявок зручний при вирішенні завдань ТМО. Строго кажучи, найпростіші потоки рідкісні на практиці, проте багато потоків, що моделюються, припустимо розглядати як найпростіші.

Миттєва щільність

Миттєва щільність (*інтенсивність*) потоку дорівнює границі відношення середнього числа подій, що припадають на елементарний інтервал часу (t, $t+x$) до довжини інтервалу часу (x), коли останній прямує до нуля.

$$\lambda(t)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{M(t+x)-M(t)}{x}\right),$$

або, для найпростішого потоку,

$$\lambda=\frac{M(x)}{x},$$

де $M(x)$ дорівнює математичному очікуванню числа подій на інтервалі x.

Формула Літтла

$$N^*=\lambda T$$

Середнє число заявок у системі дорівнює добутку інтенсивності вхідного потоку на середній час перебування заявки в системі.

Перелік характеристик систем масового обслуговування можна представити таким чином:

" середній час обслуговування;
" середній час очікування в черзі;
" середній час перебування у СМО;
" середня довжина черги;
" середнє число заявок в СМО;
" кількість каналів обслуговування;
" інтенсивність вхідного потоку заявок;
" інтенсивність обслуговування;
" інтенсивність навантаження;
" коефіцієнт навантаження;
" відносна пропускна спроможність;
" абсолютна пропускна спроможність;
" частка часу простою СМО;
" частка обслужених заявок;
" частка втрачених заявок;
" середнє число зайнятих каналів;
" середнє число вільних каналів;
" коефіцієнт завантаження каналів;
" середній час простою каналів.

СМО поділяють на різні групи в залежності від складу і від часу перебування в черзі до початку обслуговування, і від дисципліни обслуговування заявок.

За складом СМО бувають:

одноканальні - характеризуються одним вхідним потоком,одним обслуговуючим пристроєм;

багатоканальні - з великим числом обслуговуючих пристроїв. Багатоканальні системи можуть складатися з обслуговуючих пристроїв як однакової, так і різної продуктивності.

За часом перебування вимог у черзі до початку обслуговування системи поділяються на три групи:

1) **з необмеженим часом очікування** - чергова заявка (вимога), заставши всі пристрої зайнятими, стає в чергу й очікує обслуговування доти , поки один із пристроїв не звільниться;

2) **з відмовами** - вимога, яка надійшла, заставши всі пристрої зайнятими, залишає систему;

3) **змішаного типу** - вимога, що надійшла, заставши всі пристрої зайнятими, стає в чергу й очікує обслуговування протягом обмеженого часу. Не дочекавшись обслуговування у встановлений час, заявка залишає систему.

16.3. Задачі масового обслуговування

Задачі масового обслуговування умовно ділять на

- задачі аналізу;
- задачі синтезу.

Задачі аналізу використовують оцінку ефективності функціонування системи масового обслуговування при незмінних, наперед заданих вхідних характеристиках системи; структури системи; дисципліни обслуговування; потоках вимог і законів розподілу часу їх обслуговування.

Задачі синтезу направлені на пошук оптимальних параметрів системи масового обслуговування. Систему масового обслуговування в загальному випадку можна представити як сукупність послідовно пов’язаних між собою вхідних потоків вимог на обслуговування черг, каналів обслуговування та вихідних потоків вимог.

Схеми системи обслуговування:

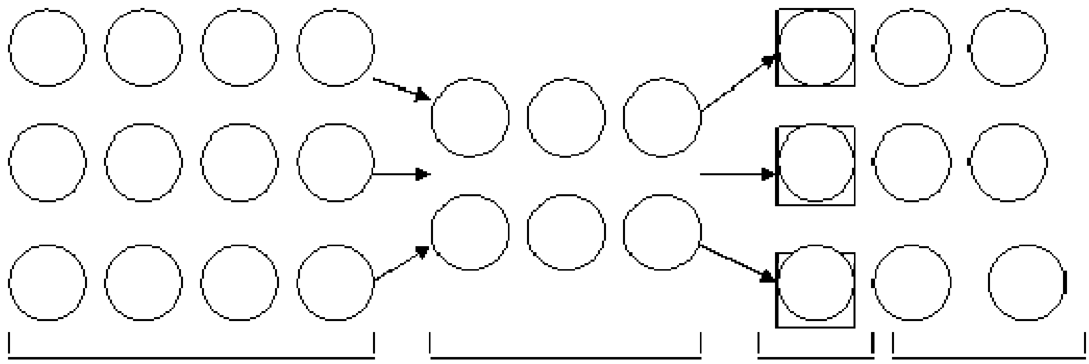


Рис.16.1. Багатоканальна СМО

Вхідні потоки Черга Канал Вихідні потоки обслуговування

Випадковий характер вхідного потоку вимог, а також час обслуговування каналів, призводить до утворення випадкового процесу, який потрібно дослідити.

16.4. Класифікація задач систем масового обслуговування

Якщо досліджені чи задані потоки вхідних вимог, механізм (кількість каналів обслуговування, час обслуговування та ін.) та дисципліна обслуговування, то це дає базис для побудови математичної моделі системи.

У задачах аналізу систем масового обслуговування як основні показники функціонування системи можуть бути використані:

1) імовірність простою P0 каналу обслуговування;

2) імовірність того, що в системі міститься n вимог (імовірність Pn);

3) середнє число вимог, що містяться в системі (Nсист = $\sum_{n=1}^{\infty} nP_n$);

4) середнє число вимог, що знаходяться в черзі

$$N_{черг} = \sum_{n=N_k}^{\infty} (n - N_k) P_n$$
, де

Nk – число каналів обслуговування.

5) Середній час очікування в черзі Тчерг. Для розімкнутої системи

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda}$$
, де

λ - це інтенсивність надходження потоковимог у систему.

Для замкнутої системи:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda(m - N_{черг})}$$
, де

m – число вимог, що потребують обслуговування;

6) середній час очікування вимог в системі Тсист;

7) середнє число вільних каналів обслуговування:

$$N_{ВК} = \sum_{n=0}^{N_k - 1} (N_k - n) P_n;$$

8) середнє число зайнятих каналів обслуговування:

$$N_{ЗК} = \sum_{n=1}^{N_k} nP_n$$

16.4.1. Задачі аналізу одноканальних систем масового обслуговування

Як видно з наведеної класифікації систем масового обслуговування, є велика кількість різновидностей. Обмежимося системами масового обслуговування, які найчастіше зустрічаються:

- одноканальна з очікуванням і обмеженим числом місць (з “БУНКЕРОМ”)
- детерміновані одноканальні ;
- одноканальні розімкнуті з найпростішим потоком надходження вимог до системи ;
- одноканальні замкнуті (потік вимог Пуасонівський) – з очікуванням.

Усі ці системи можуть бути досліджені аналітичними методами, побудованими на основі представлення процесу формування системи як марковського процесу з неперервним часом і детермінованим станом.

16.4.1.1. Одноканальна СМО з очікуванням і обмеженим числом місць у черзі (з “БУНКЕРОМ”)

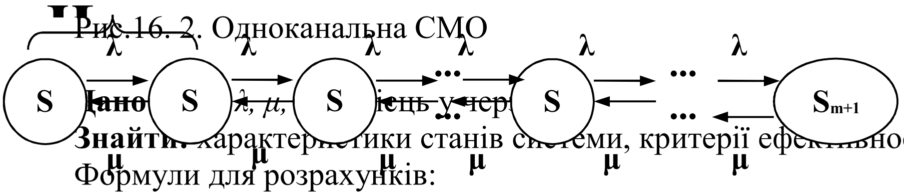


Рис.16. 2. Одноканальна СМО

Дано: λ, μ, m місць у черзі.

Знайти: характеристики станів системи, критерії ефективності.

Формули для розрахунків:

$$p_0 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+2}}, \quad p_k = \alpha^k \cdot p_0 \qquad \text{при } \alpha \neq 1.$$

Якщо α=*1*, то $p_0 = \dfrac{1}{m+2}$.

16.4.1.2. Характеристики ефективності СМО з очікуванням :

1. Імовірність відмови (канал зайнятий і всі m місць у черзі теж зайняти):

$$P_{відм} = p_{m+1} = \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+2}}.$$

2. Відносна пропускна спроможність: $q = P_{обсл} = 1 - P_{відм}$.
3. Абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda q$.
4. Середнє число зайнятих каналів (імовірність того, що канал зайнятий):

$\bar{k} = 1 - p_0$.

5. Середнє число заявок у черзі:

$\bar{r} = \dfrac{\alpha^2\left(1-\alpha^m(m+1-m\alpha)\right)}{(1-\alpha^{m+2})(1-\alpha)}$ - знаходиться як математичне сподівання випадкової величини X — числа заявок, що знаходяться у черзі (див. [1], стор. 250 - 251).

6. Середнє число заявок у СМО: $\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}$
7. Середній час перебування заявки: $\bar{t}_{сист} = \dfrac{\bar{z}}{\lambda}$, $\quad \bar{t}_{чер} = \dfrac{\bar{r}}{\lambda}$

Приклад. Знайти характеристики ефективності одноканальної СМО з трьома місцями (m=3) у черзі при умовах: λ=4 заявки/год, $\overline{t_{обс}} = \frac{1}{\mu} = 0,5$.

З'ясувати, як ці характеристики зміняться, якщо збільшити число місць у черзі до m=k. Розробити програму у *Mathcad.*

Одноканальна СМО з очікуванням і необмеженим числом місць у черзі.

Нехай α<1 і $m \to \infty$, тоді одержимо:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1-\alpha, \\ p_1 = \alpha(1-\alpha), \\ p_2 = \alpha^2(1-\alpha), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k = \alpha^k(1-\alpha), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

1. При відсутності обмежень за довжиною черги кожна заявка буде обслужена, тому $q = 1$, $A = \lambda q = \lambda$, $P_{відм} = 0$

2. Середнє число заявок у черзі:

$$\bar{r} = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^2\left(1-\alpha^m(m+1-m\alpha)\right)}{(1-\alpha^{m+2})(1-\alpha)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

3. Середнє число зайнятих каналів (імовірність того, що канал зайнятий) $\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha$.

4. Середнє число заявок у СМО: $\bar{z} = \bar{k} + \bar{r} = \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

5. Середній час перебування заявки:

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}, \qquad \bar{t}_{чер} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}$$

Приклад. СМО — білетна каса з одним вікном (n=1) і необмеженою чергою. Каса продає квитки в пункти А і В. Пасажирів, що купують квитки в пункт А, приходить у середньому троє за 20 хвилин, в пункт В — двоє за 20 хвилин. Потік пасажирів можна вважати найпростішим. Касир у середньому обслуговує трьох пасажирів за 10 хвилин. Встановити, чи існують фінальні ймовірності станів СМО і якщо так — обчислити перші три з них. Знайти характеристики ефективності СМО. Розробити програму у *Mathcad*.

Зауваження:. $\lambda_A = \frac{3}{20} = 0,15\ заявки/хв$, $\lambda_B = \frac{2}{20} = 0,10\ заявки/хв$

Загальна інтенсивність потоку заявок $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0,25$,

$\mu = \frac{3}{10} = 0,3\ заяв/хв$, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \approx 0,833 < 1$—фінальні ймовірності існують.

16.4.1.3. Задача аналізу детермінованої системи

Постановка задачі: нехай досліджується виробничий процес, у якому надходження вимог відбувається через рівні проміжки часу.

Отже:

$\Delta t_н = const$,

тобто інтенсивність потоку надходження вимог λ , котра дорівнює $\lambda = \frac{1}{t_н}$ також є const, і обслуговування проводиться через рівні проміжки часу:

$\Delta t_{обсл} = const$

$$\eta = \frac{1}{\Delta t_{обсл}}$$

(інтенсивність обслуговування $\eta = \frac{1}{\Delta t_{обсл}}$ також є const).

Є один канал обслуговування, і вважається, що

$$\frac{\Delta t_{обсл}}{\Delta t_{надх}} = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

(інакше черга буде безкінечно зростати)

Вважаємо також, що на початок обслуговування в системі уже міститься n вимог, і необхідно визначити, через який час черга зникне:

$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$ - називається коефіцієнтом використання.

Черга буде безкінечно зростати, якщо $\psi > 0$, якщо він дорівнює одиниці, то черга буде мати постійну довжину. Схематично робота системи масового обслуговування, що розглядається, представляється так:

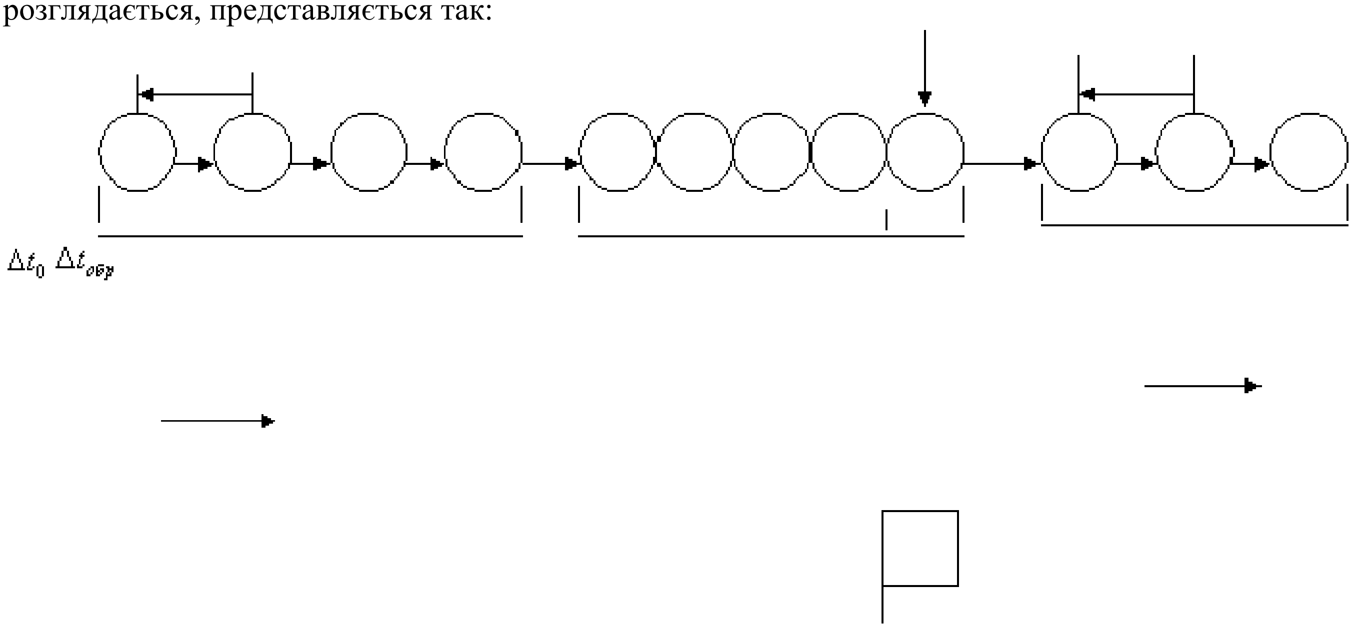


Рис.16.3. Схема роботи СМО

вхідний потік вимог черга канал вихідний потік вимог
обслуговування

Поки обслуговується черга з n вимог, протягом часу $T = n\Delta t_{обсл}$ знову поступає на обслуговування n_1 перших вимог :

$$n_1 = \frac{t}{\Delta t_н} = \frac{n * t_{обсл}}{\Delta t_н} = n\frac{\lambda}{\mu} < n\,\psi$$

Аналогічно поки будуть обслуговуватися n_1 вимог протягом часу $T_1 = n_1\Delta t_{обсл}$, додатково надійдуть на обслуговування n_2 вимог.

$$n_2 = \frac{t_1}{\Delta t_н} = \frac{n_1\Delta t_{об}}{\Delta t_н} = n\frac{\lambda}{\mu} = n_1\psi = n\,\psi^2$$

це відбувається до тих пір, поки не буде виконуватись рівність $\Delta t_k = \Delta t_н$, після чого черга зникне.

Весь процес функціонування системи масового обслуговування можна представити в аналітичному вигляді.

Час, через який черга зникне, можна навіть представити у вигляді:

$$T = t + t_1 + \ldots + t_n = \sum^{k} t_i$$

Дослідження математичної моделі

Для обчислення часу, через який черга зникне необхідно розкрити математичну модель, а саме:

$$T = n_1 \Delta t_{обсл} + n_2 \Delta t_{обсл} + \ldots + n_k \Delta t_{обсл} = \Delta t_{обсл}(n_1 + n_2 + \ldots + n_k) = \frac{1}{\mu}(n_1 + n\psi + \ldots + n\psi^k) =$$

$$= \frac{n}{\mu}(1 + \psi + \psi^2 + \ldots + \psi^k) = \frac{n(1-\psi^{k+1})}{\mu(1-\psi)}$$

У моделі використана формула суми геометричної прогресії. Чим ближче інтенсивність потоку ψ до інтенсивності обслуговування μ, тим через більший проміжок часу зникне черга. Якщо величиною ψ^{k-1} можна знехтувати для спрощення, тоді можемо записати, що

$$T \approx \frac{n}{\mu - \lambda}$$

16.4.1.4. Задача аналізу розімкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуассоновські)

Постановка задачі: Нехай дана деяка система масового обслуговування, для котрої справедливі такі гіпотези:

1) мовірність надходження вимог не залежить від прийнятого початку відліку часу, а залежить тільки від часу періоду спостереження (потік стаціонарний)

2) не надходять до системи і не покидають її одночасно 2 чи більше вимог (потік стаціонарний)

3) надходження однієї вимоги не залежить від надходження іншої (відсутність післядії). Відомі також інтенсивність λ надходження потоків вимог (середнє число обслуговування за одиницю часу - $1/\Delta t_{обсл}$). Потрібно визначити основні характеристики системи, а саме:

- P – мовірність простою каналу обслуговування;
- P_n мовірність того, що в системі знаходяться n-вимог;
- $N_{сист}$ середнє число вимог, що знаходяться в системі;
- $N_{черги}$ середнє число вимог, що знаходяться в черзі;
- $T_{сист}$ середній час очікування вимог у системі.

Потік вимог, що володіє якостями стаціонарності, ординарності та відсутністю післядії, називають простішим. У нашій задачі потік вимог простіший. Основним поняттям при аналізі процесу системи масового обслуговування є стан системи. Знаючи стан системи можна передбачити у ймовірностному сенсі її поведінку. Простіший потік – це стаціонарний Пуасоновський потік. Якщо всі потоки подій, що переводять систему з одного стану до іншого являються Пуассонівськими, то для цих систем мовірність стану описується за допомогою систем звичайних диференційних рівнянь. У більшості задач неприкладного характеру заміна не Пуассонівського потоку подій Пуассонівським з тими ж інтенсивностями призводить до отримання рішення, яке мало відрізняється від істинного, а іноді і зовсім не відрізняється. Як критерій відмінності реального стаціонарного потоку від Пуассонівського можна розглядати близькість математичного очікування числа дисперсій подій, що надходять на визначеній ділянці часу в реальному потоці.

Існує визначений математичний прийом, що значно полегшує вивід диференційного рівняння для ймовірностного стану. Спочатку будується розмічений граф стану з показом можливих переходів. Це полегшує дослідження та робить його наглядншим. Граф стану, на котрому проставлені не тільки стрілки переходів, але й інтенсивність відповідних потоків подій називають розміченим.

Закреслимо розмічений граф стану одноканальної розімкнутої системи масового обслуговування з очікуванням:

S0

Sn+1

Sn

Sn-
1

S1

λ λ λ λ λ λ

.
μ μ μ μ μ μ

Рис.16.4. Граф станів системи

Якщо складений розміченого граф стану, то для побудови математичної моделі, тобто для складання системи звичайних диференційних рівнянь, рекомендується використовувати такі правила:

похідна $\frac{\lambda P_n(t)}{dt}$ ймовірності перебування системи в стані n дорівнює алгебраїчній сумі наступних величин: число величин цієї суми дорівнює числу стрілок на графі стану системи, що з'єднує стан n з іншими станами. Якщо стрілка направлена в стан n, то відповідна величина береться зі знаком "+" . Якщо стрілка направлена зі стану n – то зі знаком "-". Кожна величина суми дорівнює добутку ймовірностей того стану, з якого направлена стрілка на інтенсивність потоку подій, що переводять систему по даній стрілці.

Відповідно до розміченим графом стану, використовуючи даний стан, запишемо систему звичайних диференційних рівнянь ймовірностей стану таким чином:

$$\frac{dP_0}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu \quad ;$$

$$\frac{dP_n}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda+\mu)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu \quad .$$

Дослідження математичної моделі

Обмежемся дослідженням режиму роботи що встановився замкнутої одноканальної системи. Тоді:

$$\frac{dP_0}{dt} = 0$$ (n=0,1, .).

Дійсно, замість системи диференційних рівнянь отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$-P_0\lambda + P_1 = 0$$

$$P_0\lambda - (\lambda+\mu)P_1 + P_2\mu = 0$$

$$P_{n-1}\lambda - (\lambda+\mu)P_n + P_{n-1}\mu = 0$$

Використовуючи отриману систему алгебраїчних рівнянь легко виразити ймовірності стану системи у вигляді квадратної рекурентної формули . З першого рівняння визначається імовірність присутності однієї вимоги в системі.

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$$
.

Із другого рівняння імовірність присутності двох вимог у системі:

$$P_2 = P_1 \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} - P_0 \frac{\lambda}{\mu} = \psi P_1 + P_1 - \psi P_0 = \psi P_1$$

І в результаті отримуємо:

$$P_2 \psi^2 P_0$$

Аналогічно проводиться перетворення для P_3

$$\mu P_3 - (\lambda - \mu) P_2 + \lambda P_1 = 0$$

$$P_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \psi P_2 + P_2 - \psi P_1 = \psi P_2$$

І, урешті, сумуємо отримані значення $P_0, P_1, \dots, P_n$ та знаходимо суму:

$$-\psi P_1 = \psi P_2$$

$$P_3 = \psi^3 P_3$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 + \dots + P_i + \dots + P_n = P_0 + \psi P_0 + \dots + \psi^n P_0$$

Використовуючи формулу геометричної прогресії отримуємо:

$$P(1 - \psi + \dots + \psi^n) = P_0 \frac{(1 - \psi^{n-1})}{(1 - \psi)}$$

і при $n \to \infty$ $(\psi < 0)$, сума:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = P_0 \frac{1}{1 - \psi} = 1$$

Звідки ми маємо:

1) імовірність простою каналу обслуговування:

$$P_0 = 1 - \psi_1$$

2) знаходимо імовірність того, що в системі знаходиться n вимог:

$$P_n = \psi^n P_0 = \psi^n (1 - \psi)$$

3) середнє число вимог, що знаходяться в системі:

$$N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \psi^n (1 - \psi) = (1 - \psi) \sum_{n=1}^{\infty} n\, \psi^n = (1 - \psi)(\psi + 2\psi^2 + 3\psi^3 + \dots + n\,\psi^n + \dots) =$$

$$= \psi(1 - \psi)(1 + 2\psi + 3\psi^3 + \dots + n\,\psi^{n-1} + \dots)$$

Остання дужка є похідною від такого виразу:

$$\psi + \psi^2 + \dots + \psi^n \dots = \psi(1 + \psi + \dots + \psi^{n-1} + \dots) = \psi / (1 - \psi) \; (\psi < 1)$$
,

тобто цей вираз дорівнює:

$$1/(1 - \psi)^2$$

У результаті отримуємо:

$$N_{сист} = \psi(1 - \psi)/(1 - \psi)^2 = \psi / (1 - \psi)$$

4) далі знаходимо середнє число вимог, що знаходяться в черзі:

$$N_{черг} = (\lambda / \mu) N_{сист} = \psi^2 / (1 - \psi)$$

5) знаходимо середній час очікування вимоги в системі, котрий можливо визначити, знаючи середнє число вимог, що знаходяться в системі:

$$T_{сист} = N_{сист} / \lambda = (1/\mu)(1/(1 - \psi))$$

16.4.1.5. Задача аналізу замкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуассонівські)

Постановка задачі:

Нехай досліджується деяка система масового обслуговування з обмеженою кількістю вимог у системі, тобто вимоги, що обслуговуються, знову повертаються в систему обслуговування. Інтенсивність надходження однієї вимоги в систему відома і дорівнює λ. Інтенсивність обслуговування також відома і дорівнює μ. Число вимог, що потребують обслуговування, дорівнює m. Необхідно визначити основні характеристики системи, а саме – імовірність того, що в системі є n вимог P_n. Імовірність простою каналу обслуговування P_0. Середнє число вимог, що знаходяться в черзі $N_{черг}$. Середнє число вимог, що знаходяться в системі $N_{сист}$. Середній час очікування в черзі $T_{черг}$. Середній час очікування вимоги в системі $T_{сист}$.

Стан системи будемо пов'язувати з числом вимог, що знаходяться в системі. При цьому можливі два стани:

1) число вимог, що поступили в систему, дорівнює нулю $(n = 0)$, тобто канали обслуговування простоюють.

2) число вимог , що поступили в систему $(0 = n \leq m)$.

Закреслимо розмічений граф стану одноканальної замкнутої системи масового обслуговування з очікуванням:

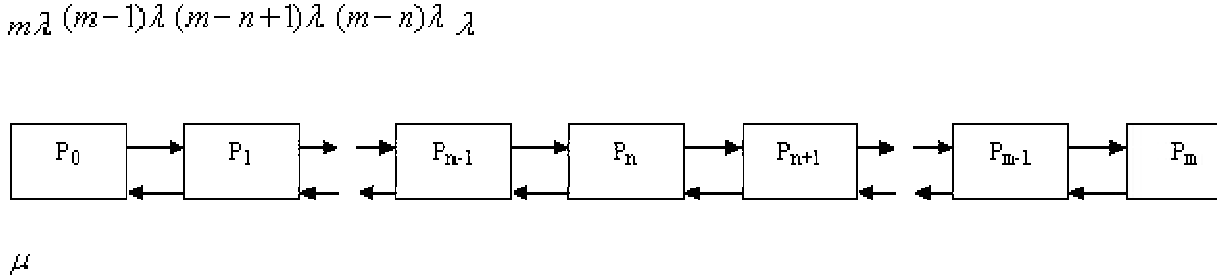


Рис. 16.5. Граф замкнутої СМО з очікуванням

Побудова математичної моделі

Відповідно до розміченого графа стану, і використовуючи правило Колмагорова, запишемо систему диференційних рівнянь для ймовірності стану:

$$\frac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -[(m-n)\lambda + \mu]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

Обмежемося дослідженням режиму роботи системи, що встановився. Тоді:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0, \quad n = (0,1,\dots,m)$$

і замість системи звичайних диференційних рівнянь ми отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$m\lambda P_0 - \mu P_1 = 0$$

$$[(m-n)\lambda + \mu]P_n - (m-n+1)\lambda P_{n-1} - \mu P_{n+1} = 0$$

Для $0 \leq n \leq m$ неважко отримати рекурентну формулу:

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu} P_0 = m\psi P_0$$; при $n = 1$;

$$P_2=\frac{1}{\mu}\{[(m-1)\lambda+\mu]P_1-m\lambda P_0\}=[(m-1)\psi+1]P_1-m\psi P_0=(m-1)\psi P_2$$
; при $n=2$

$$P_3=\frac{1}{\mu}\{[(m-2)\lambda]P_2-(m-1)\psi P_1)\}=[(m-2)\psi+1]P_2-(m-1)\psi P_1=(m-2)\psi P_2$$

$P_n=(m-n+1)\psi P_{n-1}$;

Імовірність того, що в системі знаходиться n вимог, складе:

$$P_n=(m-n+1)\psi(m-n+2)\psi...(m-1)\psi m\psi P_0=\frac{m!\psi^n}{(m-n)!}P_0$$

Використовуючи рівність:

$$\sum_{n=0}^{m}P_n=\sum_{n=0}^{m}\frac{n!\psi^m}{(m-n)!}P_0=1$$

можна отримати вираз для P_0.

Імовірність простою каналу обслуговування P_0 буде дорівнювати:

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{m}\frac{m!\psi^n}{(m-n)!}\right]^{-1}$$

Середнє число вимог, що знаходяться в черзі, дорівнює:

$$N_{черг}=\sum_{n=2}^{m}(n-1)P_n=m!\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{(n-1)\psi^n}{(n-m)!}P_0\right)=m-\frac{1+\psi}{\psi}(1-P_0)$$

Середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{черг}=\frac{\mu}{\mu(m-N_{черг})}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0}-\frac{1+\psi}{\psi}\right]$$

Середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{сист}=\frac{N_{сист}}{\lambda(m-N_{сист})}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0}-\frac{1}{\psi}\right].$$

Як можна помітити, визначення основних характеристик одноканальних систем масового обслуговування вимагає великої обчислювальної роботи, у зв'язку з чим усі розрахунки робляться на комп'ютері.

16.4.2. Задача аналізу багатоканальної системи масового обслуговування

16.4.2.1. Багатоканальні СМО з відмовами.

Дано: λ-інтенсивність потоку заявок , μ-інтенсивність обслуговування, n-кількість каналів.

Знайти: характеристики станів системи, критерії ефективності.

Формули для розрахунків:

$$p_n=\frac{\alpha^n}{n!}\cdot p_0\text{ , де }\alpha=\frac{\lambda}{\mu}\text{ і }p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}}$$ — формули *Ерланга*.

16.4.2.2. Характеристики ефективності СМО з відмовами:

1. Імовірність відмови (заявка, що надійшла, коли всі канали зайняті, отримує відмову), тобто:

$$P_{відм}=p_n=\frac{\alpha^n}{n}\cdot p_0.$$

2. Відносна пропускна спроможність (імовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговування): $q = P_{обсл} = 1 - P_{відм} = 1 - p_n$.

3. Абсолютна пропускна спроможність (середня кількість заявок, що обслуговуються за одиницю часу): $A = \lambda q = \lambda(1 - p_n)$

4. Середня кількість зайнятих каналів (один зайнятий канал обслуговує у середньому за одиницю часу μ заявок), отже :

$$\overline{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu} = \alpha q \, .$$

Приклад. Триканальна СМО з відмовами. Інтенсивність потоку викликів λ=0,8 (викл. у хвилину). Середня тривалість розмови $\overline{t_{обс}} = 1{,}5\ хв$. Визначити :

1. Імовірність відмови $P_{від}$.
2. Відносну пропускну спроможность СМО (q);
3. Абсолютну пропускну спроможность СМО (A);
4. Середнє число зайнятих каналів.

16.4.2.3. Розв'язання у пакеті Mathcad:

Дано: $n := 3 \qquad \lambda := 0.8 \qquad tobs := 1.5$

Знайдемо: $\mu := \frac{1}{tobs} \qquad \alpha := \frac{\lambda}{\mu}$

$\mu = 0.667 \qquad \alpha = 1.2$

Обчислимо значення фінальних ймовірностей за формулами Ерланга:

$$p_0 := \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \qquad p_0 = 0.3117$$

$$k := 1..n \qquad p_k := \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0$$

$p_k =$

0.3741
0.2244
0.0898

Характеристики ефективності СМО

1. Ймовірність відмови:

$Pvidm := p_n$

$Pvidm = 0.09$

2. Відносна пропускна спроможність:

$$q := 1 - Pvidm$$

$$q = 0.91$$

3. Абсолютна пропускна спроможність:

$$A := \lambda \cdot q$$

$$A = 0.728$$

4. Середнє число зайнятих каналів:

$$K := \alpha \cdot q$$

$$K = 1.092$$

16.4.2.4. Задача аналізу розімкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуассонувські)

Постановка задачі: нехай відомі інтенсивність λ надходження потоку вимог в систему та інтенсивність μ обслуговування цих вимог. Число каналів обслуговування N_k. Необхідно визначити імовірність того, що в системі знаходяться n вимог $P_n(t)$, імовірність простою каналів обслуговування $P_0(t)$, середнє число вимог, що знаходяться в черзі. Середній час очікування $T_{оч}$. Середнє число вільних каналів обслуговування.

У цій задачі можливі два випадки:

1) у системі n змінюється $0 \le n < N$

2) число вимог $n \ge N_k$ - числу каналів

У першому випадку всі вимоги, що знаходяться в системі, одночасно обслуговуються, і не всі канали зайняті. Загальна інтенсивність обслуговування: $\mu * n$

Закреслимо розмічений граф стану багатоканальної розімкнутої системи масового обслуговування:

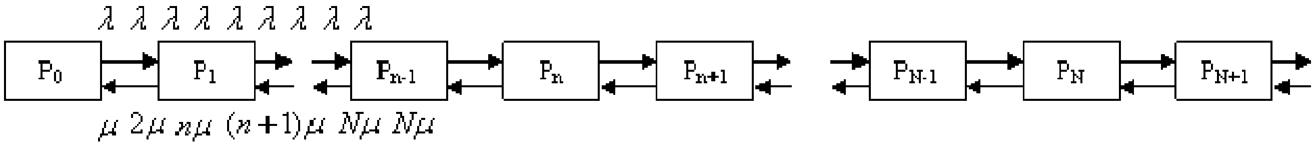


Рис.16.6. Граф стану багатоканальної розімкнутої СМО

Побудова математичної моделі

Відповідно до розміченого графа стану і правила Колмагорова запишемо систему звичайних диференційних рівнянь для стану системи:

$$n = 0$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu$$

$$1 \le n < N$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$$

$$n \ge N$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + N\mu)P_n(t) + N\mu P_{n+1}(t) = 0$$

Обмежемся дослідженням режиму роботи системи, що встановився, коли λ - const, μ - const:

$t \to \infty$, $P_n(t) \to const$

$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ $(n = 0,1,...)$

і тоді замість системи звичайних диференційних рівнянь отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$n = 0$

$-\lambda P_0 + \mu P = 0$

$1 \le n < N$

$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$

$n \ge N$

$\lambda P_{n+1} - (\lambda + N\mu)P_n + P_{n+1}N\mu = 0$

Використовуючи отримані алгебраїчні рівняння, визначимо вирази для визначення ймовірності знаходження системи в стані n .

$n = 0$

$$P_1 = \frac{1}{\mu}P_0 = \psi P_0$$

$n = 1$

$$P_2 = \frac{1}{2\mu}\left[(\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0\right] = \frac{1}{2}\left[(\psi+1)\psi P_0 - \psi P_0\right] = \frac{\psi^2}{2}P_0$$

$n = N - 1$

$$P_n = \frac{1}{N\mu}\left\{\left[\lambda(N-1)\mu\right]P_{n-1} - \lambda P_{N-2}\right\} = \frac{\psi^N}{N!}P_0$$

З цих виразів видно, що $n < N$ імовірність знаходження в системі n вимог визначається за такою формулою:

$$P_n' = \frac{\psi^n}{n!}P_0$$

Для стану $n > N$ є:

$n = N$

$$P_{N+1} = \frac{1}{N\mu}\left[(\lambda + N\mu)P_n - \lambda P_{n-1}\right] = \frac{P_0}{N}\left[(\psi - N)\frac{\psi^N}{N!} - \frac{\psi}{(N-1)!}\right] = \frac{\psi}{N} * \frac{\psi^n}{N!} * P_0;$$

.

$n = N + 1$

$$P_{n+2} = \frac{1}{N\mu}\left[(\lambda - N\mu)P_{N-1} - \lambda P_n\right] = \frac{P_0}{N}\left[(\psi + N)\frac{\psi}{N} * \frac{\psi^N}{N!} - \frac{\psi^{n-1}}{M!}\right] = \frac{\psi^2}{N^2}\frac{\psi^n}{M!}P_0$$

З отриманих виразів видно, що для складання системи, коли $n \ge N$ імовірність знаходження в системі n вимог визначається за такою формулою:

$$P_n = \frac{\psi^{n-N}\psi^N}{N^{n-N}N!}P_0 = \frac{\psi}{N^{n-N}N}P_0$$

маючи аналітичний вираз для всіх станів системи, а також використовуючи очевидну рівність:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} P_n' + \sum_{n=N}^{\infty} P_n' = 1$$

Визначимо імовірність простою каналу обслуговування:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\psi}{n!} P_0 + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\psi^{k-N}\psi^{N}}{N^{n-N}N!} P_0 = \frac{1}{1-\psi/N}$$

Імовірність простою:

$$P_0 = \left[\sum_{K=0}^{N-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^n}{N!(1-\psi)/N} \right]$$

Середнє число вимог. що знаходяться в черзі, знайдемо по:

$$N_{черг} = \frac{\psi^N}{N!\,N(1-\psi/N)^2} P_0$$

Середній час очікування заявок у черзі:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda}$$

Середнє число зайнятих каналів:

$$N_{сх} = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\,\frac{\psi^n}{n!} P_0$$

16.4.2.5. Задача аналізу розімкнутої системи з відмовою (потоки вимог Пуасонівські)

Постановка задачі:

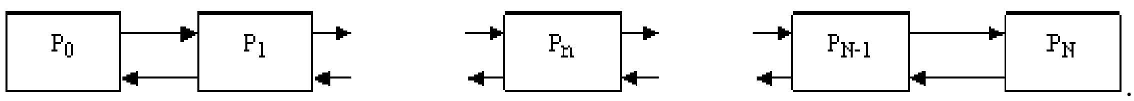
Нехай досліджується деяка розімкнута системи масового обслуговування, інтенсивність надходження вимог у систему відома і дорівнює λ. Інтенсивність обслуговування кожного каналу відома і дорівнює μ. Якщо вимоги застали всі N каналів є зайнятими, то вони отримують відмову та покидають систему. Ця задача вперше розглядалася Ерлангом. Потрібно визначити

1) імовірність P_0 того, що всі канали обслуговування вільні;

2) імовірність P_n того, що зайнято рівно n каналів обслуговування;

3) середнє число зайнятих каналів обслуговування.

Закреслимо розімкнутий граф стану багатоканальної розімкнутої системи масового обслуговування з відмовою:



μ 2μ $n\mu$ $(n+1)\mu$ $(N-1)\mu$ $N\mu$

Рис.16.7. Розімкнутий граф стану багатоканальної розімкнутої СМО

Стан системи будемо пов’язувати з числом зайнятих каналів обслуговування. Перерахуємо основні можливості N станів системи:

1) усі канали вільні. Жодна вимога не обслуговується

2) один канал зайнятий. Обслуговується одна заявка

3) n - каналів зайнято. Обслуговується n вимог

4) Усі N каналів зайнято, обслуговується N вимог.

Відповідно до розміченого графом стану, і використовуючи правило Колмагорова, запишемо систему звичайних диференційних рівнянь для ймовірності стану системи:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$
$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

досліджуючи стаціонарний режим роботи системи, при $t \to \infty$, система рекурентних алгебраїчних рівнянь буде мати вигляд:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$
$$-(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 - 2\mu P_2 = 0$$
$$(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n \_ 1)\mu P_{n+1} = 0$$
$$-N\mu P_N + \lambda P_{N-1} = 0$$

З першого рівняння
$$P_1 = P_0 \frac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$$
Аналогічно, з другого:

$$P_2 = P_1 \frac{\psi}{2} = P_0 \frac{\psi^2}{2}$$
$$P_n = P_0 \frac{\psi^n}{n!}$$

Використовуючи отримані співвідношення, можливо визначити імовірність P_0 того, що всі канали обслуговування вільні:

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^2}{n!} P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!} = 1$$
$$P_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

Імовірність того, що задано рівно n каналів обслуговування, буде дорівнювати:

$$P_n \frac{\psi^n}{\left(n! \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}\right)}$$

середнє число зайнятих каналів обслуговування:

$$N_{зн} = \sum_{n=1}^{N} nP_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi^n}{(n-1)\sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

16.4.2.6. Задача аналізу замкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуассонівські)

Постановка задачі:

Нехай досліджується деяка система масового обслуговування, в котрій вимоги, що обслуговуються, знову повертаються до системи обслуговування. Інтенсивність однієї вимоги - λ, інтенсивність обслуговування кожного каналу μ, число каналів обслуговування N. Число вимог, котрі потребують обслуговування m. Будемо вважати, що $N \le m$.

Необхідно визначити:

1) імовірність того, що в системі знаходяться n вимог: $P_n(t)$

2) імовірність простою каналів обслуговування $P_0(t)$

3) середнє число вимог, що очікують початку обслуговування, або довжину черги $N_{черг}$

4) середній час очікування вимоги в черзі $T_{черг}$

Стан системи будемо пов'язувати с числом вимог, що знаходяться в системі. При цьому можливі 2 випадки:

1) число вимог n, що поступили в систему, менше числа каналів обслуговування, тобто $0 \le n < N$

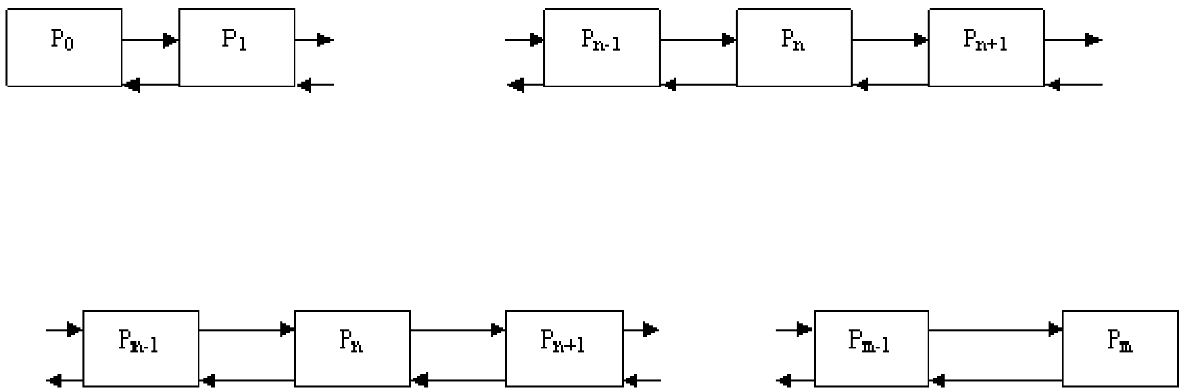
2) число вимог n, що поступили в систему, більше чи дорівнює числу каналів обслуговування $n \ge N$

З них N обслуговується, а r вимог очікують в черзі. $r = (1,2\ldots,m-N)$

Закреслимо граф стану багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування з очікуванням

$0 \le n \le N$:

$(m-n+1)\lambda$ $(m-n)\lambda$



$m\lambda$ $(m-1)\lambda$

μ 2μ $n\mu$ $(n+1)\mu$

Рис.16.8. Граф багатоканальної замкнутої СМО

$N \le n \le m$

$(m-n+1)\lambda$ $(m-n)\lambda$ 2λ λ

$N\mu$ $N\mu$ $N\mu$ $N\mu$

Відповідно до розміченого графом стану системи, і використовуючи правило Колмагорова, запишемо диференційні рівняння для ймовірності станів системи:

$0 \le n < N$

7

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -[(m-n)\lambda + n\mu]P_{n-1}(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t)$$

$N \le n < m$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -[(m-n)\lambda + N\mu]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1} + N\mu P_{n+1}(t)$$

$$\frac{dP_N}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t)$$

Дослідження математичної моделі

Для режиму роботи системи, що встановився, коли λ - постійна величина, $\mu - const$, $t \to \infty$, $P_0 - const$, тоді

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$$

і замість системи звичайних диференційних рівнянь отримуємо систему рекурентних алгебраїчних рівнянь, з котрих знаходяться:

1) Імовірність того, що в системі знаходиться n вимог для випадку, коли n змінюється від 0 до N, тоді:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!}P_0$$

Для випадку, коли $N \le n \le m$:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{N^{m-N}(m-n)!N!}P_0$$

Для обчислення ймовірності простою каналу обслуговування використовується така рівність:

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} P_n + \sum_{n=N}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!}P_0 + \sum_{n=N}^{m} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!N!}P_0 = 1$$

З цієї формули ми знаходимо P_0:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)} + \sum_{n=N}^{m} \frac{n!\psi^n}{N^{(m-n)}(m-n)!N!}\right]$$

Далі знаходимо середнє число вимог, що очікують початок обслуговування (довжина черги):

$$N_{черг} = \sum_{n=N}^{m}(n-N)P_n' = \sum_{n=N}^{m} \frac{n!P^n(n-N)}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0$$

Далі знаходимо середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\mu(N-N_{вх})}$$

Середнє число вільних каналів обслуговування:

$$N_{вх} = \sum_{n=0}^{N-1}(N-n)P_n' = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n)m!P^n}{n!(m-n)!}P_0$$

ТЕМА 3,4. МАКРОЕКОНОМІЧНІ І МІКРОЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ. ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ.
ЛЕКЦІЯ 17. ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ.

17.1. АЛГОРИТМІЧНІ (ІМІТАЦІЙНІ) МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ ТА ПІДПРИЄМНИЦТВІ

Тема лекції присвячена актуальній проблемі економіки — дослідженню економічних процесів, систем й економіко-математичних моделей за допомогою алгоритмічних моделей, тобто аналізу й прогнозу в економіці.

За допомогою імітаційних моделей можливо і доцільно досліджувати різні економіко-математичні моделі з точки зору прогнозування всіх можливих полей значень моделей при заданих діапазонах значень незалежних змінних і на основі цього планування мікро- та макроекономіки, як внутрішньої, так і зовнішньої. Імітаційні моделі дозволяють проаналізувати й перевірити цілу низку теорій економічного розвитку й провести розрахунки, що висвітлюють поведінку як самих моделей, так і окремих певних економічних систем і об’єктів (наприклад , України та інших країн на основі наприклад Гравітаційної та інших моделей).

Імітаційні моделі дозволяють вести прогнозування в багатовимірному просторі незалежних змінних. При цьому вони є найефективнішими і найскладнішими моделями, водночас мають переконливі переваги, тому що легко реалізують властивості динамічності, багатофакторності і стохастичності.

Імітаційна модель – це алгоритм або комп'ютерна програма. Створюється на будь-якій алгоритмічній мові.

Одночасно може являти собою модель СМО. Таким чином імітаційні моделі виступають у додатково в інші іпостасі дозволяють будувати саме моделі СМО. Така реалізація СМО найдоцільніша бо найкраще чином моделює системи масового обслуговування. Легко реалізує генератор випадкових чисел для реалізації стохастичності.

Етапи моделювання:

1. Постановка завдання.
2. Визначення математичної моделі.
3. Визначення мови програмування.
4. Побудова алгоритму.
5. Створення комп'ютерної програми, у тіло якої вбудована математична або, математичні моделі.
6. Тестування.
7. Коригування.
8. Використання і дослідження.
9. Аналіз.
10. Доопрацювання.

Створені спеціальні мови програмування для імітаційних моделей – GPSS, спеціальні мтематичні пакети – MathLAB, LabVIEW та інши.

17.2. Основні аспекти імітаційного моделювання

Як зазначалось у попередньому матеріалі, за однією з класифікаційних ознак математичні моделі можна класифікувати як аналітичні, імітаційні (алгоритмічні) й комбіновані.

З розвитком обчислювальної техніки і дискретного аналізу дедалі ширшого розвитку й використання набувають алгоритмічні (імітаційні) моделі. Серед основних етапів процесу імітаційного моделювання можна виокремити такі:

- аналіз характеристик і закономірностей функціонування керованого (досліджуваного) об'єкта: виокремлення на змістовному (вербальному, концептуальному) рівні системи обмежень (ресурсних, фізичних, правових, соціальних тощо), визначення показників вимірювання та оцінки результатів, формулювання цілей, гіпотез та проблем розвитку;
- **конструювання імітаційної моделі**: перехід від реального об'єкта до логічних схем, які імітують його поведінку, й алгоритмів (моделей), формальна постановка завдань, що розв'язуються за допомогою імітаційного моделювання;
- **підготовка системи даних для моделі**: формування інформаційного забезпечення, необхідного для функціонування імітаційної моделі, зокрема, визначення структури та способів подання даних, джерел їх отримання, форм і режимів зберігання, встановлення взаємозв'язків і взаємозалежності між різними масивами й базами даних;
- **програмна реалізація імітаційної моделі**: створення чи адекватне використання існуючих програмних продуктів, що забезпечують можливість безпосередньої практичної реалізації моделі на персональних комп'ютерах;
- оцінка адекватності моделі: порівняння результатів, накопичених у процесі дослідної експлуатації моделі, на підставі інформації, отриманої про реальний об'єкт, який імітується, виявлення й аналіз розбіжностей і в при потребі внесення корекцій до моделі;

- **проведення імітаційних експериментів**. Очевидно, що даний етап є цільовим (власне кажучи, заради нього й будується імітаційна модель). Він включає в себе стратегічне й тактичне планування експериментів, власне експериментування («імітаційні експерименти»), котре завершується інтерпретацією отриманих результатів і прийняттям на підставі зроблених висновків рішень щодо оцінювання й управління об'єктом (підприємством, банком, фінансовою фірмою, торговельною організацією, холдингом тощо).

Стратегічне планування імітаційного експерименту спрямоване на розв'язання низки питань якісного характеру. До таких, наприклад, можна зарахувати формулювання гіпотез щодо характеру залежностей між параметрами моделі чи вибір конкретних методів дослідження з урахуванням їх взаємовпливу.

Тактичне планування експерименту повинно прояснити питання щодо визначення способів та умов його проведення. Типовими задачами тактичного планування є вибір початкових значень для параметрів моделі чи визначення послідовності варіації цих значень.

Одним із важливих аспектів у процесі роботи (дослідження) з імітаційною моделлю є аналіз її чутливості. Під ним розуміють визначення ступеня мінливості значень цільових показників моделі, зумовлених мінливістю (невизначеністю, варіабельністю) вихідних параметрів. Так, якщо за відносно невеликих змін вихідних даних відбувається суттєва зміна в результатах моделювання, то це є достатньою підставою для додаткових, більш детальних досліджень, зокрема, щодо взаємозв'язків між відповідними змінними.

До позитивних якостей імітаційного моделювання можна зарахувати:

- надання дослідникові (системному аналітику) можливості спостереження як кінцевого результату стосовно до показників аналізованого об'єкта, так і процесу його функціонування, що дає змогу отримати шуканий результат;
- широкі можливості щодо масштабування в процесі функціонування модельованого об'єкта;
- забезпечення багатоваріантності досліджень;
- багатофункціональність імітаційних моделей, що відображається в можливостях гнучкого вибору та наступних модифікаціях системи цілей і критеріїв, які бажано розглянути під час проведення імітаційних експериментів.

Звернемо увагу також на недоліки, які притаманні імітаційним моделям:

- оскільки імітаційні моделі за своєю природою є лише засобом для проведення деякого числового експерименту, то результати, отримані за їх допомогою, являють собою не що інше, як поодинокі випадки (можливі варіанти) розвитку модельованого об'єкта. Отже, усі висновки й твердження, зроблені на їх підставі, мають евристичний характер і в певних випадках можуть суттєво викривляти дійсний стан речей;
- у багатьох випадках отримання оцінок щодо ступеня наближення (чи невідповідності) між імітаційною моделлю (результатами імітаційного моделювання) і функціонуванням реального об'єкта виявляються проблематичними;
- здебільшого в основу процесу імітації покладено деякий статистичний експеримент, під час якого використовуються генератори псевдовипадкових величин. Похибки, що об'єктивно притаманні таким генераторам, можуть істотно викривляти результати, отримані в ході імітаційного моделювання.

Варто також звернути увагу на пізнавальний зворотний вплив, що його дають результати, отримані в межах імітаційних експериментів, на отримання інформації, яку використовують теоретичні (аналітичні) економіко-математичні моделі. Справді, аналіз й узагальнення накопичених у процесі імітаційних експериментів даних досить часто дозволяє краще зрозуміти якісні й кількісні закономірності, притаманні поводженню керованих об’єктів, і відобразити їх в аналітичному вигляді. Це додатково вказує на справедливість того, що успішне розв’язання задач моделювання та управління функціонуванням таких складних слабоформалізованих систем, як економічні об’єкти і процеси, потребує комплексного використання цілісної системи моделей і методів як теоретико-аналітичної, так і емпіричної (імітаційної) природи. Нагадаємо, що імітаційні моделі широко використовують аналітичні моделі як органічні складники, котрі є основою, на якій ґрунтуються концептуальні співвідношення, характеристики в структурі будь-якої більш-менш складної імітаційної моделі *1.

*1: {Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1981.}

Імітаційні (алгоритмічні) моделі можуть бути детермінованими і стохастичними. В останньому випадку за допомогою датчиків (генераторів) випадкових чисел імітується вплив (дія) невизначених і випадкових чинників. Такий метод імітаційного моделювання дістав назву методу статистичного моделювання (статистичних прогонів, чи методу Монте-Карло). Нині цей метод вважають одним із найефективніших методів дослідження складних систем, а часто і єдиним практично доступним методом отримання нової інформації щодо поведінки гіпотетичної системи (на етапі її проектування).

17.3. Теоретичні основи методу статистичного моделювання

Метод статистичного моделювання (чи метод Монте-Карло) — це спосіб дослідження невизначених (стохастичних) економічних об’єктів і процесів, коли не повністю (до певної міри) відомими є внутрішні взаємодії в цих системах.

Цей метод полягає в модельному відтворенні процесу за допомогою стохастичної математичної моделі й обчисленні характеристик цього процесу. Одне таке відтворення можливого (випадкового) стану функціонування модельованої системи називають реалізацією (чи імітаційним прогоном; далі — прогоном).

Після кожного прогону реєструють сукупність параметрів, що характеризують випадкову подію (її реалізацію). Метод ґрунтується на багатократних прогонах (випадкових реалізаціях) на підставі побудованої моделі з подальшим статистичним опрацюванням отриманих даних з метою визначення числових характеристик досліджуваного об’єкта (процесу) у вигляді статистичних оцінок його параметрів. Процес моделювання економічної системи зводиться до машинної імітації досліджуваного процесу, котрий моделюється на ЕОМ з усіма суттєвими невизначеностями, випадковостями і породженим ними ризиком. Імітаційне моделювання нерідко має назву симулятивного моделювання. Перші відомості про метод Монте-Карло були опубліковані наприкінці 40-х рр. XX століття. Авторами методу є американські математики — економісти Дж. Нейман і С. Улам.

Теоретичною основою методу статистичного моделювання є закон великих чисел. У теорії ймовірностей закон великих чисел ґрунтується на доведенні низки теорем для різних умов збіжності за ймовірністю середніх значень результатів (на підставі великої кількості спостережень) до деяких величин.

Під законом великих чисел розуміють кілька теорем. Наприклад, *одна з теорем П.Л. Чебишева* формулюється таким чином: «За необмеженого збільшення кількості незалежних випробувань (n) середнє арифметичне вільних від систематичних помилок і рівноточних результатів спостережень хi випадкової величини х, яка має скінченну дисперсію D(х), збігається за ймовірністю до математичного сподівання mх = M(х) цієї випадкової величини».

Це можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} P \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - m_\xi \quad < \varepsilon \quad = 1, \qquad (17.1)$$

де є — будь-яке мале додатне число.

Теорема Бернуллі формулюється так: «За необмеженого збільшення числа незалежних спроб (n) за одних і тих самих умов відносна частота $\frac{m}{n}$ настання випадкової події збігається за ймовірністю до p, тобто:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{m_i}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (17.2)$$

де є — будь-яке мале додатне число».

Згідно з цією теоремою для отримання ймовірності певної події, наприклад імовірності станів деякої системи $p_i,\ i = 1, \ldots, k$, обчислюють відносні частоти $p_i = \frac{m_i}{n}$ для кількості реалізацій, що дорівнює n. Результати усереднюють і з деяким наближенням одержують шукані ймовірності станів системи. Чим більшим буде n, тим точнішим буде результат обчислення цих імовірностей. Це легко довести.

Допустимо, що треба відшукати значення математичного сподівання m для певної випадкової величини. Підберемо таку випадкову величину x, щоб

M(x) = m, а D(x) = b2 ,

де b2 — довільне значення дисперсії випадкової величини x.

Розгляньмо послідовність n незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, розподіл імовірностей яких збігається з розподілом x. Якщо n є досить великим, то згідно з центральною граничною теоремою розподіл суми

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

буде приблизно нормальним розподілом з параметрами a = n • m; s2 = n • b2.

З правила «трьох сигм» $P\{a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma\} = 0,997$ випливає, що

$$P\left\{mn - 3b\sqrt{n} < \eta_n < nm + 3b\sqrt{n}\right\} = 0,997. \qquad (17.3)$$

Поділивши нерівність, що розташована у фігурних дужках, на n, отримаємо еквівалентну нерівність з тією самою ймовірністю:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{n}} < \frac{\eta_n}{n} \langle m + \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0,997.$$

Це співвідношення можна записати у вигляді:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0,997. \qquad (17.4)$$

Співвідношення (3.4) визначає метод обчислення середнього значення m і оцінку похибки. З (3.4) видно, що середнє арифметичне реалізацій випадкової величини x наближено дорівнюватиме числу m. З імовірністю p = 0,997 похибка такого наближення не перевищує $\frac{3b}{\sqrt{n}}$. Очевидно, що ця похибка прямує до нуля зі зростанням n, що й потрібно було довести.

Розв’язування задач методом статистичного моделювання полягає в такому:

- опрацювання й побудова структурної схеми процесу, виявлення основних взаємозв’язків;
- формалізований опис процесу;
- моделювання випадкових явищ (випадкових подій, випадкових величин, випадкових функцій), що притаманні досліджуваній системі;
- моделювання процесу функціонування системи (на підставі використання даних, що отримані на попередньому етапі) — відтворення процесу відповідно до розробленої структурної схеми і формалізованого опису (імітаційні прогони);
- накопичення результатів моделювання (імітаційних прогонів), статистичне опрацювання, аналіз та інтерпретація їх.

Зазначимо, що будь-які твердження щодо характеристик модельованої системи повинні ґрунтуватися на результатах відповідних перевірок за допомогою методів математичної статистики.

Оскільки випадкові події й випадкові функції можуть подаватися з використанням випадкових величин, то й моделювання випадкових подій і випадкових функцій проводиться за допомогою випадкових величин.

17.4. Послідовність створення математичних імітаційних моделей

У процесі створення та машинної реалізації математичних імітаційних моделей здійснюють такі (узагальнені) етапи*2:

- *2: {Варфоломеев В. И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум : учеб. пособие. — М. : Финансы и статистика, 2000.}
- побудова концептуальної моделі;
- побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи;
- створення комп'ютерної програми;
- машинні експерименти з моделлю системи.

17.4.1. Побудова концептуальної моделі

Побудова концептуальної моделі складається з таких кроків:

- постановка задачі моделювання;
- визначення вимог щодо первісної інформації та способів її отримання;
- формування гіпотез і припущень;
- визначення параметрів і змінних моделі;
- обґрунтування вибору показників і критеріїв ефективності системи;
- складання змістовного опису моделі.

У здійсненні постановки задачі моделювання економічних об'єктів і процесів використовується чітке **формулювання цілей і завдань** дослідження реальної системи, обґрунтовується необхідність імітаційного (комп'ютерного) моделювання, обирається методика розв'язування задачі з урахуванням наявних ресурсів, визначаються необхідність і можливість декомпозиції задачі на окремі взаємопов'язані підзадачі тощо.

При зборі необхідної вихідної інформації треба звертати увагу на те, що, власне, від якості вихідної інформації про об'єкт дослідження і моделювання залежить як адекватність моделі, так і достовірність результатів моделювання.

Гіпотези при побудові моделі системи слугують для заповнення «прогалин» щодо розуміння та формалізації задачі. Припущення дають змогу провести необхідні спрощення моделі на підставі раціональних гіпотез. У процесі роботи з моделлю системи, як звичайно, можливим є багаторазове повернення до цього етапу залежно від отриманих результатів моделювання і нової інформації (розуміння) про об'єкт.

Під час визначення параметрів і змінних складається перелік вихідних і керуючих змінних, а також зовнішніх (екзогенних) і внутрішніх (ендогенних) параметрів системи.

Обрані показники і критерії ефективності системи повинні відображати мету (цілі) функціонування системи і являти собою функції змінних і параметрів системи.

Розроблення концептуальної моделі завершується складанням змістовного опису, котрий використовується як основний документ, що характеризує результати опрацювання концептуальної постановки задачі (розуміння її всіма суб'єктами, зацікавленими у результатах дослідження).

17.4.2. Побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи

Побудова алгоритму містить такі складники:

- побудова логічної схеми алгоритму;
- формування математичних співвідношень (аналітичних моделей);
- перевірка достовірності алгоритму.

Спочатку, зазвичай, створюють узагальнену схему моделюючого алгоритму, котра задає загальний порядок (хід) дій в імітаційному моделюванні досліджуваного процесу. Після цього розробляється детальна схема, кожний елемент якої перетворюється в оператор (групу операторів) програми.

Перевірка достовірності алгоритму повинна дати відповідь на запитання, наскільки адекватно і точно він відображає сутність модельованого процесу (у конкретній ситуації) та побудованої концептуальної моделі.

17.4.3. Створення комп’ютерної програми

Розроблення програми для ПК включає такі кроки:

- вибір обчислювальних засобів;
- програмування (чи налаштування відповідних параметрів існуючих програмно-методичних комплексів);
- тестування програмних засобів.

На останньому кроці необхідно, зокрема, оцінити тривалість виконання програми на комп’ютері (витрати часу) для здійснення однієї реалізації (прогону) модельованого процесу, що дасть змогу системному аналітику правильно сформулювати вимоги щодо точності й достовірності результатів моделювання.

17.4.4. Проведення машинних експериментів з моделлю системи

На цьому етапі проводяться серійні обчислення за допомогою програми. Етап складається з таких кроків:

- планування машинного експерименту;
- проведення робочих обчислень;
- відповідне подання результатів моделювання (у табличній і графічній формах);
- надання рекомендацій щодо оптимізації режиму функціонування реальної системи.

Перед здійсненням робочих обчислень на комп’ютері доречно скласти план проведення експерименту з переліком комбінацій змінних і параметрів, за яких повинно відбутися моделювання системи. Завдання полягає у розробці оптимального плану експерименту, реалізація якого дозволить за порівняно невеликої кількості тестувань моделі отримати достовірні дані про закономірності функціонування реальної системи.

Результати моделювання можуть бути подані у вигляді таблиць, графіків, діаграм, схем тощо. Зазвичай найпростішою формою вважаються таблиці, хоча графіки ілюструють результати моделювання економічного об’єкта (системи) у більш наочній формі. Доцільно передбачити інтерактивний режим функціонування комплексу, виведення результатів на екран дисплея та на принтер.

Інтерпретація результатів моделювання передбачає перехід від інформації, отриманої в результаті машинного експерименту з моделлю, до висновків щодо процесу функціонування об’єкта-оригіналу*3.

*3: {Петров А. А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. — М. : Наука, 1996.}

17.5. Моделювання випадкових величин

Для моделювання випадкової величини потрібно знати закон її розподілу. *Найзагальнішим способом* отримання послідовності випадкових чисел, що є послідовністю реалізацій випадкової величини, котра розподілена за довільним законом, є спосіб, в основі якого — процес формування їх з вихідної послідовності випадкових чисел. Ця послідовність є послідовністю реалізацій випадкової величини, що розподілена в інтервалі (0; 1) згідно з рівномірним законом розподілу.

Згадану послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу можна отримати трьома способами:

- використанням таблиць випадкових чисел;
- застосуванням генераторів випадкових чисел;
- методом псевдовипадкових чисел.

Нині використовують псевдовипадкові числа, що відповідають рівномірному закону розподілу. **Псевдовипадкові (випадкові) числа** — це числа, отримані за деяким правилом (формулою), що імітує значення випадкової величини. Розроблено низку алгоритмів для отримання псевдовипадкових чисел. Датчики псевдовипадкових чисел є складниками більшості програмних комплексів.

Для перетворення послідовності випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1), у послідовність випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини із заданою інтегральною функцією розподілу $F(x)$, треба із сукупності випадкових чисел з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1) вибрати випадкове число ? і розв’язати рівняння:

$$F(x) = \text{x відносно } x. \qquad (17.5)$$

У випадку, коли задана функція щільності ймовірності $f(x)$, співвідношення (17.5) набирає вигляду:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \xi. \qquad (17.6)$$

Для низки законів розподілу отримано аналітичний розв’язок рівняння (17.6), результат якого наведено в таблиці 17.1.

Таблиця 17.1

Формули для моделювання випадкових величин

Закони розподілу випадкової величини	Щільність розподілу	Формули для моделювання випадкових величин
Експоненційний	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]$	$x_i = -b(\ln \xi_i)^{1/a}$
Гама-розподіл (? — цілі числа)	$f(x) = \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} e^{-\lambda x} x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\eta}\ln(1-\xi_{ij})$
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = m + \sigma\left(\sum_{j=1}^{12}\xi_{ij} - 6\right)$

ЛЕКЦІЯ 18. ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

Застосування методів моделювання в аналітичному дослідженні господарської діяльності підприємств і їхніх структурних підрозділів є однією з передумов широкого використання економіко-математичних методів. Запровадження останніх сприятиме розширенню вивчення спектра факторів, що впливають на окремі аспекти діяльності суб'єктів господарювання, а отже, і визначенню можливих додаткових резервів підвищення ефективності виробництва. Ідеться передовсім про постановку й виконання нових багатовимірних завдань аналізу, виконання яких за допомогою традиційних методів неможливе. На сучасному етапі економічного реформування, запровадження ринкових методів господарювання зростає потреба в оперативності прийняття управлінських рішень, у розрахунку й прогнозуванні варіантів можливих напрямків виробничої діяльності окремих підприємств. А це майже неможливо здійснити без застосування в аналітичному дослідженні економіко-математичних методів. Найпоширенішим у процесі простого економічного аналізу є використання **методів елементарної математики**. Вони застосовуються для обґрунтування потреби у виробничих ресурсах, для балансових та інших розрахунків. Для дослідження складніших економічних явищ застосовуються методи вищої математики, наприклад диференціальне та інтегральне числення, логарифмування. Використання в економічному аналізі методів навіть елементарної математики, зокрема, **методу математичних перетворень**, спрощує вивчення впливу додаткових факторів на об'єкт дослідження. Метод математичних перетворень є най ефективнішим у **кратних** економіко-математичних моделях, де значення підсумкового показника визначається як співвідношення факторних показників.

Реалізація цих методів відбувається за трьома основними модифікаціями. **Перша модифікація** передбачає **подовження** чисельника розрахункової моделі перетворенням одного або кількох факторних показників на алгебраїчну суму складових елементів цього показника (показників). Так, у розрахунковій моделі визначення витрат у розрахунку на одну гривню товарної продукції значення чисельника, тобто повної собівартості товарної продукції, можна подати як суму окремих статей витрат, тобто витрат сировини і матеріалів, заробітної плати і т. д. Натомість застосування **другої модифікації**, тобто способу **формального розкладання факторної системи**, пов'язане із подовженням знаменника базової факторної моделі також перетворенням одного або кількох факторних показників, зазначених у знаменнику, на алгебраїчну суму відповідних складовників. У розрахунковій базовій моделі визначення показника рентабельності реалізованої товарної продукції маємо співвідношення прибутку від реалізації товарної продукції (чисельник) до її собівартості (знаменник). Проте значення показника собівартості можна подати як алгебраїчну суму окремих статей витрат, тобто матимемо відповідне подовження знаменника.

При застосуванні **третьої модифікації**, тобто **методу розширення**, потрібне відповідне перетворення і чисельника, і знаменника розрахункової моделі помножуванням або діленням факторних показників на те саме значення якогось нового показника. Унаслідок цього можуть виникнути нові факторні показники. Так, базова модель визначення загальної фондовіддачі являє собою співвідношення обсягу товарної продукції до середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів. Поділивши чисельник і знаменник моделі на значення показника чисельності робітників промислово-виробничого персоналу, матимемо відповідно в чисельнику значення показника продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу, а в знаменнику — значення коефіцієнта фондоозброєності.

Можливе застосування і складнішого варіанта методу розширення. Так, для визначення показника рентабельності авансованого капіталу застосовується така економіко-математична модель:

$$Р\text{к} = \text{Пб} : (\text{ВОФ} + \text{ВОК}), \qquad (18.1)$$

де $Р$к — коефіцієнт рентабельності авансованого капіталу на підприємстві;

Пб — балансовий прибуток підприємства (грн);

ВОФ — середньорічна вартість основних промислово-виробничих фондів (грн);

ВОК — середньорічна вартість оборотних коштів (грн).

Використовуючи один із способів елімінування, можна розрахувати вплив факторів на можливе відхилення показника коефіцієнта рентабельності авансованого капіталу за певний період. До цих факторів можна зарахувати відповідні відхилення балансового прибутку підприємства, середньорічної вартості його промислово-виробничих основних фондів, а також оборотних коштів. При цьому характер певних функціональних взаємозв’язків між показниками в розрахунковій економіко-математичній моделі не завжди сприймається об’єктивно. Ідеться передовсім про обернену залежність зміни коефіцієнта рентабельності від збільшення середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів та оборотних коштів. За допомогою належних математичних перетворень можна отримати дещо модифікований варіант економіко-математичної моделі розрахунку коефіцієнта рентабельності. Якщо розділити чисельник і знаменник правої частини формули 18.1 на якусь одну величину, то значення показника, що характеризує об’єкт дослідження, при цьому не зміниться.

За таку величину можна взяти значення показника обсягу реалізації товарної продукції (Ор). Тоді значення економіко-математичної моделі для визначення коефіцієнта рентабельності авансованого капіталу на підприємстві матиме такий вигляд:

$$Р_{к} = \frac{\text{П}_{б} : \text{О}_{р}}{\text{ВОФ} : \text{О}_{р} + 1 : (\text{О}_{р} : \text{ВОК})}, \qquad (18.2)$$

де (Пб : Ор) — балансовий прибуток у розрахунку на одну гривню реалізованої продукції;

(ВОФ : Ор) — коефіцієнт фондомісткості;

(Ор : ВОК) — коефіцієнт оборотності оборотних коштів.

У такий спосіб ми визначили другу групу факторів, що впливають на зміну значення узагальненого показника. Характер функціональних взаємозв’язків між показниками в модифікованій економіко-математичній моделі дає змогу за допомогою елімінування обґрунтувати конкретними розрахунками можливу зміну коефіцієнта рентабельності внаслідок певних відхилень окремих показників, що входять до розрахункового алгоритму за формулою (4.2). Причому, можливість поліпшення результативного показника в моделі цілком логічно обумовлюється збільшенням балансового прибутку в розрахунку на одну гривню обсягу реалізованої продукції, зменшенням коефіцієнта фондомісткості, підвищенням коефіцієнта оборотності оборотних коштів.

Отже, унаслідок використання методів математичних перетворень даних досягається можливість суттєвого збільшення кількості досліджуваних факторів, що сприяє, у свою чергу, знаходженню додаткових потенційних резервів поліпшення узагальненої характеристики об’єкта дослідження. Можливим є і подальше перетворення факторних показників економіко-математичної моделі для розрахунку рентабельності авансованого капіталу на підприємстві. Воно стосується значення коефіцієнта фондомісткості, тобто співвідношення середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів до обсягу реалізованої товарної продукції у формулі (18.2). Чисельник цього математичного виразу (значення середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів) можна подати як добуток показників фондоозброєності праці й чисельності робітників промислово-виробничого персоналу, а знаменник — як добуток продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу і чисельності цих робітників:

$$\text{К}_{фм} = \frac{\text{Ф}_{оз} \cdot \text{Ч}_{р}}{\text{П}_{р} \cdot \text{Ч}_{р}}; \qquad (18.3)$$

де Кфм — коефіцієнт фондомісткості;

Фоз — фондоозброєність праці, тобто співвідношення середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів до чисельності робітників промислово-виробничого персоналу;

Пр — продуктивність праці одного робітника промислово-виробничого персоналу;

Чр — чисельність робітників промислово-виробничого персоналу.

Скоротивши в зазначеному вище математичному виразі його чисельник і знаменник на значення чисельності робітників, одержимо розрахункове значення коефіцієнта фондомісткості як співвідношення фондоозброєності праці до її продуктивності в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу:

$$К_{фм} = \frac{Ф_{оз}}{П_р}; \qquad (18.4)$$

Тепер можна деталізувати економіко-математичну модель щодо визначення загальної рентабельності виробництва за формулою (18.2) через заміну в ній значення коефіцієнта фондомісткості його розрахунковим математичним виразом за формулою (18.4). Тоді економіко-математична модель розрахунку коефіцієнта рентабельності авансованого капіталу матиме такий вигляд:

$$P_к = \frac{П_б : О_р}{Ф_{оз} : П_р + 1 : (О_р : ВОК)}; \qquad (18.5)$$

Використання цієї економічної моделі створює можливість дослідження впливу на об’єкт ще двох додаткових факторів — зміни рівня коефіцієнта фондоозброєності праці одного робітника промислово-виробничого персоналу і зміни показника продуктивності праці одного робітника промислово-виробничого персоналу.

Щодо об’єкта дослідження в цілому, тобто щодо рентабельності авансованого капіталу, маємо досить суттєве збільшення досліджуваних факторів у результаті проведених математичних перетворень. Так, у базовій економіко-математичній моделі визначення рентабельності авансованого капіталу за формулою (18.1) розраховується вплив тільки трьох факторів:

1) зміна балансового прибутку підприємства;

2) зміна середньорічної вартості основних промислово-виробничих фондів;

3) зміна середньорічної вартості оборотних коштів.

Після проведених математичних перетворень з’являється можливість дослідити ще п’ять додаткових факторів:

1) зміна балансового прибутку в розрахунку на одну гривню обсягу реалізованої продукції;

2) зміна коефіцієнта фондомісткості;

3) зміна коефіцієнта оборотності оборотних коштів;

4) зміна коефіцієнта фондоозброєності;

5) зміна продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу.

Якщо зв’язок між узагальненим показником, що його аналізують, і факторними характеристиками є не функціональним, а має ознаки стохастичної залежності, доцільним вважається застосування **статистичних методів**, а також теорії ймовірностей. У низці статистичних застосовуються класичні методи одновимірних і багатовимірних сукупностей, варіаційні ряди, закони розподілу, вибір даних, кореляційно-регресійний та дисперсійний аналіз.

Найширше в економічному аналізі застосовуються методи **парної** і **множинної кореляції**. За допомогою цих методів є можливим визначення не функціональної, а стохастичної причинно-наслідкової залежності між економічними явищами, тобто вивчення дії факторів, що мають тенденційний вплив на об’єкт дослідження. Так, унаслідок дії фактора підвищення кваліфікації робітників продуктивність їхньої праці набуває тенденції до зростання. При цьому імовірність факторного впливу визначається щільністю зв’язку факторів з передбачуваною узагальнюючою економічною характеристикою. Щільність зв'язку вимірюється значенням коефіцієнта кореляції, що коливається в діапазоні від нуля до одиниці. Коли значення коефіцієнта кореляції перевищує 0,5, то зв'язки між факторами й узагальнюючим показником об'єкта дослідження вважаються досить щільними, що дає змогу з достатньою вірогідністю вимірювати їхній вплив. Для цього треба передусім побудувати факторну економіко-математичну модель. У разі використання в аналітичному дослідженні методу парного кореляційного зв'язку факторна економіко-математична модель передбачає можливість вимірювання дії тільки одного фактора на об'єкт дослідження і має такий вигляд:

$$Y = a + bX, \tag{18.6}$$

де Y — значення показника, що характеризує об'єкт дослідження;

X — значення факторного показника;

a, b — коефіцієнти регресії.

Якщо значення показників «X» та «Y» є змінними, то коефіцієнти «a» і «b» — це константи, за допомогою яких встановлено відповідність між змінними величинами. Отже, кожному відхиленню за факторним показником (DX) відповідатиме певне відхилення за узагальнюючим показником (DY). Така залежність в економіко-математичній моделі парної кореляції уможливлює її використання як за ретроспективного, так і за перспективного факторного аналітичного дослідження об'єктів господарювання на підприємстві. Прикладом може бути дослідження впливу екстенсивного використання обладнання в процесі виробництва, що вимірюється коефіцієнтом змінності роботи цього обладнання, на таку узагальнену характеристику ефективності використання основних промислово-виробничих фондів, як фондовіддача. Безпосереднього пропорційного функціонального зв'язку між цими показниками немає, що не дає змоги використовувати в аналізі традиційні методи дослідження, наприклад елімінування, хоч немає і сумніву щодо існування певної тенденції зростання фондовіддачі залежно від збільшення значення коефіцієнта змінності. І справді, чим триваліший час працюватиме обладнання, тим більшим має бути й обсяг продукції в розрахунку на одну гривню вартості основних промислово-виробничих фондів, тобто показник фондовіддачі, а ще точніше — фондовіддачі активної частини цього виду виробничих ресурсів. Вихідними даними для необхідних розрахунків є низка спостережень фактичних значень цих показників. Чим більше буде таких спостережень, тим вірогіднішим буде значення коефіцієнта кореляції, а також постійних коефіцієнтів регресії. Інформаційною базою для визначення відповідності значень показника фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів значенням середньомісячного коефіцієнта змінності можуть бути техніко-економічні дані за 15 місяців роботи механічного цеху підприємства.

Конкретизуємо економіко-математичні моделі розрахунку названих характеристик. Фондовіддача активної частини основних промислово-виробничих фондів механічного цеху (Фа) розраховується як відношення обсягу його продукції, виконаних робіт (От) до середньорічної вартості активної частини основних промислово-виробничих фондів (ВФа):

$$\text{Ф}_{\text{а}} = \frac{\text{О}_{\text{т}}}{\text{ВФ}_{\text{а}}}; \tag{18.7}$$

У свою чергу, значення середньомісячного коефіцієнта змінності роботи обладнання на підприємстві можна визначити як співвідношення відповідних даних з урахуванням кількості відпрацьованих діб:

$$\overline{\text{К}}_{\text{з}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \text{К}_{\text{з}_j}}{n}; \tag{18.8}$$

де $\overline{\text{К}}_{\text{з}}$ — середньомісячний коефіцієнт змінності роботи обладнання в механічному цеху;

$\text{К}_{\text{з}_j}$ — коефіцієнт змінності роботи обладнання протягом j-ї доби;

n — кількість робочих діб за місяць.

Добове значення коефіцієнта змінності ($K_{з_i}$) дорівнює відношенню загальної кількості відпрацьованих усім обладнанням машино-змін за добу до кількості встановленого обладнання:

$$K_{з_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} M_{з_i}}{M_в}; \qquad (18.8а)$$

де $M_{з_i}$ — кількість машино-змін, відпрацьованих встановленим обладнанням за *i*-ву зміну;

Мв — кількість встановленого обладнання.

Згідно з описаними розрахунковими математичними моделями визначено необхідні вихідні дані щодо параметричного ряду 15-ти спостережень парних відповідностей рівнів фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів і значень коефіцієнтів змінності роботи обладнання за 15 місяців роботи механічного цеху. Відповідно до стандартної постановки завдання пошуку парної кореляційної залежності узагальненого результативного показника від зміни факторного показника-аргумента беремо значення фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів за *Y*, а значення коефіцієнта змінності роботи обладнання — за *X*. Постійні коефіцієнти регресії *a* і *b* розраховуються способом найменших квадратів у результаті розв’язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y; \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy. \end{cases} \qquad (18.9)$$

У таблиці 18.1 подано вихідні дані для розв’язування системи рівнянь.

Таблиця 18.1

ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ (18.9)

Місяці	Коефіцієнт змінності (*x*)	Фондовіддача активної частини основних фондів (*y*)	*xy*	*x*2
1	1,4	0,44	0,616	1,96
2	2,3	0,73	1,679	5,29
3	0,9	0,41	0,369	0,81
4	1,7	0,50	0,85	2,89
5	1,1	0,43	0,473	1,21
6	2,0	0,66	1,32	4,00
7	1,8	0,52	0,936	3,24
8	1,4	0,46	0,644	1,96
9	0,8	0,43	0,344	0,64
10	1,6	0,50	0,8	2,56
11	1,8	0,50	0,9	3,24
12	1,9	0,52	0,988	3,61
13	2,4	0,71	1,704	5,76
14	1,1	0,42	0,462	1,21
15	2,6	0,86	2,236	6,76
?	24,8	8,09	14,321	45,14

З використанням даних табл. 18.1 система рівнянь за формулою (18.9) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} 15a + 24{,}8b = 8{,}09; \\ 24{,}8a + 45{,}14b = 14{,}321. \end{cases}$$

Перемножуємо ліву і праву частини першого рівняння на 1,653. Система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 24{,}8a + 40{,}9944b = 13{,}3728; \\ 24{,}8a + 45{,}14b = 14{,}321. \end{cases}$$

Віднімаємо від другого рівняння перше й отримуємо:

$$4{,}1456b = 0{,}9482;$$
$$b = 0{,}2287.$$

Підставляємо в перше рівняння значення b:

$$15a + (24{,}8 \cdot 0{,}2287) = 8{,}09;$$
$$a = (8{,}09 - 5{,}6718)/15;$$
$$a = 0{,}1612.$$

Отже, маємо таку економіко-математичну модель кореляційно-регресійної залежності фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів (Y) від значення коефіцієнта змінності роботи обладнання (X):

$$Y = 0{,}1612 + 0{,}2287X.$$

Практичне використання цієї моделі уможливлює визначення кожного відхилення за функціональним показником при відхиленні за показником-аргументом.

Наприклад, якщо є можливість збільшити коефіцієнт змінності наступного місяця проти звітного на 0,15, то фондовіддача активної частини основних промислово-виробничих фондів повинна зрости на 0,1955 коп. (0,1612 + 0,2287 ? 0,15). Інакше кажучи, потенційним резервом збільшення фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів на 0,1955 коп. є підвищення рівня коефіцієнта змінності роботи обладнання на 0,15. Так само спосіб можна визначити можливі результати збільшення або зменшення значення будь-якого факторного показника в процесі ретроспективного аналітичного дослідження.

Значно збільшує можливості пошуку додаткових резервів підвищення ефективності виробництва застосування економіко-математичної моделі багатофакторного кореляційного аналізу. Використовуючи економіко-математичний метод **множинної кореляції**, визначають залежність певного узагальненого показника, що характеризує об’єкт дослідження, від зміни значень факторних показників. Відбір цих показників для кореляційної моделі доцільно здійснювати на базі застосування аналітичних групувань, способу порівняння паралельних і динамічних рядів, лінійних графіків, а також у процесі розв’язування завдань кореляційного аналізу на основі оцінки їхньої значущості за критерієм Стьюдента. Застосовувана в аналітичному дослідженні математична модель множинної кореляційної залежності має такий загальний вигляд:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n, \tag{18.10}$$

де Y — значення узагальненого показника, що характеризує об’єкт дослідження;

$X1$, $X2$, …, Xn — значення факторних показників;

a, $b1$, $b2$, …, bn — постійні коефіцієнти регресії.

Як і в моделі парної кореляційної залежності, значення показників X та Y є змінними, а коефіцієнтів a і b — константами. Загальне відхилення за узагальнюючим показником (DY) обумовлюється алгебраїчною сумою локальних відхилень (DY1, DY2, …, DYn), що виникають під впливом відповідних факторів: DX1, DX2, …, DXn. Усі факторні показники, що включаються до економіко-математичної моделі множинної кореляції, повинні бути кількісно узгоджені, з усуненням можливості автокореляції. Отож взаємоузгодженість будь-яких двох факторних показників, що визначаються за допомогою коефіцієнта парної кореляції, не може бути щільною. Інакше(за умови перевищення коефіцієнтом кореляції позначки 0,85) один з цих показників має бути виключений з економіко-математичної моделі.

Для забезпечення достовірності встановлення зв’язків у багатофакторній кореляційно-регресійній моделі визначення постійних коефіцієнтів регресії базується на використанні великої кількості спостережень узгоджуваних показників і потребує внаслідок складності розрахунків застосування спеціальних програмних продуктів, що реалізуються за умов використання комп’ютерної електронно-обчислювальної техніки. Зважаючи на ці обставини, з метою ілюстрації використання в економічному аналізі методу множинної кореляції розглянемо умовний приклад побудови та використання багатофакторної математичної моделі, що передбачає залежність прибутку, пов'язаного з реалізацією товарної продукції, від групи факторів:

1) тривалості обороту оборотних коштів, тобто коефіцієнта оборотності (*X*1);

2) ефективності використання трудових ресурсів, що визначається продуктивністю праці в розрахунку на одного працівника промислово-виробничого персоналу (*X*2);

3) ефективністю використання основних промислово-виробничих фондів, що характеризується показником фондовіддачі активної частини промислово-виробничих основних фондів (*X*3);

4) ефективністю використання матеріальних ресурсів, що визначається показником матеріаловіддачі (*X*4);

5) якістю продукції, що визначається питомою вагою забракованої продукції в загальному її випуску (*X*5);

6) собівартістю продукції, що характеризується показником витрат у розрахунку на одну гривню товарної продукції (*X*6);

7) ритмічністю випуску продукції, що визначається відповідним коефіцієнтом (*X*7).

За логікою економічних взаємозв'язків певні коливання значень кожного з наведених факторних показників повинні у відповідний спосіб впливати на зміну узагальненого показника, яким є прибуток від реалізації товарної продукції. Значення узагальненого показника аргументуються багатофакторною економіко-математичною моделлю кореляційно-регресійної залежності, яка визначається в результаті реалізації типових програмних продуктів за умов використання ЕОМ. Наприклад:

$$Y = 0{,}36 + 0{,}43X_1 + 0{,}74X_2 + 0{,}69X_3 + 0{,}58X_4 - \\ - 0{,}29X_5 - 0{,}94X_6 + 0{,}41X_7. \qquad (18.11)$$

Коефіцієнти регресії при кожному з факторних показників визначеної сукупності свідчать про рівень впливу кожного з факторів на значення узагальненого показника (*Y*) за незмінної дії інших факторів. Тоді, унаслідок застосування способу ланцюгових підстановок, можна розрахувати дію кожного з факторів окремо. Розглянемо порядок такого розрахунку на прикладі багатофакторної регресійно-кореляційної економіко-математичної моделі визначення впливу 7-ми факторів на відхилення за показником прибутку від реалізації товарної продукції. На підставі даних таблиці 4.2 базова розрахункова модель може бути подана в такому вигляді:

$$4{,}4836 = 0{,}36 + 0{,}43 \cdot 2{,}3 + 0{,}74 \cdot 4{,}0 + 0{,}69 \cdot 0{,}42 + 0{,}58 \cdot 0{,}74 - \\ - 0{,}29 \cdot 0{,}84 - 0{,}94 \cdot 0{,}73 + 0{,}41 \cdot 0{,}94.$$

Таблиця 18.2

ПОКАЗНИКИ ЕФЕКТИВНОСТІ РОБОТИ ПІДПРИЄМСТВА

Показник	Фактично в минулому місяці	Фактично у звітному місяці	Відхилення
Прибуток від реалізації товарної продукції, млн.грн.	4,4836	4,0937	– 0,3899
Коефіцієнт оборотності оборотних коштів	2,3	2,4	+ 0,1
Продуктивність праці одного робітника промислово-виробничого персоналу, грн.	4000	3600	– 400
Матеріаловіддача, грн.	0,42	0,40	– 0,02
Фондовіддача активної частини основних промислово-виробничих фондів, коп.	74,0	70,0	– 4,0

Питома вага бракованої продукції в загальному її випуску, %	0,84	0,96	+ 0,12
Витрати в розрахунку на одну гривню товарної продукції, коп.	73,0	76,0	+ 3,0
Коефіцієнт ритмічності випуску товарної продукції	0,94	0,85	– 0,09

У свою чергу, фактичне значення прибутку від реалізації товарної продукції у звітному місяці в кореляційному взаємозв'язку із факторними показниками становить 4,0937 млн. грн.

(0,36 + 0,43 • 2,4 + 0,74 • 3,6 + 0,69 • 0,40 + 0,58 • 0,70 — 0,29 • 0,96 – 0,94 • 0,76 + 0,41 • 0,85).

Тепер розрахуємо вплив кожного з факторів на відхилення за результуючим показником, тобто на зменшення прибутку від реалізації товарної продукції на 0,3899 млн. грн. (4,0937 – 4,4836).

Змінюючи базове значення першого фактора, тобто коефіцієнта оборотності оборотних коштів, на звітне в базовій економіко-математичній моделі розрахунку узагальнюючого показника, визначимо значення першої підстановки:

0,36 + 0,43 • 2,4 + 0,74 • 4,0 + 0,69 • 0,42 + 0,58 • 0,74 — 0,29 • 0,84 – 0,94 • 0,73 + 0,41 • 0,94 = 4,5266.

Відповідно до визначеного результату і згідно з методикою розрахунку вплив фактора обчислюється як різниця між результатом першої і базової підстановок: + 0,043 (4,5266 – 4,4836). Отже, унаслідок впливу фактора збільшення значення коефіцієнта оборотності оборотних коштів у звітному місяці проти попереднього на 0,1 (2,4 – 2,3) має місце збільшення прибутку від реалізації товарної продукції на 43 тис. грн.

Далі визначимо вплив другого фактора, тобто зміни за показником продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу. Для цього обчислимо значення другої підстановки, змінюючи в моделі першої підстановки значення відповідного факторного показника в минулому місяці на фактичне у звітному місяці:

0,36 + 0,43 • 2,4+ 0,74 • 3,6 + 0,69 • 0,42 + 0,58 • 0,74 — 0,29 • 0,84 – 0,94 • 0,73 + 0,41 • 0,94 = 4,2306.

Як бачимо, під впливом зменшення продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу за відповідний період часу на 400 грн. (3600 – 4000) значення прибутку від реалізації товарної продукції зменшилось на 0,296 млн грн (4,2306 – 4,5266). Аналогічно визначаємо дію всіх інших факторів.

Зважаю на виконані розрахунки резервами збільшення прибутку від реалізації товарної продукції можна вважати:

1) підвищення середньомісячної продуктивності праці в розрахунку на одного робітника промислово-виробничого персоналу на 400 грн;

2) збільшення матеріаловіддачі на 2 коп.;

3) підвищення фондовіддачі активної частини основних промислово-виробничих фондів на 4 коп.;

4) зменшення питомої ваги бракованої продукції в загальному її випуску на 0,12 пункта;

5) скорочення витрат на одну гривню товарної продукції на 3 коп.;

6) підвищення коефіцієнта ритмічності випуску товарної продукції на 0,09.

Мобілізація названих резервів уможливить досягнення загального збільшення прибутку від реалізації товарної продукції відповідно: на 296 тис. грн, 13,8 тис. грн, 23,2 тис. грн, 34,8 тис. грн, 28,2 тис. грн, 36,9 тис. грн. Загальна сума збільшення становитиме 432,9 тис. грн.

Дуже ефективним вважається застосування багатофакторної моделі кореляційно-регресійного зв'язку між економічними явищами, що вивчаються в процесі перспективного аналітичного дослідження. Отримати прогнозне значення певного узагальненого показника господарської діяльності підприємства (у нашому прикладі — прибутку від реалізації товарної продукції) можна, якщо в багатофакторну модель підставити очікувані значення факторних показників. Порівнюючи прогнозне значення за результуючим показником із реально досягнутим, можна зробити оцінку, а також визначити тенденції розвитку підприємства на майбутнє, виходячи з певних економічних ситуацій, що матимуть місце або можуть скластися за умов ринкових принципів господарювання. При наявності на підприємстві певної кількості двофакторних та багатофакторних моделей кореляційного зв'язку між відповідними економічними характеристиками (показниками) можна значно розширити діапазон аналітичного дослідження. Ці економіко-математичні моделі мають достатньо сталий характер унаслідок постійності коефіцієнтів регресії. Отже, правомірним буде віднесення розглянутих кореляційних моделей до бази стандартних моделей багатоцільового використання для розв'язування різноманітних завдань аналізу господарської діяльності підприємств. З-поміж методів математичного програмування най поширенішим є метод **лінійного програмування**. Л. В. Канторович розробив розрахунковий метод, що уможливлює розв'ння багатьох техніко-економічних проблем, зокрема найраціональнішого розподілу робіт між виробниками, розкроювання матеріалу з мінімальними збитками і т. п.

Прогнозування певних економічних явищ у процесі аналітичного дослідження відбувається за двома напрямками: цільовим і ресурсним. Реалізація першого пов'язана з необхідністю досягнення певних результативних показників і визначенням необхідних для цього ресурсів та інтенсивності їх використання. Реалізація другого напрямку передбачає прогнозування виробничих показників, виходячи з наявності певних ресурсів і фактичного характеру їх застосування. Багатоваріантність можливих способів отримання певного результату сприяє використанню в економічному аналізі математичних методів оптимального планування. За умов переходу до ринкових принципів господарювання переважає цільовий напрямок прогнозування. Засоби досягнення намічених показників виробничої діяльності, серед нах і ресурсні, підпорядковуються цьому головному завданню. Характер використання ресурсних засобів обумовлюється організаційно-технічним рівнем виробництва, удосконалення якого має сприяти зниженню собівартості продукції, поліпшенню фінансових результатів. Загальна постановка економічного завдання, що реалізується за допомогою методу лінійного програмування, передбачає визначення оптимального варіанта виробничої програми конкретного суб'єкта господарювання (підприємства) для одержання максимально можливого прибутку. Цей варіант реалізується тільки за можливості певного вибору інтенсивності використання різних технологій, за допомогою яких виконується виробнича програма. Отже, побудова економіко-математичної моделі передбачає (як результат її реалізації) визначення оптимального переліку кількісних характеристик продукції, що виробляється. За критерій оптимальності беруть, як було вже сказано, максимальне значення прибутку. Щодо аналітичного дослідження це означає вибір найсприятливішого для суб'єкта господарювання варіанта значень факторних показників. Економіко-математичну модель оптимальної виробничої діяльності підприємства можна створити на основі модифікації трифакторної виробничої функції Р. Стоуна. Модифікація моделі полягає у визначенні оптимальної виробничої програми випуску продукції за умов уведення до неї двох змінних, які притаманні ринковим умовам господарювання і визначаються на основі маркетингових досліджень. Ідеться про попит на продукцію та інформаційне очікування підвищення цін на продукцію, тобто індекс інфляції. Розв'язання такого виду завдань є дуже складним процесом, потребує спеціального математичного програмного забезпечення і може бути реалізоване тільки за допомогою електронно-обчислювальної техніки.

В економічному аналізі застосовуються також і економетричні методи, які передбачають поєднання елементів теоретичної економіки, математики і статистики. Базується використання цих методів на економічному моделюванні абстрактних економічних процесів. Зрозуміло, що модель відображає тільки певні аспекти об'єктивної дійсності, що характеризуються факторними показниками, най важливішими для розв'язання даного конкретного завдання аналітичного дослідження. Прикладом можуть бути матричні моделі, що відображають зв'язок витрат і результатів виробництва.

Застосовується в економічному аналізі і математичне моделювання розподільних відносин. Як приклад можна назвати побудову аналітичних таблиць з визначенням динаміки розподілу робітників за рівнем заробітної плати.

Чільне місце серед математичних методів, що застосовуються в економічному аналізі, належить **методам комплексної оцінки виробничо-господарської діяльності підприємств**. Сутність цих методів полягає у визначенні рейтингової оцінки кожного суб'єкта господарювання в системі сукупності певних показників. Існує багато різних варіантів розв'язання цього завдання, загальна постановка якого передбачає побудову вихідної матриці елементів a_{i_1}, де *i* — порядковий номер відповідного індивідуального показника ефективності діяльності підприємства, а *j* — порядковий номер структурного підрозділу в їхній сукупності на підприємстві. Застосовуючи **метод сум**, можна розрахувати значення показника комплексної оцінки виробничо-господарської діяльності для кожного *j*-го структурного підрозділу підприємства (К*j*) як суму показників системи:

$$К_j = \sum_{i=1}^{z} a_{i_1}, \quad (18.12)$$

де *z* — кількість показників у системі.

Особливість визначення результативного узагальненого показника полягає в тому, що всі показники системи повинні мати той самий напрям, тобто абсолютне збільшення значення кожного показника має свідчити про поліпшення (погіршення) відповідної характеристики ефективності виробництва (обсяг випуску продукції, прибуток, рентабельність, продуктивність праці, фондовіддача, матеріаловіддача, ритмічність випуску продукції тощо). За критеріальне значення кожного показника системи (a_{i_1}) для забезпечення їх тотожності можна взяти рівень виконання завдання щодо обсягу виробництва продукції, прибутку, рентабельності та інших характеристик ефективності виробництва на підприємстві.

Користуючись **методом відстаней**, можна визначити значення комплексного оцінного показника з урахуванням не тільки абсолютних значень показників, що порівнюються, а й їх наближення до найоптимальнішого значення. При цьому за оптимальний варіант можна взяти структурний підрозділ-еталон, показники економічної ефективності якого найбільше наближаються до оптимальних. У теоретичному плані такий зразковий структурний підрозділ може являти собою (*n* + 1) векторний стовпчик у вихідній матриці елементів a_{i_1}, що визначається за матричною моделлю:

$$a_j,\ n+1 = \max(a_{i_1}). \quad (18.13)$$

Можливий і такий варіант, коли оптимальне значення індивідуальних показників ефективності виробництва структурного підрозділу-еталона полягає у стовідсотковому виконанні завдання за відповідними параметрами: обсягом виробництва, прибутком, рентабельністю і т. д. Для розрахунку узагальненого комплексного показника ефективності може бути застосована математична модель, що передбачає розгляд кожного структурного підрозділу з їх сукупності як окремого параметра *n*-вимірного простору, координати якого визначаються значеннями індивідуальних показників ефективності, що підлягають порівнюванню. У цьому разі відстань між визначеним параметром і параметром-еталоном графічно характеризує кількісну оцінку рівня ефективності виробництва в даному структурному підрозділі стосовно встановленого критерію, тобто комплексного узагальненого показника. Значення узагальненого (рейтингового) показника ефективності визначається за формулою:

$$K_j = \frac{1}{\sqrt{(1-a_{1_1})^2 + (1-a_{2_1})^2 + \ldots + (1-a_{i_1})^2}}. \quad (18.14)$$

Абсолютне значення узагальненого рейтингового показника має пряму дію, тобто чим вищим він є, тим вище місце посідає відповідний *j*-й структурний підрозділ. Наприклад, для механічного цеху підприємства виконання завдання за звітний період становить за обсягом випуску продукції 97%, за продуктивністю праці — 90%, за фондовіддачею — 89%, за матеріаловіддачею — 94%. Тоді за формулою (18.14) значення узагальненого рейтингового показника становитиме:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[(1-0{,}97)^2+(1-0{,}90)^2+(1-0{,}89)^2+(1-0{,}94)^2\right]}}=6{,}25$$

За умов ринкових перетворень надзвичайно важливо мати об’єктивну і стислу аналітичну інформацію про підприємство, яка б задовольнила всіх її користувачів — як зовнішніх, так і внутрішніх. Насамперед це стосується аналітичної інформації про фінансовий стан підприємства, його платоспроможність. Така інформація використовується як власниками підприємств для підвищення дохідності капіталу, забезпечення стабільної роботи підприємницьких структур, так і кредиторами та потенційними інвесторами для мінімізації ризику за позиками і внесками. Вона має свідчити про конкурентоспроможність підприємства, його потенційні можливості. Певною мірою задовольняє зазначені вимоги аналітична інформація щодо кількісної рейтингової оцінки платоспроможності підприємства, яка визначається за формулою (18.14). При цьому як індивідуальні економічні характеристики можуть бути використані показники ліквідності, еталонні значення яких доцільно взяти на рівні чинних нормативів. До таких показників ліквідності включають:

- коефіцієнт абсолютної ліквідності;
- проміжний коефіцієнт покриття;
- загальний коефіцієнт покриття.

Виходячи з абсолютного значення рейтингового узагальнюючого комплексного показника, можна кількісно визначити певні пріоритети щодо оцінки стану платоспроможності кожного підприємства з відповідної їх сукупності. Основою розрахунків, що виконуються, є комплексна порівняльна рейтингова оцінка фінансового стану, рентабельності і ділової активності підприємства, що базується на методиці фінансового аналізу підприємства за умов ринкових відносин.

ЛЕКЦІЯ 19. ЗАГАЛЬНО-ВІДОМІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

19.1. Моделі парної регресії та їх дослідження. Приклади парних зв’язків в економіці

Економічна теорія виявила й дослідила значну кількість сталих і стабільних зв’язків між різними показниками. Наприклад, добре вивчено залежності споживання від рівня доходу, попиту від цін на товари, залежність між процентною ставкою й інвестиціями, обмінним курсом валюти й обсягом чистого експорту, між рівнями безробіття й інфляції, залежність обсягу виробництва від окремих факторів (розміру основних фондів, їх віку, підготовки персоналу тощо); залежність між продуктивністю праці та рівнем механізації, а також багато інших залежностей.

Здебільшого залежність між показниками можна відобразити за допомогою лінійних співвідношень.

Наприклад, для моделювання залежності індивідуального споживання *С* від наявного прибутку *У* Кейнс запропонував лінійне рівняння $C = c_0 + bY$

де b - величина автономного споживання; c_0 - гранична схильність до споживання ($0<b£1$).

Однак припущення щодо лінійної залежності між певними показниками економічного явища чи процесу може не підтверджуватися даними спостережень цих показників. І це природно, оскільки в деяких випадках залежність є суттєво нелінійною. Наприклад, залежність між рівнем безробіття *x* і рівнем інфляції *y* відображається так званою кривою **Філіпса**:

$$y = \frac{a}{x-b},$$

де $a > 0$, $b > 0$ - параметри моделі, а змінні x і y вимірюються у процентах.

При незмінний річний дисконтній (обліковій) ставці r і початковому внеску a через x років **у банку наявна сума грошей** обчислюватиметься за формулою

$$y = a(1+r)^x,$$

де *a, y* - параметри моделі.

При маркетингових і ринкових дослідженнях, при дослідженні збуту продукції та в демографії застосовують так звану **криву Гомперця**:

$$y = e^{ab^x + c},$$

де параметри a та c можуть набувати будь-яких значень, а b перебуває: в таких межах: $0 < b < 1$.

Зв'язок між обсягом виробленої продукції *y* та основними виробничими ресурсами, а саме обсягом витраченого капіталу С і обсягом витрат праці *L,* також має нелінійний характер (**модель Кобба-Дугласа, Тінбергена і Солоу**):

$$y = dC^a, \quad y = cL^b,$$

a, b, c, d - числові параметри; *c, d* > 0, *a, b³ 0.*

Нелінійні зв'язки, як звичайно, певними перетвореннями (заміною змінних чи логарифмуванням) зводять до лінійного вигляду або апроксимують (наближують) лініними функціями.

Отже, модель лінійної регресії (лінійне рівняння) є найпоширенішим (і найпростішим) видом залежності між економіними змінними. Крім того, побудоване лінійне рівняння може слугувати початковою точкою в разі складних (суттєво нелінійних) залежностях.

У загальному випадку ***парна лінійна регресія*** є лінійною функцією між залежною змінною *У* й однією пояснюючою змінною Х:

$$Y = a_1 X + a_0$$

Це співвідношення називається ***теоретичною лінійною регресійною моделлю,*** a_0 і a_1 - **теоретичні параметри (теоретичні коефіцієнти) регресії.**

Зазначимо, що принциповою в цьому разі є лінійність за параметрами a_0 і a_1 .

Щоб визначити значення теоретичних коефіцієнтів регресії, необхідно знати й використовувати всі значення змінних Х і *У* генеральної сукупності, що практично неможливо. Тому за вибіркою обмеженого обсягу будують так зване **емпіричне рівняння регресії**, у якому коефіцієнтами є оцінки теоретичних коефіцієнтів регресії:

$$\hat{Y} = \hat{a}_1 X + \hat{a}_0,$$

де $\hat{a}_1$ *і* $\hat{a}_0$ — оцінки невідомих параметрів a_1 і a_0 .

Через розбіжність статистичної бази для генеральної сукупності та вибірки оцінки $\hat{a}_1$ *і* $\hat{a}_0$ майже завжди відрізняються від дійсних значень коефіцієнтів a_1 і a_0, що призводить до розбіжності емпіричної та теоретичної ліній регресії.

Різні вибірки з однієї й тієї ж генеральної сукупності звичайно зумовлюють різні оцінки.

Можливе співвідношення між теоретичним і емпіричним рівняннями регресії схематично зображено на рис. 19.2.

Задачі лінійного регресійного аналізу полягають у тому, щоб за наявними-статистичними даними $(x_i, y_i), \quad i = \overline{1,n}$ для змінних *X* і *У:*

а) отримати найкращі оцінки $\hat{a}_1$ *і* $\hat{a}_0$ невідомих параметрів a_1 і a_0;

б) перевірити статистичні гіпотези про параметри моделі;

в) перевірити, чи досить добре модель узгоджується зі статистичними даними (адекватність моделі даним спостережень).

Для відображення того факту, що кожне індивідуальне значення y_i відхиляється від відповідного умовного математичного сподівання, у модель уводять випадковий доданок u_i:

$$y_i = M\left(Y / x = x_i\right) + u_i = a_0 + a_1 x_i + u_i\ ,$$

Отже, індивідуальні значення y_i; подають у вигляді суми двох компонент - систематичної $(a_o+a_1x_i;)$ і випадкової (u_i).

Таким чином, регресійне рівняння набуває вигляду

$$Y = a_0 + a_1 X + u$$

Завдання полягає в тому, щоб за конкретною вибіркою $(x_i, y_i),\quad i = \overline{1,n}$ знайти такі значення оцінок невідомих параметрів a_1 і a_0, щоб побудована лінія регресії була найкращою в певному розумінні серед усіх інших прямих. Іншими словами, побудована пряма має бути "найближчою" до точок спостережень за їх сукупністю.

Мірою якості знайдених оцінок можуть бути визначені композиції відхилень $u_i,\quad i = \overline{1,n}$. Наприклад, коефіцієнти a_1 і a_0 рівняння регресії можуть бути оцінені за умови мінімізації однієї з таких сум:

1) $$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)\ ;$$

2) $$\sum_{i=1}^{n} |u_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i|\ ;$$

3) $$\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)^2\ .$$

Однак перша сума не може бути мірою якості знайдених оцінок через те, що існує безліч прямих (зокрема, $Y = \overline{y}$), для яких $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

Метод визначення оцінок коефіцієнтів за умови мінімізації другої суми називається *методом найменших модулів* (МНМ).

Найпоширенішим і теоретично обґрунтованим є метод визначення коефіцієнтів, при якому мінімізується третя сума. Він дістав назву *методу найменших квадратів* (МНК).

Останній метод оцінювання параметрів найпростіший з обчислювальної точки зору. Крім того, оцінки коефіцієнтів регресії, знайдені за МНК при визначених передумовах, мають низку оптимальних властивостей (незміщеність, ефективність, обгрунтованість).

Серед інших, методів визначення оцінок коефіцієнтів регресії виокремимо метод моментів (ММ) і метод максимальної правдоподібності (ММП).

19.2. Метод найменших квадратів

Нехай проводиться експеримент щодо дослідження залежності однієї величини *y* від іншої величини *x* (наприклад, залежності роздрібного товарообігу від доходів населення; продуктивності праці від вартості капітальних активів тощо).

Допускається, що величини *x* і *y* пов`язані деякою функціональною залежністю $y = f(x)$ і необхідно визначити її вигляд експериментально.

Проведемо серію з n експериментів, у результаті яких для кожного фіксованого значення x_i, $i=1,2,...,n$, визначається (вимірюється приладом) значення величини *y*. Детермінована залежність $y=f(x)$ має вигляд:

Таблиця 19.1

Детермінована залежність $y=f(x)$

x_1	x_2	x_3	. ..	x_{n-1}	x_n
y_1	y_2	y_3	. . .	y_{n-1}	y_n

Якби значення y_i, $i=1,2,...,n$ було істинним (справжнім) значенням функції $y = f(x)$ при $x = x_i$, то ця схема була б табличним значенням функції. Але справа в тому, що величини y_i, отримані в результаті іспиту, несуть у собі деякий елемент випадковості, що визначається похибками при повторенні іспиту, похибками, обумовленими неможливістю абсолютно точно повторити умови іспиту тошо.

Нехай за цією вибіркою треба визначити оцінки $\hat{a}_1$ і $\hat{a}_0$ емпіричного рівняння регресії, тобто підібрати такі значення коефіцієнтів рівняння, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною.

Тоді $$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = Q(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)^2 \to \min$$

Необхідною умовою існування мінімуму неперервно диференційованої функції двох змінних є рівність нулю її частинних похідних. Так як

$$\frac{\partial Y}{\partial \hat{a}_1} = x; \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \hat{a}_1}\right)_i = x_i;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \hat{a}_0} = 1; \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \hat{a}_0}\right)_i = 1;$$

то маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1} = -2\sum_{i-1}^{n}\left(y_i - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_0\right) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \hat{a}_0} = -2\sum_{i-1}^{n}\left(y_i - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_0\right) = 0 \end{cases}$$

Звідки маємо:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 \sum_{i-1}^{n} x_i^2 + \hat{a}_0 \sum_{i-1}^{n} x_i = \sum_{i-1}^{n} x_i y_i; \\ \hat{a}_1 \sum_{i-1}^{n} x_i + \hat{a}_0 n = \sum_{i-1}^{n} y_i \end{cases}$$

Якщо в цій системі ліву і праву частини поділити на n, то одержимо:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i^2}{n} + \hat{a}_0 \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i y_i;}{n} \\ \hat{a}_1 \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i}{n} + \hat{a}_0 = \dfrac{\sum_{i-1}^{n} y_i;}{n} \end{cases}$$

Позначимо: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$,

$\overline{x^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$, $\overline{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$, тоді одержимо

$$\begin{cases} \hat{a}_1 \overline{x^2} + \hat{a}_0 \overline{x} = \overline{xy} \\ \hat{a}_1 \overline{x} + \hat{a}_0 = \overline{y} \end{cases}$$, звідки маємо $$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ \hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1 \overline{x} \end{cases}$$

Неважко помітити, що $\hat{a}_1$ можна обчислити за формулою:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_x^2},$$

де $S_{xy} = \operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ — вибірковий кореляційний момент випадкових величин X і Y;

$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ — вибіркова дисперсія X ;

$S_x = \sqrt{S_x^2}$ —стандартне відхилення X.

Тоді

$\hat{a}_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \cdot \frac{S_y}{S_x} = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x}$, отже коефіцієнт регресії пропорційний коефіцієнту кореляції, а коефіцієнт пропорційності використовують для зіставлення різних величин X і Y.

r_{xy} — вибірковий коефіцієнт кореляції; S_y —стандартне відхилення Y.

Отже, $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}}$;

Якщо окрім рівняння регресії Yна X ($\hat{Y} = \hat{a}_1 X + \hat{a}_0$) для тих самих емпіричних даних знайдено рівняння регресії X на Y ($\hat{X} = \hat{b}_1 Y + \hat{b}_0$), то добуток коефіцієнтів $\hat{a}_1$ та $\hat{b}_1$ дорівнює:

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 = r_{xy}\frac{S_y}{S_x} \cdot r_{xy}\frac{S_x}{S_y} = r_{xy}{}^2$$

Коефіцієнти $\hat{b}_0$ та $\hat{b}_1$ обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{y^2} - \overline{y}^2} \\ \hat{b}_0 = \overline{x} - \hat{b}_1 \overline{y} \end{cases}$$

Приклад. Зробити аналіз залежності обсягу споживання Y (у.о.) домогосподарства від наявного прибутку X (у.о.) за вибіркою обсягом n=12, результати якої наведено В таблиці. Визначити вид залежності, оцінити параметри рівняння регресії, оцінити силу лінійної залежності між X та Y, а також спрогнозувати споживання прибутку X=160

Таблиця 19.2.

Приклад статистичних спостережень й розрахунків

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2	$\hat{y}_i$	u_i	u_i^2
1	107	102	11449	10914	10404	103,626	-1,63	2,64
2	109	105	11881	11445	11025	105,494	-0,49	0,24
3	110	108	12100	11880	11664	106,428	1,57	2,47
4	113	110	12769	12430	12100	109,23	0,77	0,59
5	120	115	14400	13800	13225	115,767	-0,77	0,59
6	122	117	14884	14274	13689	117,635	-0,63	0,40
7	123	119	15129	14637	14161	118,569	0,43	0,19
8	128	125	16384	16000	15625	123,238	1,76	3,10
9	136	132	18496	17952	17424	130,709	1,29	1,67
10	140	130	19600	18200	16900	134,445	-4,44	19,76
11	145	141	21025	20445	19881	139,115	1,89	3,56
12	150	144	22500	21600	20736	143,784	0,22	0,05
Разом	**1503**	**1448**	**190617**	**183577**	**176834**	**------**	**0,00**	**35,26**
Середнє	**125,25**	**120,667**	**15884,8**	**15298,1**	**14736,2**			
						0,99161	коефіцієнт кореляції	

Побудуємо кореляційне поле:

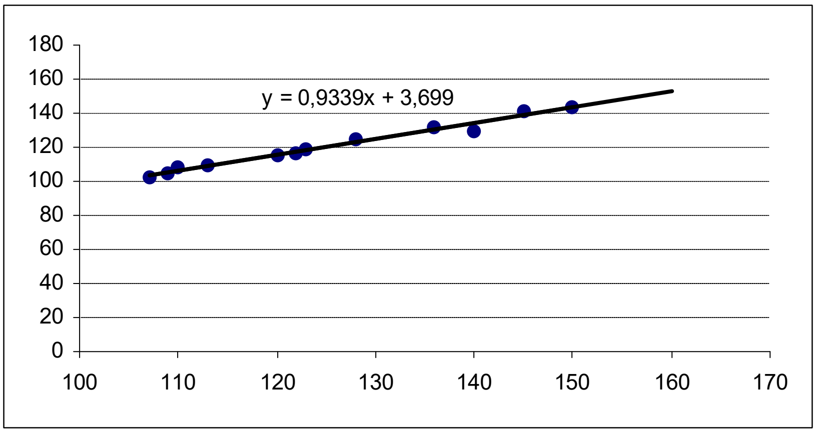


Рис.19.1. Кореляційне поле

За розміщенням точок на кореляційному полі допускаємо, що залежність між X та Y лінійна: $\hat{Y} = \hat{a}_1 X + \hat{a}_0$.

Знайдемо оцінки невідомих параметрів моделі:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \dfrac{15298{,}1 - 125{,}25\cdot 120{,}67}{15884{,}75 - (125{,}25)^2} = 0{,}9339 \\ \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} = 120{,}67 - 0{,}9339\cdot 125{,}25 = 3{,}699 \end{cases}$$

Отже, рівняння парної лінійної регресії: $\hat{Y} = 3{,}699 + 0{,}9339X$. За наведеним рівнянням розрахуємо $\hat{y}_i$, а також $u_i = y_i - \hat{y}_i$.

Для аналізу сили лінійної залежності обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}} = \frac{184{,}1625}{14{,}04\cdot 13{,}23} = 0{,}9914$$

Отримане значення коефіцієнта кореляції дає змогу дійти висновку про сильну (пряму) лінійну залежність між X та Y .

Прогнозоване споживання при доступному доході X=160 за допомогою моделі становить $\hat{y}(160) = 3{,}399 + 0{,}9339\cdot 160 = 153{,}12$.

Коефіцієнт $\hat{a}_1$ показує, на яку величину зміниться обсяг споживання. Якщо доступний дохід збільшиться на одиницю. Він також визначає тангенс кута нахилу прямої регресії відносно додатного напрямку осі абсцис. Вільний член $\hat{a}_0$ визначає прогнозоване значення Y при величині наявного прибутку X, що дорівнює нулю.

19.3. Домашнє завдання

Самостійно навести і пояснити моделі: Філіпса, Кейнса, Гомперця, Лафера, Кобба-Дугласа, Тінбергена, Солоу, Клейна, Вальраса, Еванса, Харрода-Домара, Гренджера, Леонтьєва, Харрода, Самуельсона-Хікса, Манделла-Флемінга, Курно, Стекєльберга, Марковіца, Шарпа, модель олігопольної цінової конкуренції, IS-LM, AD-AS, узагальнену модель Кейнса, гравітаційну, оптимізаційну міжгалузеву.

Навести і пояснити моделі: теорії ігор, оптимізаційні (прямі і двоїсті), економетричну, СМО (черги з відмовами, з бункером, з обмеженим і необмеженим часом очікування), теорії графів (оптимізація графів і потоки на мережах; метод гілок і границь; динамічне математичне програмування; задачі "Коммівояжера", "Діліжанса"), теорії Байєса, евристичну, імітаційну, послідовності виконання операцій (задача Джонсона), задачи оптимізації запасів, задачи оптимізації розкладів, лінійного (суміші, транспортної, рюкзака, оптимального плану, бомбардувальника, вибору типу суден), нелінійного, булевого і динамічного програмування (Беллмана), багатокритеріальні, лагові.

<u>Приклад: Мультиплікативна виробнича функція Кобба-Дугласа та її зв'язок з моделями Тінбергена та Солоу.</u>

$$Y = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2},$$

- *Y* — випуск продукції ;
- *A* — нейтральний технсчний прогрес ;
- *K* — обсяг капитала ;
- *L* — витрати праці;
- α_1, α_2 — параметри виробничої функції, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Мультиплікативна виробнича функція ***<u>Тінбергена, Солоу – це моделі Кобба-Дугласа з врахуванням технічного прогресу:</u>***

$$Y = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \, G.$$

ЛЕКЦІЯ 20. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

20.1. Балансовий метод. Принципова схема міжгалузевого балансу (МГБ)

Балансові моделі широко використовують в економічних дослідженнях, аналізі, плануванні. Ці моделі будуються на підставі балансового методу, тобто узгодженні матеріальних, трудових і фінансових ресурсів. Якщо описувати економічну систему загалом, то під балансовою моделлю передбачають систему рівнянь, кожне з яких виражає балансові співвідношення між виробництвом окремими економічними об'єктами обсягів продукції й сукупною потребою в цій продукції. За такого підходу розглядувана економічна система складається з об'єктів, кожен з яких випускає певний продукт, частина якого споживається ним же та іншими об'єктами системи, а решта виводиться за межі системи як її кінцева продукція. Якщо замість поняття «продукт» увести загальніше поняття «ресурс», то під *балансовою моделлю* розуміють систему рівнянь, котрі задовольняють вимоги відповідності щодо наявності ресурсу та його використання. Можна також розглядати приклади балансової відповідності, як-от: відповідність наявної робочої сили й кількості робочих місць, платоспроможного попиту населення та продукції (товарів і послуг) тощо.

Розгляньмо деякі відомі види балансових моделей:

- часткові матеріальні, трудові й фінансові баланси щодо народного господарства чи окремих галузей (регіонів);

- міжгалузеві баланси;
- матричні техпромфінплани підприємств і фірм.

Балансові моделі на підставі звітних балансів характеризують наявні пропорції, де ресурсна частина завжди дорівнює витратній. Для виявлення диспропорцій використовують балансові моделі, у яких фактичні ресурси узгоджувалися б не тільки з їх фактичним споживанням, а й з потребою в них. Зазначимо, що балансові моделі не містять якогось механізму порівняння окремих варіантів економічних рішень (як це має місце, наприклад, при вибору одного з альтернативних варіантів інвестиційного проекту, див. розділ 4) і не передбачають взаємозаміни різних видів ресурсів, що не дозволяє здійснити вибір оптимального варіанта розвитку економічної системи. Власне, це й визначає деяку обмеженість балансових моделей і балансового методу загалом.

Основу інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці становить матриця коефіцієнтів витрат ресурсів за конкретними напрямами їхнього використання. Наприклад, у моделі міжгалузевого балансу таку роль відіграє так звана *технологічна матриця* — таблиця міжгалузевого балансу, що складається з коефіцієнтів (нормативів) прямих витрат на виробництво одиниці продукції в натуральному вираженні. З багатьох причин вихідні дані реальних господарюючих об’єктів не можуть бути використані в балансових моделях безпосередньо, тому підготовка інформації до введення в модель є досить складною проблемою. Так, для побудови моделі міжгалузевого балансу використовується специфічне поняття чистої (чи технологічної) галузі, що поєднує все виробництво певного (агрегованого) продукту незалежно від адміністративної підпорядкованості й форм власності підприємств і фірм. Перехід від господарських галузей до чистих галузей вимагає спеціального перерахунку реальних даних господарських об’єктів, наприклад, агрегування галузей, вилучення внутрішньогалузевого обігу тощо.

Балансові моделі будуються як числові матриці — прямокутні таблиці чисел. У зв’язку з цим балансові моделі належать до типу матричних економіко-математичних моделей. У матричних моделях балансовий метод дістає чітке математичне вираження. Отже, матричну структуру мають міжгалузевий і міжрегіональний баланси виробництва та розподілу продукції окремих регіонів, моделі промфінпланів підприємств і фірм тощо. Попри специфіку цих моделей їх об’єднує не лише спільний формальний (математичний) апарат побудови та єдиний алгоритм обчислень, а й аналогічність низки економічних характеристик. Це дає змогу розглядати структуру, зміст і основні залежності матричних моделей на прикладі міжгалузевого балансу та розподілу продукції в народному господарстві. Даний баланс відображає виробництво та розподіл суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузевих виробничих зв’язків, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу.

Принципова схема міжгалузевого балансу (МГБ) виробництва й розподілу суспільного продукту у вартісному вираженні наведена в таблиці 20.1. У підґрунтя цієї схеми покладено поділ сукупного продукту на дві частини: проміжний і кінцевий продукт; усе народне господарство подане тут як сукупність галузей (чисті галузі). Кожна з цих галузей фігурує в балансі як виробник і як споживач. Розглянемо схему МГБ в розрізі його блоків, що мають різний економічний зміст, — їх заведено називати *квадрантами балансу* (на схемі квадранти позначені римськими цифрами).

Таблиця 20.1

ПРИНЦИПОВА СХЕМА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

Галузі-виробники	Галузі-споживачі					Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	..	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	..	x_{1n}	Y_1	X_1

2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	..	x_{2n}	$Y2$	$X2$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	..	x_{3n}	$Y3$	$X3$
. . .	. . .	. . .	. . .	I . .	. . .	II	. . .
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	..	x_{nn}	Yn	Xn
Амортизація	C_1	C_2	C_3	..	C_n	IV	
Оплата праці	$v1$	$v2$	$v3$	III	vn		
Чистий дохід	m_1	m_2	m_3	..	m_n		
Валовий продукт	X_1	X_2	X_3	..	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Перший квадрант МГБ — це таблиця міжгалузевих потоків. Показники, що містяться на перетині рядків і стовпців, є обсягами міжгалузевих потоків продукції xij, i та j — відповідно номери галузей виробників і споживачів. Перший квадрант за формою є квадратною матрицею n-го порядку, сума всіх елементів якої дорівнює річному фонду відтворення амортизації засобів виробництва в матеріальній сфері.

У другому квадранті подана кінцева продукція всіх галузей матеріального виробництва, де під кінцевою продукцією мається на увазі продукція, що виходить зі сфери виробництва в кінцеве використання (на споживання та накопичення). У табл. 20.1 цей розділ подано в узагальненому вигляді як один стовпчик величин Yi.; у розгорнутій схемі балансу кінцевий продукт кожної галузі можна подати диференційовано за напрямами використання: на особисте споживання населення, суспільне споживання, на накопичення, покриття збитків, експорт тощо.

Третій квадрант МГБ також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу — як суму чистої продукції й амортизації; чисту продукцію тлумачать як суму оплати праці та чистого доходу галузей. Обсяг амортизації (Cj) та чистої продукції (vj + mj) деякої галузі називають умовно чистою продукцією цієї галузі й позначають у подальшому через Zj.

Четвертий квадрант відбиває розподіл і використання національного доходу. У результаті перерозподілу створеного національного доходу утворюються скінченні доходи населення, підприємств, держави.

Дані четвертого квадранта важливі для відображення в міжгалузевій моделі балансу доходів і витрат населення, джерел фінансування капіталовкладень, поточних витрат невиробничої сфери, для аналізу загальної структури доходів за групами споживачів. Загалом МГБ у межах єдиної моделі об’єднує баланси галузей матеріального виробництва, баланс сукупного суспільного продукту, баланс національного доходу, баланс доходів і витрат населення.

Якщо, як показано в табл. 20.1, позначити валовий продукт j-ї галузі літерою Xj, то можна записати два співвідношення, що відбивають сутність МГБ та є підґрунтям його економіко-математичної моделі.

По-перше, розглядаючи схему балансу за стовпчиками, можна дійти висновку, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі-споживача та її умовно чистий продукт дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$Xj = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{20.1}$$

По-друге, розглядаючи МГБ за рядками для кожної галузі-виробника, бачимо, що валова продукція будь-якої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, і кінцевої продукції даної галузі:

$$Xi = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(20.2):

Підсумовуючи за *j* систему рівнянь (20.1), дістаємо

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Аналогічно, підсумовуючи за *i* систему рівнянь (20.2), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Звідси легко помітити, що:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

(20.3)

Це рівняння показує, що в міжгалузевому балансі виконується принцип еквівалентності матеріального та вартісного складу національного доходу.

20.2. Економіко-математична модель міжгалузевого балансу

Основу інформаційного забезпечення моделі міжгалузевого балансу становить технологічна матриця, що містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції. Ця матриця є базою економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу.

Допускається гіпотеза, згідно з якою для виробництва одиниці продукції в *j*-й галузі необхідна певна кількість витрат проміжної продукції *i*-ї галузі, що становить *aij*, і ця величина не залежить від обсягів виробництва в *j*-й галузі та є досить стабільною величиною в часі. Величини *aij* називають коефіцієнтами прямих матеріальних витрат та обчислюють таким чином:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad a_{ij} = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

(11.4)

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат показують, яку кількість продукції *i*-ї галузі необхідно витратити, якщо враховувати лише прямі витрати, для виробництва одиниці продукції *j*-ї галузі. З урахуванням формули (20.4) систему рівнянь балансу (20.2) можна записати у вигляді

$$Xi = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, Xi + Y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(20.5)

Якщо ввести до розгляду матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат *A* = (*aij*), вектор-стовпчик валової продукції *X* та вектор-стовпчик кінцевої продукції *Y*:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система рівнянь (20.5) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y.$$

(20.6)

Систему рівнянь (20.5), чи у матричній формі (20.6), називають ***економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу*** *(моделлю Леонтьєва, моделлю «витрати - випуск»)*. За допомогою цієї моделі можна виконати три варіанти обчислень:

- задаючи в моделі обсяги валової продукції кожної галузі (Xi), можна визначити обсяги кінцевої продукції кожної галузі(Yi):

$$Y = (E - A)X, \tag{20.7}$$

де E — одинична матриця n-го порядку;

- задаючи обсяги кінцевої продукції всіх галузей (Yi), можна визначити обсяги валової продукції кожної галузі (Xi):

$$X = (E - A)–1Y; \tag{20.8}$$

- для низки галузей, задаючи обсяги валової продукції, а для решти — обсяги кінцевої продукції, можна відшукати величини кінцевої та валової продукції всіх галузей.

У формулах (20.7) та (20.8) E позначає одиничну матрицю n-го порядку, а $(E - A)–1$ — матрицю, обернену до матриці $(E - A)$.

Якщо визначник матриці $(E - A)$ не дорівнює нулеві, тобто ця матриця не вироджена, тоді існує матриця, обернена до неї. Позначимо цю матрицю через B:

$$B = (E - A)–1. \tag{20.9}$$

Систему рівнянь у матричній формі (20.8) можна записати:

$$X = BY\ . \tag{20.10}$$

Елементи матриці B позначатимемо через bij , тоді з матричного рівняння (20.10) для будь-якої i-ї галузі можна отримати співвідношення:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{20.11}$$

Із співвідношення (20.11) випливає, що валова продукція постає як зважена сума обсягів кінцевої продукції, ваговими коефіцієнтами тут є bij, котрі показують, скільки всього необхідно виробити валової продукції i-ї галузі для випуску у сферу кінцевого використання одиниці продукції j-ї галузі. На відміну від коефіцієнтів прямих витрат aij , коефіцієнти bij називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*, і вони включають у себе як прямі, так і опосередковані витрати всіх порядків. Якщо прямі витрати відбивають кількість засобів виробництва, використаних безпосередньо на виготовлення певних обсягів даного продукту, то опосередковані стосуються попередніх стадій виробництва і входять у виробництво продукції не прямо, а через інші (проміжні) засоби виробництва.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат bij показують, який обсяг продукції j-ї галузі необхідно виробити, щоб з урахуванням прямих і опосередкованих витрат цієї продукції отримати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат можна застосовувати, коли необхідно визначити, як вплинуть на валовий випуск певної галузі деякі зміни щодо обсягів випуску кінцевої продукції всіх галузей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \tag{20.12}$$

де DXi та DYj — зміни (прирости) обсягів валової й кінцевої продукції відповідно.

20.3. Динамічні міжгалузеві балансові моделі

Розглянуті в попередній темі міжгалузеві балансові моделі є статичними, тобто такими, у яких усі залежності стосуються одного й того ж самого моменту часу. Ці моделі можуть розроблятися лише для окремо взятих періодів, причому в межах таких моделей не встановлюється зв’язок із попередніми чи наступними періодами. Економічна динаміка відображається, отже, поза межами побудованих моделей, що, очевидно, вносить певне спрощення та звужує можливості аналізу.

До таких спрощень насамперед варто зарахувати те, що в статичних МГБ не аналізуються розподіл, використання та виробнича ефективність інвестицій. Інвестиції винесено зі сфери виробництва до сфери кінцевого використання разом із предметами споживання та невиробничих витрат, тобто включено до кінцевого продукту.

Розглянемо динамічну модель, побудовану як розвиток статичної МГБ, де виробничі капітальні вкладення виокремлюються зі складу кінцевої продукції, досліджується їхня структура і вплив на зростання обсягу виробництва. В основу побудови моделі у вигляді динамічної системи рівнянь покладено математичну залежність між обсягом капітальних вкладень і приростом продукції. Розв’язок системи, як і при статичній моделі, приводить до певних рівнів виробництва, але в динамічному варіанті на відміну від статичного ці шукані рівні залежать від обсягів виробництва в попередніх періодах.

Принципову схему квадрантів І і ІІ динамічного міжгалузевого балансу ілюструє табл. 20.2.

Модель містить дві матриці міжгалузевих потоків. Матриця поточних виробничих витрат з елементами xij збігається з відповідною матрицею статичного балансу. Елементи другої матриці ΔФij показують, яку кількість продукції i-ї галузі в поточному періоді j-та галузь спрямовує як виробничі капітальні вкладення у свої основні фонди. Матеріально це виражається у прирості обсягів виробничого устаткування, споруджень, виробничих площ, транспортних засобів тощо в галузях, що споживають відповідну продукцію.

Таблиця 20.2.

Принципова схема динамічного балансу

Галузі, що виробляють продукцію	Галузі, що споживають продукцію				Міжгалузеві потоки капітальних вкладень				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	.	n	1	2	.	n		
1	x11	x12	.	x1n	□ Ф11	□ Ф12	.	□ Ф1n	Y1	X1
2	x21	x22	.	x2n	□ Ф21	□ Ф22	.	□ Ф2n	Y2	X2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	xn1	xn2	.	xnn	□Фn1	□Фn2	…	□Фnn	Yn	Xn

У статичному балансі потоки капіталовкладень не диференціюються за галузями-споживачами і подаються загальною величиною у складі кінцевої продукції Yi кожної i-ї галузі. У динамічній схемі кінцевий продукт Yi містить продукцію i-ї галузі, що йде на особисте та суспільне споживання, нагромадження невиробничої сфери, приріст оборотних фондів, незавершеного будівництва, на експорт тощо. Отже, сума потоків капіталовкладень і кінцевого продукту Yi□ динамічної моделі дорівнює кінцевій продукції статичного балансу:

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta\Phi_{ij}+Y_i'=Y_i,\quad i=\overline{1,n},$$

тому рівняння розподілу продукції в динамічному балансі набуває вигляду:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta \Phi_{ij} + Y_i', \quad i = \overline{1,n}.$$

Міжгалузеві потоки поточних витрат, як і в статичній моделі, можна подати через валову продукцію галузей за допомогою коефіцієнтів прямих матеріальних витрат: xij = aijXj.

На відміну від потоків поточних витрат міжгалузеві потоки капітальних вкладень пов'язані не з усім обсягом випуску продукції, а лише з її приростом, який вони зумовлюють. При цьому в наведеній моделі передбачається, що приріст продукції поточного періоду зумовлюється вкладеннями, зробленими в цьому самому періоді. Якщо поточний період позначити через t, то приріст продукції ΔXj дорівнює різниці абсолютних рівнів виробництва в період t і в попередній щодо нього (t – 1)-й період:

$$\Delta X_j = X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}.$$

Вважаючи, що приріст продукції пропорційний до приросту виробничих фондів, дістаємо:

$$\Delta \Phi_{ij} = \varphi_{ij} \Delta X_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо в останній рівності коефіцієнти пропорційності φij. Оскільки

$$\varphi_{ij} = \frac{\Delta \Phi_{ij}}{\Delta X_j},$$

то економічний зміст цих коефіцієнтів полягає в тому, що вони показують, скільки продукції i-ї галузі потрібно вкласти в j-ту галузь, щоб збільшити виробничу потужність j-ї галузі на одиницю продукції. Передбачається, що виробничі потужності використовуються цілком і приріст продукції дорівнює приросту потужності. Коефіцієнти φij називаються коефіцієнтами вкладень, або коефіцієнтами прирісної фондомісткості.

За допомогою коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і коефіцієнтів вкладень φij динамічну систему рівнянь можна подати в такому вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \Delta X_j + Y_i', \quad i = \overline{1,n}.$$

Ця система являє собою систему лінійних різницевих рівнянь 1-го порядку. Її можна звести до звичайної системи лінійних рівнянь, урахувавши, що всі обсяги валової і кінцевої продукції належать деякому періоду t, а приріст валової продукції визначено порівняно з (t – 1)-м періодом:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \left(X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)} \right) + Y_i^{(t)}.$$

Звідси випливають такі співвідношення:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + \varphi_{ij} \right) X_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} X_j^{(t-1)} + Y_i'^{(t)}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Нехай нам відомі обсяги валової продукції всіх галузей у попередньому періоді (величини Xj(t–1)) і кінцевий продукт галузей у періоді t. Тоді останні співвідношення являють собою систему n лінійних рівнянь із n невідомими обсягами виробництва t-го періоду. Отже, розв'язок динамічної системи лінійних рівнянь дає змогу визначити випуск продукції в наступному періоді залежно від рівня, досягнутого в попередньому періоді. Зв'язок між періодами встановлюється через коефіцієнти вкладень φij, що характеризують фондомісткість одиниці приросту продукції.

Переходячи від дискретного аналізу до неперервного, дістаємо:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} + Y_j'.$$

Або, переходячи до границі, маємо:

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \varphi_{ij} \frac{dX_j}{dt}.$$

Остаточно для випадку неперервних змін дістаємо таку систему співвідношень:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{X_j}{dt} + Y_i', \quad i = \overline{1,n}.$$

Здобуте співвідношення являє собою систему n лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Для її розв'язання, окрім матриць коефіцієнтів прямих матеріальних поточних витрат і коефіцієнтів капітальних витрат (вкладень) необхідно знати рівні валового випуску в початковий момент часу t = 0 та закон зміни обсягу кінцевого продукту, тобто вид функцій Yi(t). На підставі цих даних, розв'язавши відповідну задачу Коші для системи диференціальних рівнянь, теоретично знайдемо обсяги валового випуску для будь-якого моменту часу. Практично ж більш-менш достовірний опис валових і кінцевих обсягів випуску як функцій часу можна дістати лише для порівняно невеликих проміжків часу.

У динамічній моделі особливу роль відіграють коефіцієнти прирісної фондомісткості φij. Вони утворюють квадратну матрицю n-го порядку:

$$\varphi_{ij} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

кожен стовпець якої характеризує для відповідної j-ї галузі розмір та структуру фондів, необхідних для збільшення на одиницю її виробничої потужності (випуску продукції). Матриця коефіцієнтів прирісної фондомісткості дає підстави для подальшого економічного аналізу та планування капітальних вкладень.

У розглянутій динамічній моделі МГБ передбачається, що приріст продукції поточного періоду зумовлений капіталовкладеннями, зробленими в цьому самому періоді. Для порівняно коротких періодів це припущення може виявитися нереальним, оскільки існують відомі, іноді доволі значні відставання в часі (так звані часові лаги) між вкладенням засобів у виробничі фонди і приростом випуску продукції. Моделі, що так чи інакше враховують лаги капітальних вкладень, утворюють особливу групу динамічних моделей міжгалузевого балансу. З-поміж теоретичних моделей цього типу варто виокремити насамперед лінійну динамічну МГБ Леонтьєва, у якій капітальні вкладення подаються у вигляді так званого інвестиційного блока у формі Леонтьєва. Математичним узагальненням цієї та низки інших динамічних моделей є динамічна модель у матричній формі Неймана, що ґрунтується на математичній теорії рівномірного пропорційного зростання економіки (магістральна теорія).

Модель Неймана. Раніше було розглянуто **трисекторну нелінійну динамічну модель економіки**. Коли йдеться про розгляд багатьох галузей, доводиться відмовлятися від нелінійності через численні труднощі, що пов'язані з нею. Проте дослідження навіть лінійних динамічних багатогалузевих моделей також становить певні труднощі, хоча й приводить до змістовних економічних висновків.

Модель Неймана є **узагальненою моделлю Леонтьєва**, оскільки припускає виробництво одного продукту різними способами (**у моделі Леонтьєва кожна галузь виробляє один продукт**, і жодна інша галузь не може виробляти цей продукт).

У моделі подано n продуктів і m способів їх виробництва, кожний j-й спосіб задається вектором-стовпцем витрат aj і вектором-стовпцем випусків bj у розрахунку на одиницю інтенсивності процесу:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

З векторів витрат і випуску утворюються матриці витрат і випуску:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad B = (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Коефіцієнти витрат aij, і випуску bij невід'ємні. Природно припустити, що для реалізації будь-якого процесу необхідні витрати хоча б одного продукту, тобто для кожного j знайдеться хоча б одне i, таке що aij > 0, і кожен продукт може бути зроблений хоча б одним способом, тобто для кожного і існує деяке j, таке що bij > 0. З цієї умови випливає, що кожний стовпець матриці A та кожен рядок матриці B повинні мати принаймні один додатний елемент.

Інтенсивність процесів має бути також невід'ємною: $\bar{x}_j(t) \geq 0,$ j = 1, …, m.

Позначимо через xt вектор-стовпець інтенсивності виробництва:

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix},$$

а через pt — вектор-рядок невід'ємних цін: pt = (p1(t), p2(t), …, pn(t)).

Вектор yt = Axt — це вектор витрат за заданого вектора інтенсивності процесів xt, а вектор zt = Bxt — вектор випусків.

Модель Неймана описує замкнену економіку в тому сенсі, що для виробництва продукції в наступному виробничому циклі (протягом року t витрачається продукція, виготовлена в попередньому виробничому циклі, тобто протягом року (t – 1)):

$$Ax_t \leq Bx_{t-1}, \quad x_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

при цьому передбачається, що задано початковий вектор запасів Bx0 ≥ 0. Це **модель Неймана в натуральній формі**.

У межах моделі Неймана можна ставити і розв'язувати оптимізаційні економічні задачі. Найбільше оптимізаційна задача формулюється так: знайти оптимум лінійної функції стану наприкінці розглянутого періоду:

$$\max cx_T$$
$$Ax_t \leq Bx_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Література

1.Економетрія засобами MS Excel: Навч.посіб. / С.Л.Лондар, Р.В.Юринець.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2004.- 242 с.

2.Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: Монографія.- К.: ЦУЛ, - 2003.- 202 с.

3.Ржевський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій: Підручник – К.: Академія, 2006. – 560 с.

4.Хургин Я.И. Да, нет или может быть… – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1983. – 208 с. 5.Моделирование сложных систем: (информационный подход) / А.Г. Ивахненко. – К. : Вища шк. ; Главное изд-во, 1987. – 63 с.

6.Системній анализ и структуры управления. (Книга восьмая). Под общей редакцией проф. В.Г.Шорина.- М.: Знание, 1975.- 304 с.

7.Мозгалевский А.В., Койда А.Н. Вопросы проектирования систем диагностирования. – Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1985. – 112 с.

8.Дьячук А.Г. Математическое и имитационное моделирование производственных систем : научное издание. – М. : МИСИС, 2007. – 540 с.

9.Кноринг Л.Д., Деч В.Н. Геологу о математике : советы по практическому применению. — Л. : Недра, 1989. – 208 с.

10.Экономическая информатика: Учебник / Под ред. Конюховского П.В. и Колесова Д.Н. – СПб: Питер, 2001. – 560 с.

11.Экономические методы и прикладные модели. Учебн. пособие для вузов/ Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 391 с.Домарев В.В. Безопасность информационных технологий. – К.: ТИД ДС, 2001. – 688 с.

12.Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Х.: Гриф, 2003. – 580 с.

13.Ржевський С.В. Елементи теорії дослідження операцій: Навч. посіб. для студ. екон. спец. — К.: ЄУФІМБ, 1999. — 118 с.

14.Саати Т.Л. Математические модели конфликтных ситуаций. – М.: Сов. Радио, 1977. – 304 с.

15.Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов/ Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ 2000. – 407 с.
16.Глушков В.М. Введение в АСУ. – К.: Техніка, 1974. – 320 с.
17.Управління фінансовою санацією підприємства : Навчальний посібник / С.Я. Салига, О.І. Дацій, Н.В. Нестеренко, О.В. Серебряков. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 240 с.
18.Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 1998. — 242 с.

Додаткова література

1.Зайченко Ю.П.. Дослідження операцій. – К.: З АТ "Віпол", 2000. – 688 с.
2.С.І.Наконечний, С.С.Савіна Математичне програмування: навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
3.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
4.Кутковецький В.Я. Дослідження операцій : навчальний посібник.– К.: Вид-во ТОВ "Видавничий дім "Професіонал", 2004. – 350 с.
5.Катренко А.В. Дослідження операцій : підручник. – Львів : Магнолія Плюс, 2004. – 549 с.
6.Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. — 407 с.
7.Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операцій : збірник задач.- К.: Вища школа, 1990
8.Салманов О. Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. – Спб.: БХВ – Петербург, 2003. – 464 с.
9.Акофф Р.Л. Планирование в больших экономических системах : пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1972. — 223 с.
10.Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М. : Финансы и статистика, 2000. — 368 с.
11.Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. — М. : Финансы и статистика, 2002. — 368 с.
12.Беляев А.А., Коротков Э.М. Системология организации. — М. : ИНФРА-М, 2000. — 182 с.
13.Беренс В., Хавранек П. М. Руководство по оценке эффективности инвестиций. — М.: ИНФРА-М, 1995.
14.Браверман Э.М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. — М.: Наука, 1976. — 368 с.
15.Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.И. Лекции по теории сложных систем. – М.: Сов. Радио, 1973. – 440 с.
16.Кублій Л.І. Математичні методи в психології. Теоретичний курс: Навч.посібник. К.: КиМУ, 2005. – 415 с.
17.Варфоломеев В.И., Воробьев С.Н. Принятие управленческих решений: Учебное пособие для вузов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2001. – 288 с.
18.Владимирова Л.В. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. – М.:ИТК "Дашков и К", 2005. – 400 с.
19.Джексон П. Введение в экспертные системы: Учебное пособие: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2001. – 624 с.
20.Лук'янова В.В. Комп'ютерний аналіз даних. – К.: ВЦ "Академія", 2003. – 344 с.
21.Чекотовский Э.В. Графический анализ статистических данных в MS Excel 2000. – М.: ИД „Вильямс", 2002. – 464 с.
22.Шикин Е.В. Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: Дело, 2000 – 315 с.
23.Управление эффективностью производства с применением экономико-математических методов и АСУ. Труды МВТУ. №427 / Под ред. Постникова В.И., Сванидзе Э.Н..- М.: МВТУ, 1985.- 132 с.
24.Верезуб М.В., Єзерський Ю.А., Коновальцев П.О., Склепус В.О. Моделювання технічних та технологічних систем із застосуванням програми MATLAB: Навч.- метод. посіб. для студ.

машинобуд. спец. / Харківський держ. політехнічний ун-т. — Х.: ХДПУ, 2000. — 60с.
25.Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2002. – 208 с.
26.Сучасний економічний аналіз: Навч. посіб. для студ. екон. та мат. спец. вищих навч. закл.:У 2 ч. Ч.1. Мікроекономіка / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. — К.: Вищ. шк., 2004. — 262 с.
27.Ханк Д.Э., Уичерн Д.У., Райтс А.Дж. Бизнес-прогнозирование.–М.:ИД"Вильямс",2003,656с.

Інтернет - посилання:

1.http://pulib.if.ua/part/2136
2.http://mathsciences.at.ua/-1.doc – Системи масового обслуговування (СМО)
3.http://mathsciences.at.ua/index/0-27 - Системи масового обслуговування (СМО)
4.http://www.osvitadnepr.dp.ua/modelyuvannya-zadach/1/ - Класифікації альтернативні
5.http://fingal.com.ua - Моделювання
6.http://knlu.kiev.ua/ua/c_inf/ekonometria/tema_2.htm - Економетрика

Навчальне видання

САМАРАЙ ВАЛЕРІЙ ПЕТРОВИЧ

“Економіко-математичне моделювання”

Курс лекцій

Літературний редактор: Р. В. Піскова

Видавництво “Київський міжнародний університет”
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК №978 від 08.07.2002 р.

03179, Україна, м.Київ, вул.Львівська, 49
Т. (044) 424 64 88

Видруковано у друкарні Київського міжнародного
університету
03179, Україна, м.Київ, вул.Львівська, 49