

621.75

С72

А.А. Спиридонов

# Планирование эксперимента

при исследовании  
технологических  
процессов

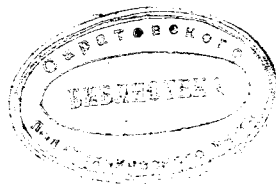
А. А. Спиридонов

621.75

С72

Планирование  
эксперимента  
при исследовании  
технологических  
процессов

4481450



МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1981

ББК 34.5  
С72  
УДК 621 : 658.5.012.1

Рецензент канд. техн. наук В. Г. Митрофанов

**Спиридонов А. А.**

С72 Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. М.: Машиностроение, 1981.— 184 с., ил.  
60 к.

В книге излагаются сущность некоторых статистических методов планирования эксперимента и математическая обработка результатов опытов. Показано практическое применение этих методов при исследовании технологических процессов в машиностроении. Книга предназначена для инженеров-технологов машиностроительного производства.

С 31207-269 — 269-81. 2704040000  
038(01)-81

ББК 34.5  
6П4

ИБ № 589

Александр Александрович Спиридонов

### ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Редактор А. А. Степанова  
Технический редактор Н. М. Михайлова  
Переплет художника В. Б. Исаевой

Художественный редактор И. К. Каприлова  
Корректор Л. Я. Шабашова

Сдано в набор 25.09.80.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>  
Печать высокая  
Тираж 5670 экз.

Подписано в печать 12.12.80.  
Бумага типографская № 2  
Усл. печ. л. 11,5.  
Заказ 1100

Т-18782.  
Гарнитура литературная  
Уч.-изд. л. 12,45.  
Цена 60 к.

Издательство «Машиностроение», 107073, Москва, Стромьинский пер., д. 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Хохловский пер., 7.

© Издательство «Машиностроение», 1981 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Большинство исследований проводят для установления с помощью эксперимента функциональных или статистических связей между несколькими величинами или для решения экстремальных задач. Классический метод постановки эксперимента предусматривает фиксирование на принятых уровнях всех переменных факторов, кроме одного, значения которого определенным образом изменяют в области его существования. Этот метод составляет основу однофакторного эксперимента. При однофакторном эксперименте, варьируя один фактор и стабилизируя все прочие на выбранных уровнях, находят зависимость исследуемой величины только от одного фактора. Производя большое число однофакторных экспериментов при изучении многофакторной системы, получают частотные зависимости, представленные многими графиками, имеющими иллюстративный характер. Найденные таким образом частные зависимости невозможно объединить в одну общую.

Использование однофакторного эксперимента для всестороннего исследования многофакторного процесса требует постановки очень большого числа опытов. Для их выполнения в ряде случаев необходимо значительное время, в течение которого влияние неконтролируемых факторов на результаты опытов может существенно измениться. По этой причине данные большого числа опытов оказываются несопоставимыми. Отсюда следует, что результаты однофакторных экспериментов, полученные при исследовании многофакторных систем, часто мало пригодны для практического использования. Кроме того, при решении экстремальных задач данные значительного числа опытов оказываются ненужными, так как получены они для области, далекой от оптимума. Для изучения многофакторных систем наиболее целесообразным является применение статистических методов планирования эксперимента. Под планированием эксперимента понимают процесс определения числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. Планирование эксперимента — это новый раздел математической статистики.

В нем всесторонне рассматриваются статистические методы планирования эксперимента. Эти методы позволяют во многих случаях при минимальном числе опытов получать модели многофакторных процессов.

Эффективность использования статистических методов планирования эксперимента при исследовании технологических процессов объясняется тем, что многие важные характеристики этих процессов являются случайными величинами, распределения которых близко следуют нормальному закону.

Характерными особенностями процесса планирования эксперимента являются стремление минимизировать число опытов; одновременное варьирование всех исследуемых факторов по специальным правилам — алгоритмам; применение математического аппарата, формализующего многие действия исследователя; выбор стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии опытов.

## Глава I

# ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ПЛАНЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Чаще всего эксперимент ставят для решения одной из двух основных задач. Первую задачу называют экстремальной. Она заключается в отыскании условий процесса, обеспечивающих получение оптимального значения выбранного параметра. Признаком экстремальных задач является требование поиска экстремума некоторой функции. Эксперименты, которые ставят для решения задач оптимизации, называют экстремальными. Вторую задачу называют интерполяционной. Она состоит в построении интерполяционной формулы для предсказаний значений изучаемого параметра, зависящего от ряда факторов. Для решения экстремальной или интерполяционной задачи необходимо иметь математическую модель исследуемого объекта. Модель объекта получают, используя результаты опытов. При исследовании многофакторного процесса постановка всех возможных опытов для получения математической модели связана с огромной трудоемкостью эксперимента, так как число всех возможных опытов очень велико. Задача планирования эксперимента состоит в установлении минимально необходимого числа опытов и условий их проведения, в выборе методов математической обработки результатов опытов и в принятии решений. Планирование эксперимента значительно сокращает число опытов, необходимых для получения модели процесса. Частным случаем планирования эксперимента является планирование экстремального эксперимента, т. е. процесс выбора числа и условий проведения опытов, минимально необходимых для нахождения экстремальных экспериментов с помощью метода Бокса — Уилсона, называемого методом крутого восхождения.

Метод Бокса—Уилсона предусматривает проведение опытов небольшими сериями. В каждой серии одновременно варьируют все факторы по определенным правилам. Опыты проводят так, чтобы после математической обработки результатов предыдущей серии можно было спланировать следующую серию опытов.

При планировании экстремального эксперимента цель исследования должна быть четко сформулирована и должна иметь количественную оценку. Характеристику цели, заданную количественно, называют параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией, или откликом, на воздействие факторов, определяющих поведение процесса. Результаты эксперимента используют для получения математической модели исследуемого процесса. Математическая модель — система математических соотношений, описы-



вающих изучаемый процесс или явление. При планировании эксперимента под математической моделью часто понимают уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Такое уравнение называют также функцией отклика.

При постановке экстремальных экспериментов на первом этапе находят область оптимума. На втором этапе стремятся получить более полное представление о поверхности отклика в области оптимума. Решение экстремальной задачи предусматривает получение функции отклика и нахождение с помощью ее оптимальных условий протекания процесса. В общем виде функция отклика, являющаяся и параметром оптимизации  $\eta$ , может быть представлена выражением

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — независимые переменные факторы.

Если функция отклика известна, то оптимальные условия процесса находят аналитически, без постановки эксперимента. Однако часто приходится решать экстремальные задачи при неполном знании механизма процесса. В этом случае выражение функции отклика неизвестно, и поэтому вынуждены ограничиваться представлением ее, например, полиномом вида

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \dots \quad (2)$$

где  $\beta_0, \beta_1, \dots$  — коэффициенты регрессии при соответствующих переменных.

По результатам эксперимента можно определить только выборочные коэффициенты регрессии  $b_0, b_1, b_2, b_{12}, \dots$ , которые являются лишь оценками теоретических коэффициентов регрессии  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{12}, \dots$ . Уравнение регрессии, полученное на основании опытов, и представляющее собой выборочную оценку  $y$  функции отклика  $\eta$ , может быть записано следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + \dots \quad (3)$$

На первом этапе планирования эксперимента для определения направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика функцию отклика выражают полиномом первой степени:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_k x_k. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов уравнения (4) достаточно реализовать факторный эксперимент типа  $2^k$ , где  $k$  — число факторов. Планы экспериментов типа  $2^k$  называют планами первого порядка.

Крутое восхождение заканчивают после достижения области оптимума. Область оптимума чаще всего удается описать полиномом второй степени:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{(k-1)k} x_{(k-1)} x_k + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{kk} x_k^2. \quad (5)$$

Чтобы определить все коэффициенты уравнения (5), необходимо реализовать план эксперимента, в котором каждый фактор варьи-

руется не менее чем на трех уровнях. Планы эксперимента, позволяющие оценить коэффициенты полинома второй степени, называют планами второго порядка.

**Объект исследования.** Для определения параметра оптимизации и выбора схемы планирования эксперимента предварительно изучают объект исследования на основе априорной информации, которую получают, изучая литературные данные и анализируя результаты ранее проведенных работ. При планировании эксперимента к объекту исследования предъявляют следующие требования.

1. Объект исследования должен удовлетворять требованию воспроизводимости. При многократном повторении опыта его результат имеет разброс значений, который характеризует воспроизводимость результата. Объект исследования удовлетворяет требованию воспроизводимости, если многократно повторенные опыты дают результаты с разбросом значений, не превышающим некоторой заданной величины.

2. Объект должен быть управляемым, но практически нет абсолютно управляемых объектов. На реальный объект действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Последние влияют на воспроизводимость результатов эксперимента и могут служить причиной ее нарушения. Если требование воспроизводимости удовлетворяется, выявляют возможность проведения активного эксперимента, предусматривающего активное вмешательство в исследуемый процесс и выбор для каждого опыта управляемых факторов на тех уровнях, которые представляют интерес для исследования.

Объект, на котором возможен активный эксперимент, называют управляемым.

**Параметр оптимизации.** При планировании эксперимента важно правильно выбрать параметр оптимизации. Движение к оптимуму возможно, если выбран один параметр оптимизации, а другие выступают в качестве ограничений. Возможно также построение обобщенного параметра как функции от множества исходных параметров. Параметр оптимизации должен быть количественным, доступным для измерения и должен выражаться одним числом. Если измерение параметра невозможно, то пользуются ранговой оценкой. Ранг — это оценка параметра оптимизации по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной, десятибалльной и т. п. Ранговый параметр имеет ограниченную дискретную область определения. В простейшем случае область содержит два значения: да—нет; хорошо—плохо; брак—годные детали и т. д. При прочих равных условиях предпочтение необходимо отдавать количественному измерению, так как ранговая оценка носит субъективный характер.

Параметр оптимизации должен быть однозначным в статистическом смысле, т. е. заданному сочетанию уровней факторов должно соответствовать одно (с точностью до ошибки эксперимента) значение параметра оптимизации; эффективным в статистическом смысле, т. е. определяться с наибольшей точностью, что позволяет

сократить до минимума число параллельных опытов; существовать для всех состояний исследуемого объекта; иметь физический смысл.

Параметры оптимизации могут быть экономическими, технико-экономическими, технико-технологическими и другими. Экономическими являются прибыль, себестоимость, рентабельность. К технико-экономическим относят производительность, надежность, долговечность. Технико-технологическими параметрами являются механические, физические, физико-химические и некоторые другие характеристики изделия. Большинство параметров оптимизации прямо или косвенно связано с экономичностью производства или экономичностью эксплуатации изделия.

**Факторы.** Фактором называют независимую переменную величину, влияющую на параметр оптимизации. Каждый фактор имеет область определения — совокупность всех значений, которые может принимать фактор.

При исследовании процесса необходимо учитывать все существенные факторы. Если по каким-либо причинам влияние некоторых факторов невозможно учесть в эксперименте, то эти факторы должны быть стабилизированы на определенных уровнях в течение всего эксперимента. Уровнями называют значения факторов в эксперименте. Если число факторов велико, то необходимо отсеять те факторы, которые оказывают незначительное влияние на параметр оптимизации. Отсевание несущественных факторов производят на основе априорного ранжирования или с помощью постановки отсеивающих экспериментов [17].

Факторы должны быть: 1) управляемыми, т. е. позволяющими экспериментатору устанавливать их требуемые значения и поддерживать постоянными эти значения в течение опыта; 2) непосредственно воздействующими на объект исследования, так как трудно управлять фактором, который является функцией других факторов; 3) совместимыми, т. е. все комбинации уровней факторов должны быть осуществимы и безопасны; 4) независимыми, т. е. позволяющими экспериментатору устанавливать требуемые уровни любого фактора независимо от уровней других факторов.

**Модель.** Под математической моделью понимаем вид функции отклика  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Выбор модели зависит от задачи исследования и от предъявляемых требований к модели. Экстремальные задачи часто решают, используя шаговый метод. В этом случае модель должна удовлетворять требованиям этого метода. В основе шагового метода лежит предположение, что совокупность значений параметра оптимизации  $y$ , полученная при различных сочетаниях значений факторов  $x_i$ , образует поверхность отклика. Для наглядности представления о поверхности отклика при наличии  $y_{max}$  рассмотрим простейший случай, при котором число факторов равно двум ( $x_1$  и  $x_2$ ). Для каждого фактора установлены два значения: максимальное и минимальное. Между этими значениями каждый фактор может изменяться непрерывно или дискретно. Границы значений факторов образуют на плоскости  $x_1 O x_2$  (рис. 1) прямоугольник  $ABCD$ , внутри которого лежат точки возможных значе-

ний  $x_1$  и  $x_2$ . Если по оси  $y$  откладывать значения  $y_i$ , полученные при различных сочетаниях значений факторов, то точки  $y_i$  будут лежать на поверхности отклика. На этой поверхности будет находиться точка  $M$ , соответствующая оптимальному значению  $y$ . Для нахождения этой точки необходимо шаг за шагом двигаться по поверхности отклика. Шаговый метод исходит из предположения, что поверхность отклика является гладкой и имеет единственный оптимум. Поверхность отклика расположена в  $k+1$ -мерном пространстве, которое называют факторным.

Размерность факторного пространства зависит от числа  $k$  факторов. При большом числе факторов это пространство является многомерным, и геометрическая интерпретация функции отклика становится невозможной. Для описания в многомерном пространстве поверхности отклика пользуются языком алгебры. Гладкость поверхности отклика и наличие на ней одной точки оптимума позволяют двигаться к последней в любом направлении, независимо от исходной точки. При шаговом методе каждому фактору придают два значения: максимальное и минимальное. Эти значения составляют только часть возможных значений факторов. На первом этапе реализации шагового метода выбирается лишь какая-то подобласть из области возможных значений факторов, и в этой подобласти ставится эксперимент.

На основании результатов этого эксперимента строится первая модель, по которой предсказываются отклики для значений факторов, выходящих за пределы выбранной подобласти. Чем дальше от этой подобласти лежит точка, определяющая значения факторов, тем с меньшей точностью путем экстраполяции можно предсказать значение отклика для этой точки. Поэтому экстраполяцию производят вблизи подобласти эксперимента и используют ее для выбора условий проведения следующего эксперимента, т. е. устанавливают новые интервалы значений факторов или выбирают новую подобласть факторного пространства. Поставив новый эксперимент, строят вторую модель и на основании ее делают следующий шаг в направлении к оптимуму. В этом и заключается сущность шагового метода.

Исходя из сущности этого метода к модели предъявляется главное требование, заключающееся в способности модели «предсказывать» направление дальнейших опытов с требуемой точностью. Это означает, что предсказанные по модели значения отклика должны отличаться от фактических не более чем на некоторую наперед заданную величину. Модель, удовлетворяющую этому требованию, называют адекватной. Если имеется несколько удовлетворяющих

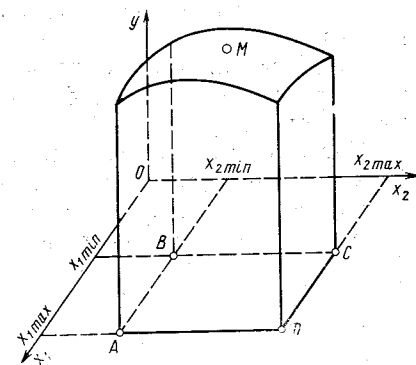


Рис. 1. Поверхность отклика

указанному требованию моделей, то из них выбирается наиболее простая.

Наиболее простой моделью является полином. Полином линейен относительно неизвестных коэффициентов, что упрощает обработку наблюдений.

Полином может быть первой, второй и более высокой степени. Коэффициенты полинома вычисляют по результатам опытов. Чем больше число коэффициентов в полиноме, тем большее количество опытов необходимо поставить для их определения. Число коэффициентов зависит от степени полинома: чем выше степень, тем больше число коэффициентов. На первом этапе планирования — определении направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика — наиболее целесообразно неизвестную функцию отклика аппроксимировать полиномом первой степени. Аппроксимация — это замена одной функции другой функцией, в каком-то смысле эквивалентной первой. Полином первой степени имеет минимальное число коэффициентов при данном числе факторов и содержит необходимую информацию о направлении градиента, под которым понимают направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. После достижения путем постепенного перемещения по поверхности отклика подобласти, в которой лежит точка оптимума, иногда для более полного описания этой подобласти переходят от полинома первой степени к полиному второй степени. Полином первой степени в общем виде выражается уравнением

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \dots + b_{12\dots k}x_1x_2\dots x_k. \quad (6)$$

Для трех факторов это уравнение имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Полином второй степени для трех факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

## 2. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

К оптимизации приступают при наличии некоторых результатов предварительных исследований изучаемого объекта. Решение задачи оптимизации начинают с выбора области эксперимента. Выбор этой области производят на основе анализа априорной информации. В области эксперимента устанавливают основные уровни и интервалы варьирования факторов. Основным или нулевым уровнем фактора называют его значение, принятое за исходное в плане эксперимента. Основные уровни выбирают таким образом, чтобы их сочетание отвечало значению параметра оптимизации, по возможности более близкому к оптимальному. Каждое сочетание уровней факторов является многомерной точкой в факторном про-

странстве. Сочетание основных уровней принимают за исходную точку для построения плана эксперимента. Построение плана эксперимента состоит в выборе экспериментальных точек, симметричных относительно исходной точки или, что одно и то же, центра плана.

Интервалом варьирования фактора называют число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень фактора, а вычитание — нижний. Интервал варьирования не может быть выбран меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, а также не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни выходили за пределы области определения фактора. При этом необходимо учитывать, что увеличение интервалов варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний — 1, а основной 0. Кодированное значение фактора  $x_i$  определяют по выражению

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^0}{\varepsilon_i}, \quad (7)$$

где  $\tilde{x}_i$  — натуральное значение  $i$ -го фактора;  $\tilde{x}_i^0$  — натуральное значение основного уровня  $i$ -го фактора;  $\varepsilon_i$  — интервал варьирования  $i$ -го фактора.

При кодировании качественных факторов, имеющих два уровня, верхний уровень обозначается +1, а нижний — 1. Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора  $m$ , а число факторов  $k$ , то число  $N$  всех сочетаний уровней факторов, а следовательно, и число опытов в полном факторном эксперименте, определяется выражением

$$N = m^k. \quad (8)$$

Цель первого этапа планирования экстремального эксперимента — получение линейной модели. Он предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Возможное количество сочетаний уровней факторов в этом случае равно  $2^k$ .

Факторный эксперимент осуществляют с помощью матрицы планирования, в которой используют кодированные значения факторов. Так, например, для двух факторов полный факторный эксперимент типа  $2^k$  можно представить матрицей, приведенной в табл. 1. Число строк в матрице равно количеству опытов. Знаками +1 и —1 обозначают уровни факторов  $x_1$  и  $x_2$  в опытах. Значения функции отклика, полученные при выполнении опытов, обозначены через  $y_1, y_2, y_3$  и  $y_4$ .

Для упрощения записи условий эксперимента в матрице планирования вместо +1 пишут только +, а вместо —1 — только —.

Для движения по градиенту необходима линейная модель. При  $k=2$  моделью будет уравнение регрессии вида  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ .

Значения коэффициентов в этом уравнении определяют с помощью значений функции отклика, полученных в результате опытов.

Таблица 1

Таблица 2

Матрица факторного эксперимента типа  $2^2$

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$y$
1	-	-	$y_1$
2	+	-	$y_2$
3	-	+	$y_3$
4	+	+	$y_4$

Матрица планирования

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$y$
1	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	$y_4$

Под числом степеней свободы в статистике понимают разность между числом опытов и количеством коэффициентов модели, вычисленных по результатам этих опытов независимо друг от друга. Число степеней свободы  $f$  при линейной модели определяется по выражению

$$f = N - (k + 1), \quad (9)$$

где  $N$  — число опытов;  $k$  — число факторов.

Так, например, при двух факторах число  $N$  опытов равно четырем, а для определения коэффициентов уравнения регрессии  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  достаточно результатов трех опытов. Таким образом, число степеней свободы в рассматриваемом случае, равное единице, может быть использовано для проверки адекватности модели.

Величина и знак коэффициента указывают на вклад данного фактора в общий результат при переходе с нулевого на верхний или нижний уровень фактора.

Линейным называют эффект, характеризующий линейную зависимость параметра оптимизации от соответствующего фактора. Эффектом взаимодействия называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на параметр оптимизации. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценить линейные эффекты и все эффекты взаимодействия. Для полного факторного эксперимента типа  $2^2$  уравнение регрессии с учетом эффектов взаимодействия можно представить выражением

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2. \quad (10)$$

Для этого эксперимента матрица планирования приведена в табл. 2. В этой матрице содержится столбец фиктивной переменной  $x_0$ . Он вводится для оценки свободного члена  $b_0$ . Столбец  $x_1x_2$  получен перемножением столбцов  $x_1$  и  $x_2$ . Он введен для расчета коэффициента  $b_{12}$ . При  $k=2$  построение матриц полного факторного эксперимента не вызывает затруднений, так как все возможные сочетания уровней факторов легко найти простым перебором. При увеличении числа факторов количество возможных сочетаний уров-

ней быстро возрастает, поэтому возникает необходимость в некоторых приемах построения матриц. Рассмотрим два наиболее простых приема. Первый прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце ( $x_1$ ) знаки чередуются поочередно, во втором они чередуются через 2, в третьем — через 4, в четвертом — через 8, в пятом — через 16 и т. д. по степеням двойки.

Второй прием основан на последовательном достраивании матрицы. Для этого при добавлении нового фактора необходимо повторить комбинации уровней исходного плана сначала при значениях нового фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем. Последовательное достраивание матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 5 показано в табл. 3.

Таблица 3

Схема построения матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 5

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	+	+	+
3	+	+	-	+	+	+
4	+	-	-	+	+	+
5	+	+	+	-	+	+
6	+	-	+	-	+	+
7	+	+	-	-	+	+
8	+	-	-	-	+	+
9	+	+	+	+	-	+
10	+	-	+	+	-	+
11	+	+	-	+	-	+
12	+	-	-	+	-	+
13	+	+	+	-	-	+
14	+	-	+	-	-	+
15	+	+	-	-	-	+
16	+	-	-	-	-	+
17	+	+	+	+	+	-
18	+	-	+	+	+	-
19	+	+	-	+	+	-
20	+	-	-	+	+	-
21	+	+	+	-	+	-
22	+	-	+	-	+	-
23	+	+	-	-	+	-
24	+	-	-	-	+	-
25	+	+	+	+	-	-
26	+	-	+	+	-	-
27	+	+	-	+	-	-
28	+	-	-	+	-	-
29	+	+	+	-	-	-
30	+	-	+	-	-	-
31	+	+	-	-	-	-
32	+	-	-	-	-	-

### 3. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

При большом числе факторов ( $k > 3$ ) проведение полного факторного эксперимента связано с большим числом опытов, значительно превосходящим число коэффициентов линейной модели. Если при получении модели можно ограничиться линейным приближением, т. е. получить адекватную модель в виде полинома  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k$ , то число опытов можно резко сократить в результате использования дробного факторного эксперимента. Так, например, в полном факторном эксперименте типа  $2^2$  при линейном приближении коэффициент регрессии  $b_{12}$  можно принять равным нулю, а столбец  $x_1x_2$  матрицы (табл. 4) использовать для третьего фактора  $x_3$ .

Таблица 4

Матрица планирования

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 (x_1x_2)$	$y$
1	+	+	+	+	$y_1$
2	+	+	+	-	$y_2$
3	+	-	-	-	$y_3$
4	+	-	-	+	$y_4$

В этом случае линейная модель будет выражаться уравнением  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ . Для определения коэффициентов этого уравнения достаточно провести четыре опыта вместо восьми в полном факторном эксперименте типа  $2^3$ . План эксперимента, предусматривающий реализацию половины опытов полного факторного эксперимента, называют полуреplikой. При увеличении числа факторов ( $k > 3$ ) возможно применение реплик большей дробности. Дробной репликой называют план эксперимента, являющийся частью плана полного факторного эксперимента. Дробные реплики обозначают выражением  $2^{k-p}$ , где  $p$  — число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия. При  $p=1$  получают полуреplikу; при  $p=2$  получают  $1/4$ -реплику; при  $p=3$  получают  $1/8$ -реплику и т. д. по степеням двойки. Так, например, если в полном факторном эксперименте  $2^3$  (табл. 5) один из эффектов взаимодействия ( $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$ ) заменим четвертым фактором  $x_4$ , то получим полуреplikу  $2^{4-1}$  от полного факторного эксперимента  $2^4$ . Если два эффекта взаимодействия заменить факторами  $x_4$  и  $x_5$ ,

Таблица 5

Матрица полного факторного эксперимента типа  $2^3$

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$y$
1	+	-	-	+	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	+	-	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	+	-	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_4$
5	+	-	-	-	+	+	+	-	$y_5$
6	+	+	-	-	-	-	+	+	$y_6$
7	+	-	+	-	-	+	-	+	$y_7$
8	+	+	+	-	+	-	-	-	$y_8$

то получим  $1/4$ -реплику  $2^{5-2}$  от полного факторного эксперимента  $2^5$ . Можно получить  $1/8$ -реплику от полного факторного эксперимента  $2^6$ , заменив три эффекта взаимодействия факторами  $x_4, x_5$  и  $x_6$ . Если заменить четыре эффекта взаимодействия факторами  $x_4, x_5, x_6$  и  $x_7$ , то получим  $1/16$ -реплику  $2^{7-4}$  от полного факторного эксперимента  $2^7$ .

Реплики, которые используют для сокращения числа опытов в  $2^m$  раз, где  $m = 1, 2, 3, \dots$ , называют регулярными.

В связи с тем, что в дробных репликах часть взаимодействий заменена новыми факторами, найденные коэффициенты уравнения регрессии будут являться совместными оценками линейных эффектов и эффектов взаимодействия. Так, например, если в матрице (см. табл. 4) вычислим элементы столбцов для произведений  $x_1x_3$  и  $x_2x_3$ , то увидим, что элементы столбца  $x_1x_3$  совпадают с элементами столбца  $x_2$ , а элементы столбца  $x_2x_3$  — с элементами столбца  $x_1$ . Следовательно, коэффициенты  $b_1, b_2, b_3$  будут оценками совместных эффектов, а именно

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Коэффициент  $b_1$  является оценкой влияния фактора  $x_1$  и парного взаимодействия  $x_2x_3$  на функцию отклика. Влияние фактора  $x_1$  в этом случае характеризуется величиной  $\beta_1$ , а влияние взаимодействия — величиной  $\beta_{23}$ . Оценки, в которых невозможно разделить линейный эффект и эффект взаимодействия, называют смешанными. Линейные эффекты рекомендуется смешивать прежде всего с теми взаимодействиями, которые согласно априорной информации незначимы.

Число несмешанных линейных эффектов в дробной реплике называют ее разрешающей способностью.

Часто приходится решать задачи, в которых заранее можно полагать, что эффекты взаимодействия, хотя и малы по сравнению с линейными, но все же не равны нулю. В таких случаях необходимо заранее определить, какие коэффициенты являются смешанными оценками. Тогда в зависимости от условий поставленной задачи, подбирается такая дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию из эксперимента.

Прямая оценка разрешающей способности дробной реплики затруднена. Поэтому дробные реплики задают с помощью генерирующих соотношений. Генерирующим называют соотношение, которое показывает, какое из взаимодействий принято незначимым и заменено новым фактором.

План типа  $2^{3-1}$  может быть представлен двумя полурепликами (табл. 6), которые задаются одним из следующих генерирующих соотношений:

$$x_3 = x_1x_2; \quad x_3 = -x_1x_2. \quad (11)$$

Генерирующие соотношения умножим на новую независимую переменную  $x_3$ :

$$x_3^2 = x_1x_2x_3; \quad x_3^2 = -x_1x_2x_3. \quad (12)$$

Таблица 6

Две полуреплики  $2^{3-1}$ 

Номер опыта	$x_3 = x_1 x_2$			Номер опыта	$x_3 = -x_1 x_2$		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-	+	-	1	-	+	+
2	+	+	+	2	+	+	-
3	-	-	+	3	-	-	-
4	+	-	-	4	+	-	+

(13). Зная определяющий контраст, можно найти соотношения, задающие совместные оценки. Для этого необходимо помножить независимые переменные  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  на определяющий контраст. Умножая определяющие контрасты (13) на  $x_1$ , получим соотношения

$$x_1 \cdot 1 = x_1^2 x_2 x_3; \quad x_1 \cdot 1 = -x_1^2 x_2 x_3;$$

так как  $x_1^2 = 1$ , то

$$x_1 = x_2 x_3; \quad x_1 = -x_2 x_3.$$

Умножая определяющие контрасты на  $x_2$  и  $x_3$ , получаем следующие соотношения:

$$x_2 = x_1 x_3; \quad x_2 = -x_1 x_3;$$

$$x_3 = x_1 x_2; \quad x_3 = -x_1 x_2.$$

Это означает, что коэффициенты регрессии будут оценками

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23};$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}.$$

Полуреплика  $2^{4-1}$  может быть задана генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ . Матрица планирования этой полуреплики представлена табл. 7.

Определяющим контрастом полуреплики является соотношение

$$1 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Совместные оценки будут определяться следующим образом:

$$x_1 = x_2 x_3 x_4 \quad b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234};$$

$$x_2 = x_1 x_3 x_4 \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134};$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_4 \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124};$$

$$x_4 = x_1 x_2 x_3 \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123};$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_4 \quad b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34};$$

$$x_1 x_3 = x_3 x_4 \quad b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24};$$

$$x_1 x_4 = x_2 x_3 \quad b_{14} \rightarrow \beta_{14} + \beta_{23}.$$

Поскольку всегда  $x_i^2 = 1$ , получим следующие выражения:

$$1 = x_1 x_2 x_3; \quad 1 = -x_1 x_2 x_3. \quad (13)$$

В результате умножения генерирующего соотношения на новую переменную получают так называемый определяющий контраст. Для указанных выше полуреплик определяющими контрастами будут выражения

Таблица 7

Полуреплика  $2^{4-1}$  с определяющим контрастом  $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$ 

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
1	+	-	-	+	+	$y_1$
2	+	+	-	+	-	$y_2$
3	+	-	+	-	-	$y_3$
4	+	+	+	+	+	$y_4$
5	+	-	-	-	-	$y_5$
6	+	+	-	-	+	$y_6$
7	+	-	+	-	+	$y_7$
8	+	+	+	-	-	$y_8$

Таблица 8

Полуреплика  $2^{4-1}$  с определяющим контрастом  $1 = x_1 x_2 x_4$ 

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
1	+	-	-	+	+	$y_1$
2	+	+	-	+	-	$y_2$
3	+	-	+	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	+	$y_4$
5	+	-	-	-	+	$y_5$
6	+	+	-	-	-	$y_6$
7	+	-	+	-	-	$y_7$
8	+	+	+	-	+	$y_8$

Полуреплика  $2^{4-1}$  может быть также задана генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2$ . Матрица планирования этой полуреплики представлена табл. 8.

Определяющим контрастом полуреплики является соотношение

$$1 = x_1 x_2 x_4.$$

Совместные оценки в этом случае будут определяться следующим образом:

$$x_1 = x_2 x_4 \quad b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24};$$

$$x_2 = x_1 x_4 \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{14};$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234};$$

$$x_4 = x_1 x_2 \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12};$$

$$x_1 x_3 = x_2 x_3 x_4 \quad b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{234};$$

$$x_2 x_3 = x_1 x_3 x_4 \quad b_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{134};$$

$$x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 \quad b_{34} \rightarrow \beta_{34} + \beta_{123}.$$

В практических задачах тройные и более высокого порядка взаимодействия значительно чаще, чем двойные, бывают равны нулю, и ими обычно можно пренебречь. Полуреплика  $2^{4-1}$ , заданная генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ , позволяет получить отдельные оценки четырех линейных эффектов и три совместные оценки парных взаимодействий. В этом случае отдельными оценками будут  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_4$ , так как тройными взаимодействиями  $\beta_{234}$ ,  $\beta_{134}$ ,  $\beta_{124}$  и  $\beta_{123}$  вследствие их незначимости можно пренебречь. В полуреплике, заданной генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2$ , три линейных эффекта, а именно  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_4$ , — оказались смешанными с парными взаимодействиями. Разрешающая способность полуреплики, заданной генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ , получилась значительно выше, чем у полуреплики, заданной генерирующим соотношением  $x_4 = x_1 x_2$ . Следовательно, разрешающая способность полуреплики зависит от генерирующего соотношения, которым она задана.



Для оценки разрешающей способности реплик большой дробности ( $1/4$ ,  $1/8$  и т. д.) используют обобщающие определяющие контрасты.  $1/4$ -реплика  $2^{5-2}$  может быть задана следующими генерирующими соотношениями:  $x_4 = x_1x_2x_3$ ,  $x_5 = x_2x_3$ . Матрица планирования этой реплики представлена табл. 9.

Таблица 9

Матрица планирования  $2^{5-2}$ 

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$
1	+	+	+	-	-	-	$y_1$
2	+	+	-	-	+	-	$y_2$
3	+	+	-	-	+	+	$y_3$
4	+	-	-	-	-	+	$y_4$
5	+	+	+	+	+	+	$y_5$
6	+	-	+	+	-	+	$y_6$
7	+	+	-	+	-	-	$y_7$
8	+	-	-	+	+	-	$y_8$

Таблица 10

Матрица планирования  $2^{7-4}$ 

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$y$
1	+	+	-	+	-	-	+	-	$y_1$
2	+	-	-	+	+	+	-	-	$y_2$
3	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_3$
4	+	-	+	+	-	-	+	+	$y_4$
5	+	+	-	-	+	-	-	+	$y_5$
6	+	-	-	-	-	+	+	+	$y_6$
7	+	+	+	-	-	+	-	-	$y_7$
8	+	-	+	-	+	-	+	-	$y_8$

Определяющими контрастами реплики являются соотношения

$$1 = x_1x_2x_3x_4; \quad 1 = x_2x_3x_5.$$

Перемножив определяющие контрасты, получим третье соотношение

$$1 = x_1x_4x_5.$$

Полная характеристика разрешающей способности рассматриваемой реплики будет определяться обобщающим определяющим контрастом, имеющим вид

$$1 = x_1x_2x_3x_4 = x_2x_3x_5 = x_1x_4x_5.$$

Схему смешивания оценок находим последовательным умножением обобщающего определяющего контраста на  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и т. д.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_4x_5 & b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{234} + \beta_{1235} + \beta_{45}; \\ x_2 &= x_1x_3x_4 = x_3x_5 = x_1x_2x_4x_5 & b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{134} + \beta_{35} + \beta_{1245}; \\ x_3 &= x_1x_2x_4 = x_2x_5 = x_1x_3x_4x_5 & b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{124} + \beta_{25} + \beta_{1345}; \\ x_4 &= x_1x_2x_3 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_5 & b_4 &\rightarrow \beta_4 + \beta_{123} + \beta_{2345} + \beta_{15}; \\ x_5 &= x_1x_2x_3x_4x_5 = x_2x_3 = x_1x_4 & b_5 &\rightarrow \beta_5 + \beta_{12345} + \beta_{23} + \beta_{14}; \\ x_1x_2 &= x_3x_4 = x_1x_3x_5 = x_2x_4x_5 & b_{12} &\rightarrow \beta_{12} + \beta_{34} + \beta_{135} + \beta_{245}; \\ x_1x_3 &= x_2x_4 = x_1x_2x_5 = x_3x_4x_5 & b_{13} &\rightarrow \beta_{13} + \beta_{24} + \beta_{125} + \beta_{345}. \end{aligned}$$

Для  $1/16$ -реплики с генерирующими соотношениями

$$x_4 = x_1x_2x_3; \quad x_5 = x_1x_2; \quad x_6 = x_1x_3; \quad x_7 = x_2x_3$$

матрица планирования представлена табл. 10. Определяющими контрастами этой реплики будут соотношения

$$1) \quad 1 = x_1x_2x_3x_4; \quad 2) \quad 1 = x_1x_2x_5; \quad 3) \quad 1 = x_1x_3x_6; \quad 4) \quad 1 = x_2x_3x_7.$$

Если попарно перемножить определяющие контрасты  $1 \times 2$ ;  $1 \times 3$ ;  $1 \times 4$ ;  $2 \times 3$ ;  $2 \times 4$ ;  $3 \times 4$ , то получим

$$\begin{aligned} 1 &= x_3x_4x_5; \quad 1 = x_2x_4x_6; \quad 1 = x_1x_4x_7; \quad 1 = x_2x_3x_5x_6; \\ &1 = x_1x_3x_5x_7; \quad 1 = x_1x_2x_6x_7. \end{aligned}$$

Произведения определяющих контрастов по три:  $1 \times 2 \times 3$ ;  $1 \times 2 \times 4$ ;  $2 \times 3 \times 4$ ;  $1 \times 3 \times 4$  — будут равны

$$\begin{aligned} 1 &= x_1x_4x_5x_6; \quad 1 = x_2x_4x_5x_7; \\ 1 &= x_5x_6x_7; \quad 1 = x_3x_4x_6x_7. \end{aligned}$$

Умножая определяющие контрасты по четыре, получим

$$1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7.$$

Чтобы полностью характеризовать разрешающую способность данной реплики, запишем обобщающий определяющий контраст

$$\begin{aligned} 1 &= x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2x_5 = x_1x_3x_6 = x_2x_3x_7 = x_3x_4x_5 = x_2x_4x_6 = \\ &= x_1x_4x_7 = x_2x_3x_5x_6 = x_1x_3x_5x_7 = x_1x_2x_6x_7 = x_1x_4x_5x_6 = x_2x_4x_5x_7 = \\ &= x_5x_6x_7 = x_3x_4x_6x_7 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7. \end{aligned}$$

Если эффектами взаимодействия, начиная с тройных, можно пренебречь, то коэффициенты будут оценками:

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{25} + \beta_{36} + \beta_{47}; & b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{15} + \beta_{37} + \beta_{46}; & b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{16} + \beta_{27} + \beta_{45}; \\ b_4 &\rightarrow \beta_4 + \beta_{35} + \beta_{26} + \beta_{17}; & b_5 &\rightarrow \beta_5 + \beta_{12} + \beta_{34} + \beta_{67}; & b_6 &\rightarrow \beta_6 + \beta_{13} + \beta_{24} + \beta_{57}; \\ & & b_7 &\rightarrow \beta_7 + \beta_{23} + \beta_{14} + \beta_{56}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили весьма сложную систему смешивания оценок. Все линейные эффекты оказались смешанными с несколькими парными взаимодействиями, поэтому разрешающая способность этой дробной реплики очень низкая. Пользоваться такой репликой можно лишь в том случае, если все парные взаимодействия близки к нулю.

Выбор дробной реплики зависит от конкретной задачи. Для получения линейной модели рекомендуют выбирать дробные реплики с возможно большей разрешающей способностью, т. е. реплики, у которых линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия, близкими к нулю. При выборе дробной реплики важно учитывать насыщенность плана, т. е. соотношение между числом опытов и числом коэффициентов, определяемых по результатам этих опытов. Дробная реплика, полученная заменой всех эффектов взаимодействия новыми факторами, называется насыщенной. Применение насыщенных планов требует минимального числа опытов. Число опытов в матрице насыщенной дробной реплики равно числу коэффициентов линейной модели. Гипотезу адекватности модели в этом случае проверить невозможно, так как число степеней свободы равно нулю.

Например,  $1/16$ -реплика от полного факторного эксперимента  $2^7$  (см. табл. 10) является насыщенной, так как линейная модель содержит восемь коэффициентов, которые необходимо определить по

результатам восьми опытов. При этом не остается степеней свободы для проверки адекватности модели.

Дробные реплики широко применяют при получении линейных моделей. Эффективность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия. При построении дробных реплик используют следующее правило: новый фактор, введенный в планирование, нужно поместить в столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.

#### 4 СВОЙСТВА МАТРИЦ ПОЛНОГО И ДРОБНОГО ФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для матриц таких экспериментов характерны следующие свойства.

1. Свойство симметричности относительно центра эксперимента — алгебраическая сумма элементов столбца каждого фактора равна нулю:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 0,$$

где  $j$  — номер опыта;  $i$  — номер фактора;  $N$  — число опытов в матрице.

2. Свойство нормировки — сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij}^2 = N.$$

3. Свойство ортогональности — сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов равно нулю:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij}x_{lj} = 0,$$

где  $i, l$  — номера факторов, причем  $i \neq l$ .

Ортогональность является одним из наиболее важных свойств матрицы. Ортогональность матрицы позволяет оценить все коэффициенты уравнения регрессии независимо друг от друга, т. е. величина любого коэффициента не зависит от того, какие величины имеют другие коэффициенты. Если тот или иной коэффициент регрессии окажется незначимым, то его можно отбросить, не пересчитывая остальных.

4. Свойство ротатабельности: точки в матрице планирования подбирают так, что математическая модель, полученная по результатам полного или дробного факторных экспериментов, способна предсказывать значения параметра оптимизации с одинаковой точностью в любых направлениях на равных расстояниях от центра эксперимента. Это очень важное свойство матрицы, так как, начиная эксперимент, исследователь не знает, в каком направлении предстоит двигаться в поисках оптимума.

#### 5. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ

После выбора плана эксперимента, основных уровней и интервалов варьирования факторов переходят к эксперименту. Каждая строка матрицы — это условия опыта. Для исключения систематических ошибок рекомендуется опыты, предусмотренные матрицей, проводить в случайной последовательности. Порядок проведения опытов следует выбирать по таблице случайных чисел (табл. 11). Например, если требуется провести восемь опытов, то из случайного места таблицы последовательно выписывают числа, лежащие в интервале от 1 до 8, при этом отбрасывают уже выписанные и числа больше восьми. Так, например, начиная с числа 87 (1-я строка табл. 11), получаем следующую последовательность реализации опытов:

Номер опыта в матрице	1	2	3	4	5	6	7	8
Порядок реализации опытов	7	2	8	3	1	4	5	6

Таблица 11

Фрагмент таблицы случайных чисел

87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36
07	76	85	37	84	37	47	32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22
03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69	44	61	88	23
13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48
00	83	48	94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82
24	07	78	61	89	42	58	88	22	16	13	24	40	09	00	65	46	38
61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80	78
27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	21	31	99	99	06
96	53	99	25	13	63												

Для компенсации влияния случайных погрешностей каждый опыт рекомендуется повторить  $n$  раз. Опыты, повторенные несколько раз при одних и тех же значениях факторов, называют параллельными. Под дублированием понимают постановку параллельных опытов. Обычно число  $n$  параллельных опытов принимают равным 2—3, иногда — 4—5. При проведении исследований приходится иметь дело с тремя вариантами дублирования: 1) эксперимент проведен при равномерном дублировании опытов; 2) эксперимент выполнен при неравномерном дублировании опытов; 3) эксперимент поставлен без дублирования опытов.

При равномерном дублировании все строки матрицы планирования имеют одинаковые числа параллельных опытов. В случае неравномерного дублирования числа параллельных опытов неодинаковы. При отсутствии дублирования параллельные опыты не проводятся. Наиболее предпочтительным из трех вариантов дублирования является первый. При этом варианте эксперимент отличается повышенной точностью, а математическая обработка экспериментальных данных — простотой. Характер дублирования опытов влияет на содержание математической обработки результатов наблю-

дений. Рассмотрим методику обработки результатов эксперимента для каждого из трех вариантов дублирования опытов.

**Обработка результатов эксперимента при равномерном дублировании опытов.** Для каждой строки матрицы планирования по результатам  $n$  параллельных опытов находят  $\bar{y}_j$  — среднее арифметическое значение параметра оптимизации:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n y_{ju}, \quad (14)$$

где  $u$  — номер параллельного опыта;  $y_{ju}$  — значение параметра оптимизации в  $u$ -м параллельном опыте  $j$ -й строки матрицы.

С целью оценки отклонений параметра оптимизации от его среднего значения для каждой строки матрицы планирования вычисляют дисперсию  $s_j^2$  опыта по данным  $n$  параллельных опытов. Статистической дисперсией называют среднее значение квадрата отклонений случайной величины от ее среднего значения:

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^n (y_{ju} - \bar{y}_j)^2. \quad (15)$$

Ошибка  $s_j$  опыта определяется как корень квадратный из дисперсии опыта:

$$s_j = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^n (y_{ju} - \bar{y}_j)^2}. \quad (16)$$

Ошибка опыта при большом рассеянии будет значительной. Рассеяние результатов эксперимента определяется влиянием неуправляемых факторов, погрешностями измерений и другими причинами. Большое рассеяние изучаемой величины может произойти из-за наличия в эксперименте опытов, давших сомнительные результаты. Для проверки сомнительных, т. е. резко выделяющихся результатов, используют специальные критерии; одним из таких критериев является отношение  $U$  (ГОСТ 11.002—73). Чтобы оценить принадлежность резко выделяющихся результатов  $y_{j \max}$  или  $y_{j \min}$  к данной нормальной совокупности и принять решение об исключении или оставлении их в составе выборки, находят отношение

$$U_{\max} = \frac{y_{j \max} - \bar{y}_j}{s_j} \quad \text{или} \quad U_{\min} = \frac{\bar{y}_j - y_{j \min}}{s_j},$$

где  $y_{j \max}$  — наибольшее значение параметра оптимизации среди его значений, полученных в  $n$  параллельных опытах  $j$ -й строки матрицы планирования;  $y_{j \min}$  — наименьшее значение параметра оптимизации среди его значений, полученных в  $n$  параллельных опытах  $j$ -й строки матрицы планирования.

Результат сравнивают с величиной  $\beta$ , взятой из табл. 1 ГОСТ 11.002—73 для числа  $n$  параллельных опытов и принятого уровня

значимости  $\alpha$ . Число  $n$  параллельных опытов и объем выборки  $n$  в рассматриваемом случае понятия равноценные. Если  $U_{\max} \geq \beta$ , то сомнительный результат может быть исключен, в противном случае его считают нормальным и не исключают.

Аналогично производится оценка результата  $y_{j \min}$ : если  $U_{\min} \geq \beta$ , то сомнительный результат признают аномальным; при  $U_{\min} < \beta$  подозреваемый в аномальности результат считают нормальным. Чтобы числа параллельных опытов были одинаковы во всех строках матрицы, необходимо повторить те опыты, результаты которых были признаны аномальными. В математической статистике для проверки гипотез пользуются критериями согласия. Для того чтобы принять или забраковать гипотезу при помощи этих критериев, устанавливают уровни значимости их. Уровень значимости представляет собой достаточно малое значение вероятности, отвечающее событиям, которые в данной обстановке исследования можно считать практически невозможными.

Обычно принимают 5%, 2% или 1%-ный уровень значимости. В технике чаще всего принимают 5%-ный уровень. Уровень значимости  $\alpha$  называют также уровнем риска или доверительным уровнем вероятности, который соответственно может быть принят равным 0,05, 0,02 или 0,01. Так, например, при уровне значимости (риска)  $\alpha = 0,05$  вероятность  $P$  верного ответа при проверке нашей гипотезы  $P = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$ , или 95%. Это значит, что в среднем только в 5% случаев возможна ошибка при проверке гипотезы. После вычисления по формуле (15) дисперсий проверяют гипотезу их однородности. Проверка однородности двух дисперсий производится с помощью F-критерия Фишера, который представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad \text{где } s_1^2 > s_2^2.$$

Если наблюдаемое значение  $F_p$ -критерия меньше табличного  $F_T$  (табл. 12) для соответствующих чисел степеней свободы и принятого уровня значимости, то дисперсии однородны. Однородность ряда дисперсий проверяют по критерию Кохрена или по критерию Бартлета. При равномерном дублировании опытов однородность ряда дисперсий проверяют с помощью G-критерия Кохрена, представляющего собой отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_p = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_N^2} = s_{\max}^2 \left/ \sum_{j=1}^N s_j^2 \right.$$

Дисперсии однородны, если расчетное значение  $G_p$ -критерия не превышает табличного значения  $G_T$ -критерия. В табл. 13  $N$  показывает число сравниваемых дисперсий, а  $n$  — число параллельных опытов. Если  $G_p > G_T$ , то дисперсии неоднородны, а это указывает на то, что исследуемая величина  $y$  не подчиняется нормальному закону. В этом случае нужно попытаться заменить  $y$  случайной

Таблица 12

Значения F-критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Значения критерия при числе степеней свободы для большей дисперсии								
	1	2	3	4	5	6	12	24	$\infty$
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,2	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
$\infty$	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

величиной  $q=f(y)$ , достаточно близко следующей нормальному закону. Если дисперсии  $s_j^2$  опытов однородны, то дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента вычисляют по выражению

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j^2 \quad (17)$$

где  $N$  — число опытов или число строк матрицы планирования.

По результатам эксперимента вычисляют коэффициенты модели. Свободный член  $b_0$  определяют по формуле

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \quad (18)$$

Таблица 13

Значения G-критерия при 5%-ном уровне значимости

N	n-1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357

Коэффициенты регрессии, характеризующие линейные эффекты, вычисляют по выражению

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} \bar{y}_j \quad (19)$$

Коэффициенты регрессии, характеризующие эффекты взаимодействия, определяют по формуле

$$b_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{lj} \bar{y}_j \quad (20)$$

где  $i, l$  — номера факторов;  $x_{ij}, x_{lj}$  — кодированные значения факторов  $i$  и  $l$  в  $j$ -м опыте. Формулы (18), (19), (20) получены в результате использования метода наименьших квадратов.

Коэффициенты  $b_0, b_i, b_{ij}$  — это оценки теоретических коэффициентов  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}$  регрессии. Оценки, найденные с помощью метода наименьших квадратов, являются наилучшими в том смысле, что они распределены нормально со средними значениями, равными теоретическим коэффициентам, и с наименьшими возможными дисперсиями. Вычислив коэффициенты модели, проверяют их значимость. Проверку значимости коэффициентов можно производить двумя способами: 1) сравнением абсолютной величины коэффициента с доверительным интервалом; 2) с помощью t-критерия Стьюдента.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии. Дисперсию  $s^2\{b_i\}$   $i$ -го коэффициента определяют по выражению

$$s^2\{b_i\} = \frac{1}{nN} s_y^2 \quad (21)$$

Доверительный интервал  $\Delta b_i$  находят по формуле

$$\Delta b_i = \pm t_{\alpha} s\{b_i\} \quad (22)$$

где  $t_T$  — табличное значение критерия при принятом уровне значимости и числе степеней свободы  $f$ , с которым определялась дисперсия  $s_y^2$ ; при равномерном дублировании опытов число степеней свободы находится по выражению  $f = (n-1)N$ , где  $N$  — число опытов в матрице планирования, а  $n$  — число параллельных опытов;  $s\{b_i\}$  — ошибка в определении  $i$ -го коэффициента регрессии, вычисляемая по формуле  $s\{b_i\} = \sqrt{s^2\{b_i\}}$ . Значения  $t$  приведены в табл. 14.

Таблица 14

Значения  $t$  при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8
Значения $t$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,30
Число степеней свободы	9	10	11	12	13	14	15	16
Значения $t$	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,12
Число степеней свободы	17	18	19	20	21	22	23	24
Значения $t$	2,11	2,10	2,09	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06
Число степеней свободы	25	26	27	28	29	30	40	60
Значения $t$	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,04	2,02	2,00

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют  $t_p$  — критерий по выражению

$$t_p = \frac{|b_i|}{s\{b_i\}}$$

и сравнивают его с табличным  $t_T$ . Коэффициент значим, если  $t_p > t_T$  для принятого уровня значимости и числа степеней свободы, с которым определялась дисперсия  $s_y^2$ . Критерий Стьюдента  $t$  вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Статистически незначимые коэффициенты могут быть исключены из уравнения. После расчета коэффициентов модели и проверки их значимости определяют дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности. Остаточная дисперсия, или дисперсия адекватности, характеризует рассеяние эмпирических значений  $y$  относительно расчетных  $\hat{y}$ , определенных по найден-

ному уравнению регрессии. Дисперсию адекватности определяют по формуле

$$s_{ад}^2 = \frac{n \sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{f} = \frac{n \sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{N - (k + 1)}, \quad (23)$$

где  $\bar{y}_j$  — среднее арифметическое значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;  $\hat{y}_j$  — значение параметра оптимизации, вычисленное по модели для условий  $j$ -го опыта;  $f$  — число степеней свободы, равное  $N - (k + 1)$ ;  $k$  — число факторов.

Последним этапом обработки результатов эксперимента является проверка гипотезы адекватности найденной модели. Проверку этой гипотезы производят по  $F$ -критерию Фишера:

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2}. \quad (24)$$

Если значение  $F_p < F_T$  для принятого уровня значимости и соответствующих чисел степеней свободы, то модель считают адекватной. При  $F_p > F_T$  гипотеза адекватности отвергается. Таким образом, обработка результатов эксперимента при равномерном дублировании опытов может быть представлена следующей схемой:

1) для каждой строки матрицы планирования по формуле (14) вычисляют среднее арифметическое значение  $\bar{y}_j$  параметра оптимизации;

2) по формуле (15) определяют дисперсию  $s_j^2$  каждого опыта матрицы планирования;

3) используя критерий Кохрена, проверяют гипотезу однородности дисперсий  $s_j^2$  опытов;

4) если дисперсии опытов однородны, то по формуле (17) вычисляют дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента;

5) по формулам (18), (19), (20) определяют коэффициенты уравнения регрессии;

6) по выражению (21) находят дисперсии  $s^2\{b_i\}$  коэффициентов регрессии;

7) по формуле (22) устанавливают величину доверительного интервала  $\Delta b_i$ ;

8) проверяют статистическую значимость коэффициентов регрессии;

9) по выражению (23) определяют дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности;

10) с помощью  $F$ -критерия проверяют гипотезу адекватности модели.

В заключение необходимо отметить, что использование критериев Кохрена, Стьюдента и Фишера предполагает нормальное распределение результатов эксперимента.

**Обработка результатов эксперимента при неравномерном дублировании опытов.** Результаты отдельных опытов иногда получаются ошибочными, и их приходится исключать. Вследствие этого числа

параллельных опытов оказываются неодинаковыми. Бывают и другие случаи, когда по тем или иным причинам не удается провести одинаковое число параллельных опытов в каждом из основных. При неодинаковых числах параллельных опытов нарушается ортогональность матрицы планирования и, как следствие, изменяются формулы для определения коэффициентов регрессии и их ошибок. Расчет коэффициентов регрессии и их ошибок при неодинаковых числах параллельных опытов усложняется.

Обработка результатов эксперимента при неравномерном дублировании опытов производится по следующей схеме:

1. Для каждой строки матрицы планирования находят  $\bar{y}_j$  — среднее арифметическое значение параметра оптимизации

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{u=1}^{n_j} y_{ju},$$

где  $n_j$  — число параллельных опытов в  $j$ -й строке матрицы.

2. Для каждой строки матрицы вычисляют дисперсию  $s_j^2$  опыта:

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{u=1}^{n_j} (y_{ju} - \bar{y}_j)^2.$$

3. Проверяют с помощью критерия Бартлета гипотезу однородности дисперсий опытов. Для этого подсчитывают дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента по формуле

$$s_y^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^N f_j} \left( \sum_{j=1}^N s_j^2 f_j \right), \quad (25)$$

где  $f_j$  — число степеней свободы, с которым определялась дисперсия  $s_j^2$   $j$ -го опыта.

После этого определяют величину

$$Q = \frac{1}{c} \left\{ f \lg s_y^2 - \sum_{j=1}^N f_j \lg s_j^2 \right\},$$

где

$$c = 0,4343 \left[ 1 + \frac{1}{3(N-1)} \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f} \right) \right]; \quad f = \sum_{j=1}^N f_j.$$

Бартлет показал, что величина  $Q$  приближенно подчиняется  $\chi^2$  распределению с  $(N-1)$  степенями свободы, где  $N$  — число сравниваемых дисперсий.

Если  $Q$  меньше  $\chi_{\tau}^2$  (табл. 15) для данного числа  $(N-1)$  степеней свободы и принятого уравнения значимости, то дисперсии однородны, и наоборот. Критерий Бартлета основан на нормальном

распределении. Если распределение случайной величины не подчиняется нормальному закону, то проверка однородности дисперсий может привести к ошибочным результатам.

Рассмотрим применение критерия Бартлета для проверки однородности дисперсий. Матрица планирования предусматривала выполнение четырех опытов. Первый опыт был повторен пять раз, второй — шесть, третий и четвертый — по четыре раза. При этом дисперсия первого опыта равна 3,5; второго — 4,22; третьего — 5,88; четвертого — 11,36. Необходимо проверить, верна ли гипотеза об однородности дисперсий.

Дисперсия  $s_y^2$  параметра оптимизации

$$s_y^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^N f_j} \left( \sum_{j=1}^N s_j^2 f_j \right) = \frac{3,5 \cdot 4 + 4,22 \cdot 5 + 5,88 \cdot 3 + 11,36 \cdot 3}{15} = 5,79.$$

Вычисляем величину  $c$ :

$$c = 0,4343 \left[ 1 + \frac{1}{3(4-1)} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right) \right] = 0,485.$$

Определяем  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{c} \left\{ f \lg s_y^2 - \sum_{j=1}^N f_j \lg s_j^2 \right\} = \frac{1}{0,485} \{ 15 \lg 5,79 - 4 \lg 3,5 - 5 \lg 4,22 - 3 \lg 5,88 - 3 \lg 11,36 \} = 1,37.$$

Табличное значение  $\chi_{\tau}^2$  для трех степеней свободы  $(N-1=3)$  и 5%-го уровня значимости равно 7,82. Так как  $Q < \chi_{\tau}^2$ , то гипотеза однородности дисперсий принимается.

4. Вычисляют коэффициенты  $b_i$  уравнения регрессии, дисперсии  $s^2\{b_i\}$  коэффициентов регрессии и ошибки  $s\{b_i\}$  в определении коэффициентов. Определение указанных величин и ковариаций коэффициентов регрессии изложено в гл. II.

5. Для каждого коэффициента регрессии находят расчетное значение  $t$ -критерия

$$t_p = \frac{\{b_i\}}{s\{b_i\}}.$$

Таблица 15

Значения  $\chi^2$  при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения $\chi^2$	Число степеней свободы	Значения $\chi^2$
1	3,84	16	26,3
2	5,99	17	27,6
3	7,82	18	28,9
4	9,49	19	30,1
5	11,07	20	31,4
6	12,59	21	32,7
7	14,07	22	33,9
8	15,51	23	35,2
9	16,92	24	36,4
10	18,31	25	37,7
11	19,68	26	38,9
12	21,0	27	40,1
13	22,4	28	41,3
14	23,7	29	42,6
15	25,0	30	43,8



Сравнивают расчетное значение  $t_p$  с табличным значением  $t_T$  критерия. Табличное значение критерия находят для принятого уровня значимости и числа степеней свободы  $f$ , которое в рассматриваемом случае определяют по выражению

$$f = \sum_{j=1}^N f_j = \sum_{j=1}^N (n_j - 1).$$

Коэффициент значим при  $t_p > t_T$  и незначим при  $t_p < t_T$ . Статистически незначимые коэффициенты могут быть исключены из уравнения регрессии. При исключении статистически незначимых коэффициентов из уравнения оставшиеся коэффициенты пересчитывают с использованием метода наименьших квадратов.

6. Определяют дисперсию адекватности

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{f} = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{N - (k + 1)}, \quad (26)$$

где  $n_j$  — число параллельных опытов в  $j$ -й строке матрицы.

7. Проверяют гипотезу адекватности полученной модели с помощью F-критерия, используя для этого формулу (24). Если  $F_p < F_T$  для принятого уровня значимости и соответствующих чисел степеней свободы, то модель считают адекватной. При  $F_p > F_T$  гипотеза адекватности отвергается.

**Обработка результатов эксперимента при отсутствии дублирования опытов.** Обработку результатов эксперимента в этом случае производят по следующей схеме.

1. Для вычисления дисперсии  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента выполняют несколько параллельных опытов в нулевой точке (в центре плана). При постановке опытов в нулевой точке все факторы находятся на нулевых уровнях. По результатам опытов в центре плана вычисляют дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента

$$s_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \left[ \sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2 \right], \quad (27)$$

где  $n_0$  — число параллельных опытов в нулевой точке;  $y_u$  — значение параметра оптимизации в  $u$ -м опыте;  $\bar{y}$  — среднее арифметическое значение параметра оптимизации в  $n_0$  параллельных опытах.

2. Закончив эксперимент, вычисляют коэффициенты модели. Свободный член  $b_0$  определяют по формуле

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j. \quad (28)$$

Коэффициенты регрессии, характеризующие линейные эффекты, вычисляют по выражению

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j. \quad (29)$$

Коэффициенты регрессии, характеризующие эффекты взаимодействия, определяют по формуле

$$b_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{lj} y_j, \quad (30)$$

где  $i, l$  — номера факторов;  $j$  — номер строки или опыта в матрице планирования;  $y_j$  — значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;  $x_{ij}, x_{lj}$  — кодированные значения ( $\pm 1$ ) факторов  $i$  и  $l$  в  $j$ -м опыте.

3. Проверяют статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии. Проверку значимости коэффициентов можно производить двумя способами: 1) сравнением абсолютной величины коэффициента с доверительным интервалом; 2) с помощью t-критерия.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии по выражению

$$s^2 \{b_i\} = \frac{1}{N} s_y^2, \quad (31)$$

где  $s^2 \{b_i\}$  — дисперсия  $i$ -го коэффициента регрессии;  $N$  — число строк или опытов в матрице планирования.

Из формулы (31) следует, что дисперсии всех коэффициентов равны. Доверительный интервал  $\Delta b_i$  определяют по формуле (22). Значение t-критерия, входящего в эту формулу, находят по таблице для принятого уровня значимости и числа степеней свободы  $f$ , которое определяют по выражению  $f = n_0 - 1$ . Коэффициент регрессии значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют критерий  $t_p$

$$t_p = \frac{|b_i|}{s \{b_i\}}$$

и сравнивают его с табличным  $t_T$ . Коэффициент значим, если  $t_p > t_T$  для принятого уровня значимости и числа степеней свободы, определенного по формуле  $f = n_0 - 1$ . Критерий Стьюдента  $t$  вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Статистически незначимые коэффициенты регрессии могут быть исключены из уравнения.

4. Определяют дисперсию  $s_a^2$  адекватности по формуле

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{f} = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{N - (k + 1)}. \quad (32)$$

где  $y_j$  — наблюдаемое значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;  $y_j$  — значение параметра оптимизации, вычисленное по модели для условий  $j$ -го опыта;  $f$  — число степеней свободы, которое для линейной модели определяется по выражению  $f=N-(k+1)$ , где  $k$  — число факторов.

5. Проверяют гипотезу адекватности модели по  $F$ -критерию, используя для определения  $F_p$ -критерия формулу (24).

Если  $F_p < F_T$  для принятого уровня значимости и соответствующих чисел степеней свободы, то модель считают адекватной. При  $F_p > F_T$  гипотеза адекватности отвергается. В этом случае для получения адекватной модели принимают одно из следующих решений: 1) переходят к планированию второго или более высокого порядка; 2) уменьшают интервалы варьирования и ставят новый эксперимент, повторяя эти действия до получения адекватной линейной модели.

Если линейная модель адекватна, то переходят к методу крутого восхождения. Необходимо заметить, что крутое восхождение эффективно тогда, когда все коэффициенты при факторах значимы. Незначимость некоторых коэффициентов может получиться вследствие неудачно выбранных интервалов варьирования; включения факторов, не влияющих на параметр оптимизации; большой ошибки опыта.

Принятие решения в данной ситуации зависит от того, какая из трех гипотез выбрана. Если принята первая гипотеза, то изменяют интервалы варьирования по незначимым факторам и ставят новую серию опытов. Если принята вторая, то не влияющие факторы стабилизируют и исключают из опытов. Если принята третья гипотеза, то увеличивают число параллельных опытов. Увеличение числа этих опытов приводит к уменьшению дисперсии коэффициентов и величины доверительного интервала, в результате все или часть коэффициентов могут оказаться значимыми. Возможен случай, когда все коэффициенты, кроме  $b_0$ , незначимы, а модель адекватна. Такая ситуация чаще всего возникает из-за слишком узких интервалов варьирования или вследствие большой ошибки опыта. В этой ситуации возможны два решения: 1) расширение интервалов варьирования или 2) повышение точности эксперимента путем улучшения методики проведения опытов и увеличения числа параллельных опытов.

## 6. КРУТОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА

Градиентом называют вектор, показывающий направление наиболее быстрого изменения некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Градиент ( $\nabla\varphi$ ) непрерывной однозначной функции  $\varphi$  есть вектор:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \bar{j} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \bar{k},$$

где  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$  — частная производная функции по  $i$ -му фактору;

$\bar{i}, \bar{j}, \dots, \bar{k}$  — единичные векторы в направлении осей факторов.

Согласно теореме Тейлора о разложении аналитической функции в ряд частные производные функции по факторам равны по величине и знаку соответствующим коэффициентам регрессии. Следовательно, градиент  $\nabla y$  функции отклика  $y$  есть вектор:

$$\nabla y = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + \dots + b_k \bar{k}.$$

Движение по градиенту обеспечивает наиболее короткий путь к оптимуму, так как направление градиента — это направление самого крутого склона, ведущего от данной точки к вершине.

Если изменять факторы пропорционально их коэффициентам с учетом знака, то движение к оптимуму будет осуществляться по самому крутому пути. Этот процесс движения к области оптимума называют крутым восхождением. Технику расчета крутого восхождения рассмотрим на примере задачи с одним фактором  $x_1$  (рис. 2).

Предположим, что кривая 1 представляет собой неизвестную функцию отклика. В результате реализации плана эксперимента с центром в точке  $O$  получено уравнение регрессии  $y = b_0 + b_1 x_1$ , адекватно описывающее функцию отклика в области значений фактора  $x_1$  от  $-1$  до  $+1$ . Значение коэффициента регрессии  $b_1$  равно тангенсу угла между линией регрессии и осью данного фактора. Если шаг движения по оси  $x_1$  принять равным  $\Delta x$ , то, умножив его на  $b_1$ , получим координаты  $(\Delta x$  и  $b_1 \Delta x)$  точки  $A$ , лежащей на градиенте. После второго шага расстояние по оси  $x_1$  будет равно  $2\Delta x$ . Умножив  $2\Delta x$  на  $b_1$ , найдем координаты  $2\Delta x$  и  $2b_1 \Delta x$  точки  $B$ , лежащей на градиенте, и т. д. Затем проводят опыты с условиями, отвечающими точкам на градиенте. По результатам этих опытов определяют область оптимума. В практических задачах для сокращения объема эксперимента проводят не все, а только часть опытов, предусмотренных крутым восхождением. Условия опытов выбирают так, чтобы область оптимума можно было заключить в «вилку». После этого опыты проводят в точках интервала, образованного точками «вилки», до нахождения наилучшего результата.

В случае  $k$  факторов расчет крутого восхождения по оси каждого фактора производят аналогичным образом, так как коэффициенты  $b_i$  определяются независимо друг от друга. При этом движение по осям всех факторов осуществляют одновременно.

Шаг движения по градиенту выбирают таким, чтобы его минимальная величина была больше ошибки,

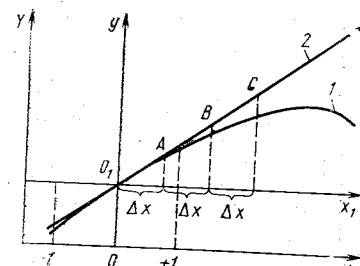


Рис. 2. Схема к расчету координат точек в направлении градиента:

1 — график неизвестной функции отклика; 2 — прямая  $y = b_0 + b_1 x_1$  — направление градиента

с которой фиксируют фактор. Максимальную величину шага ограничивает область определения фактора. Необходимо учитывать, что при движении к оптимуму малый шаг потребует значительного числа опытов, а большой шаг может привести к проскоку области оптимума. Шаг движения выбирают для одного фактора, а для остальных его рассчитывают по выражению

$$\Delta_i = \Delta_l \frac{b_l \varepsilon_i}{b_i \varepsilon_l}, \quad (33)$$

где  $\Delta_l$  — выбранный шаг движения для фактора  $l$ ;  $\Delta_i$  — шаг движения для  $i$ -го фактора;  $b_i, b_l$  — коэффициенты регрессии  $i$ -го и  $l$ -го факторов;  $\varepsilon_i, \varepsilon_l$  — интервалы варьирования  $i$ -го и  $l$ -го факторов.

Движение по градиенту должно начинаться от нулевой точки (основного уровня каждого фактора), так как коэффициенты регрессии вычислены для функции отклика, разложенной в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки. Если коэффициенты регрессии значительно отличаются друг от друга, то рекомендуют изменить интервалы варьирования факторов и провести новую серию опытов, либо при различии коэффициентов на порядок и более многофакторный эксперимент при крутом восхождении может превратиться в однофакторный [7]. Рассчитав шаг движения для каждого фактора, находят условия «мысленных» опытов. «Мысленными» называют опыты, условия проведения которых на стадии крутого восхождения установлены с учетом шага движения для каждого фактора. С целью проверки результатов крутого восхождения часть мысленных опытов реализуется.

Если при движении к оптимуму возникает ситуация, препятствующая изменению каких-либо факторов, то эти факторы можно фиксировать на оптимальных уровнях, продолжая движение по остальным факторам. Крутое восхождение прекращается, если найдены условия оптимизации или если ограничения на факторы делают дальнейшее движение по градиенту неразумным.

Рассмотрим метод Бокса — Уилсона на примере исследования модифицирования чистого алюминия молибденом [9]. В качестве параметра оптимизации  $y$  выбрали число зерен алюминия в  $1 \text{ см}^2$ , определяющееся металлографически.

На параметр оптимизации оказывают существенное влияние следующие факторы:  $x_1$  — количество введенного в алюминий молибдена, %;  $x_2$  — температура перегрева, °C;  $x_3$  — время нагрева, мин;  $x_4$  — скорость охлаждения.  $x_1, x_2, x_3$  — факторы количественные;  $x_4$  — фактор качественный, принимающий два значения: быстрое охлаждение в графитовом тигле и медленное охлаждение в шамотном тигле. Выбранные интервалы варьирования и уровни факторов указаны в табл. 16.

Была реализована полуреплика  $2^{4-1}$  с определяющим контрастом  $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$ . Матрица планирования и результаты опытов представлены в табл. 17. Опыты не дублировали. Для определения дисперсии параметра оптимизации было проведено три опыта при на-

Уровни и интервалы варьирования факторов

Таблица 16

Наименование	Факторы			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Основной уровень	0,40	840	60	—
Интервал варьирования	0,15	100	60	—
Верхний уровень (+)	0,55	940	120	Графитовый тигель
Нижний уровень (—)	0,25	740	0	Шамотный тигель

хождении факторов на основных уровнях (графитовый тигель). Полученные значения параметра оптимизации  $y_u$ , его среднее значение  $\bar{y}$ , отклонения значений параметра оптимизации от его среднего значения  $(y_u - \bar{y})$  и квадраты этих отклонений приведены в табл. 18.

Таблица 17

Матрица планирования

Номер опыта	Порядок реализации опытов	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
1	4	+	+	+	+	+	100
2	3	+	—	+	+	—	81
3	8	+	+	—	—	—	95
4	5	+	—	—	+	+	36
5	7	+	+	+	—	—	130
6	2	+	+	—	—	+	69
7	1	+	—	—	—	+	90
8	6	+	—	—	—	—	64

Вспомогательная таблица для расчета  $s_y^2$

Таблица 18

Номер опыта	$y_u$	$\bar{y}$	$(y_u - \bar{y})$	$(y_u - \bar{y})^2$
1	80	$\frac{\sum_{u=1}^3 y_u}{3} = 80$	0	0
2	82		2	4
3	78		—2	4
				$\sum_{u=1}^{n_0=3} (y_u - \bar{y})^2 = 8$

Дисперсия параметра оптимизации

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = 4.$$

Находим коэффициенты модели

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N}; \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{N};$$

$$b_0 = 83,1; \quad b_1 = 20,0; \quad b_2 = 11,9; \quad b_3 = -5,1;$$

$$b_4 = -9,4.$$

Средняя квадратичная ошибка в определении коэффициентов регрессии

$$s\{b_i\} = +\sqrt{\frac{s_y^2}{N}} = 0,71.$$

## Расчет крутого восхождения

Наименование	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
Основной уровень	0,40	840	60	—	—
Коэффициент $b_i$	20	11,9	-5,1	-9,4	—
Интервал варьирования $\varepsilon_i$	0,15	100	60	—	—
$b_i \times \varepsilon_i$	3	1190	-306	—	—
Шаг $\Delta_i$	0,0252	10	-2,57	—	—
Округленный шаг	0,03	10	-3	—	—
Мысленный опыт	0,43	850	57	Шамотный тигель	—
То же	0,46	860	54	То же	—
Реализованный опыт 9	0,49	870	51	"	108
Мысленный опыт	0,52	880	48	"	—
То же	0,55	890	45	"	—
Реализованный опыт 10	0,58	900	42	"	196
Реализованный опыт 11	0,61	910	39	"	366
Реализованный опыт 12	0,64	920	36	"	313

$$\Delta_3 = \Delta_2 \frac{b_{3\varepsilon_3}}{b_{2\varepsilon_2}} = 10 \frac{(-5,1)60}{11,9 \cdot 100} = -2,57.$$

Лучший результат получен в 11-м опыте. Величина параметра оптимизации удовлетворила исследователей, и работа была закончена. Таким образом, потребовалось 12 опытов для того, чтобы определить оптимальные условия модифицирования алюминия молибденом.

Таблица 19

Доверительный интервал коэффициентов регрессии

$$\Delta b_i = \pm t_s \{b_i\}.$$

При 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы  $f = n_0 - 1 = 2$  табличное значение критерия  $t_T = 4,3$ . Следовательно,  $\Delta b_i = \pm 3,053$ .

Все коэффициенты регрессии по абсолютной величине больше доверительного интервала, поэтому их можно признать статистически значимыми. Таким образом, получили модель в виде полинома первой степени:  $y = 83,1 + 20x_1 + 11,9x_2 - 5,1x_3 - 9,4x_4$ .

Согласно полученной модели параметр оптимизации воз-

растает с увеличением значений факторов  $x_1, x_2$  и уменьшением значений факторов  $x_3, x_4$ . Наибольшее влияние на параметр оптимизации оказывает фактор  $x_1$ .

Проверку адекватности модели производим по F — критерию Фишера. Для вычисления дисперсии адекватности составим вспомогательную табл. 19.

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{N - (k + 1)} = 8;$$

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} = 2,0.$$

Табличное значение  $F_T$ -критерия при 5%-ном уровне значимости и числа степеней свободы для числителя 3 и для знаменателя 2 равно 19,2  $F_p < F_T$ . Следовательно, модель адекватна. Полученное уравнение используем для крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение (табл. 20) начинаем из нулевой точки (основные уровни):  $x_1 = 0,40$ ;  $x_2 = 840$ ;  $x_3 = 60$ ;  $x_4$  — медленное охлаждение (шамотный тигель), так как быстрое охлаждение приводит к уменьшению параметра оптимизации ( $b_4 = -9,4$ ). Шаг движения для фактора  $x_2$  принят  $\Delta_2 = 10^\circ \text{C}$ . По формуле (33) вычисляем шаг движения для факторов  $x_1$  и  $x_3$ :

$$\Delta_1 = \Delta_2 \frac{b_{1\varepsilon_1}}{b_{2\varepsilon_2}} = 10 \frac{20 \cdot 0,15}{11,9 \cdot 100} = 0,0252,$$

Вспомогательная таблица для расчета  $s_{ад}^2$ 

Номер опыта	$y_j$	$\hat{y}_j$	$y_j - \hat{y}_j$	$(y_j - \hat{y}_j)^2$
1	100	101	-1	1
2	81	79	+2	4
3	95	96	-1	1
4	36	37	-1	1
5	130	130	0	0
6	69	71	-2	4
7	90	87	+3	9
8	64	66	-2	4

$$\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2 = 24$$

При решении многих инженерных задач возникает необходимость в установлении связи между  $k$  независимыми переменными  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и зависящей от них величиной  $y$ . Между переменными величинами возможны следующие типы связей.

1. Функциональная связь между случайными величинами. В этом случае зависимая переменная  $y$  вполне определенно задается независимыми переменными  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

2. Функциональная связь между случайными величинами.

3. Стохастическая связь между случайными величинами. Стохастическая связь проявляется в том, что одна из случайных величин реагирует на изменения другой изменениями своего закона распределения. Наиболее простым видом стохастической связи является корреляционная связь. Корреляционная связь между двумя случайными величинами выражается в том, что на изменения одной случайной величины другая случайная величина реагирует изменениями своего математического ожидания или среднего значения.

4. Связь случайной величины с величинами неслучайными.

Анализ последнего вида связи, который широко используют в статистических методах планирования эксперимента, посвящена данной глава. Природа связи случайной величины с величинами неслучайными может быть двоякой: а) измерения зависимой переменной  $y$  связаны с некоторой ошибкой измерения, а переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  измеряются без ошибок или эти ошибки пренебрежимо малы по сравнению с ошибкой измерения зависимой переменной; б) значения переменной  $y$  зависят не только от контролируемых факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , но и от ряда неконтролируемых факторов, поэтому при каждом сочетании значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$  зависимая переменная  $y$  подвержена колебаниям случайного характера.

Часто возникает необходимость в установлении связи между случайной величиной  $y$  и неслучайными переменными  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , принимающими в каждой серии опытов определенные значения. Величина  $y$  является случайной, имеет нормальное распределение с центром распределения  $M[y]$ , изменяющимся при изменении значений факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Случайная величина  $y$  имеет постоянную дисперсию  $\sigma^2$ , т. е. дисперсию, не зависящую от  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Математическое ожидание  $M[y]$  является функцией  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , т. е. на каждое изменение неслучайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_k$  случайная величина  $y$  реагирует изменением своего математического ожидания. Выражение  $M[y]=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  называют уравнением регрессии

математического ожидания случайной величины  $y$  по неслучайным величинам  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Тип функции  $M[y]=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  может быть линейным или криволинейным. Таким образом, в основе регрессионного анализа лежат следующие предположения:

- 1) при каждом сочетании значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$  величина  $y$  имеет нормальное распределение;
- 2) дисперсия  $\sigma^2$  теоретического распределения случайной величины  $y$  постоянна;
- 3) тип функции  $M[y]=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  известен;
- 4) независимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой в определении  $y$ ;
- 5) переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  линейно независимы.

При исследовании различных технологических процессов может использоваться случайная величина  $y$ , не подчиняющаяся нормальному распределению, если удастся подобрать такую функцию преобразования, которая позволит перейти от  $y$  к новой случайной величине  $q=f(y)$ , распределенной нормально. Многие асимметричные распределения удается аппроксимировать нормальными, перейдя от величины  $y$  к величине  $q$  по выражению

$$q = \ln y. \quad (34)$$

Если производить многократные повторные наблюдения над величиной  $y$  при принятом наборе значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , то согласно второму предположению получим дисперсию  $\sigma^2$ , которая не будет зависеть от значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Иначе говоря, при многократных повторных наблюдениях над величиной  $y$  при первом, втором, третьем и т. д. наборах значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$  полученные выборочные дисперсии  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_N^2$ , являющиеся оценками дисперсии  $\sigma^2$  теоретического распределения, должны быть однородны. Однородность оценок не всегда выполняется в условиях реального эксперимента. Если в этом случае удастся найти функциональную зависимость  $\sigma^2 = \varphi(y)$ , то оказывается возможным предложить такое преобразование случайной величины, которое позволит получить однородные оценки дисперсии. При обработке результатов многофакторного эксперимента функцию  $M[y]=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  обычно представляют полиномом вида

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k$$

или полиномом второй степени

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{kk} x_k^2,$$

где  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$  — коэффициенты уравнения регрессии.

Задачи регрессионного анализа следующие:

- 1) проверка однородности дисперсий  $s_j^2$ ;
- 2) нахождение оценок  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{kk}$  параметров  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{kk}$ ;

- 3) определение доверительных интервалов для  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{kk}$  и проверка значимости оценок;  
4) проверка гипотезы адекватности.

### 1. ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ С $k$ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Выполнено  $N$  опытов над величиной  $y$ , зависящей от  $k$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Опыты не дублировались, т. е. для каждого сочетания значений  $x_{1u}, x_{2u}, \dots, x_{ku}$  проведено только одно наблюдение  $y_u$  ( $u$  — номер опыта,  $u=1, 2, \dots, N$ ). Допустим, что результаты наблюдений можно представить уравнением регрессии вида

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k. \quad (35)$$

Будем считать, что выполняются следующие предположения:

- 1) при каждом сочетании значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$  величина  $y$  имеет нормальное распределение;
- 2) дисперсия  $\sigma^2$  случайной величины  $y$  постоянна;
- 3) независимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой в определении  $y$ ;
- 4) переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  линейно независимы.

Задача заключается прежде всего в том, чтобы по результатам  $N$  наблюдений определить коэффициенты линейного уравнения регрессии (35). Число этих коэффициентов равно  $(k+1)$ . Для решения поставленной задачи число  $N$  опытов должно быть равно или больше числа коэффициентов уравнения регрессии, т. е.  $N \geq (k+1)$ .

Оценку уравнения регрессии (35) запишем в виде

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k, \quad (36)$$

где  $y$  — выборочная оценка  $\eta$ ;  $x_0$  — фиктивная переменная, равная 1 ( $x_0 = 1$ ).

Оценки  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  параметров  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  уравнения регрессии (35) определяют методом наименьших квадратов по результатам  $N$  наблюдений. Согласно методу наименьших квадратов оценки  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  находят из условия минимума суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений  $y$  от значений  $y$ , предсказанных уравнением (36). Указанная сумма  $s$  определяется по выражению

$$s = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2 = \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 x_{0u} - b_1 x_{1u} - b_2 x_{2u} - \dots - b_k x_{ku})^2, \quad (37)$$

где  $y_u$  — наблюдаемое значение  $y$  в  $u$ -м опыте;  $\hat{y}_u$  — значение  $y$ , полученное по уравнению (36) при значениях независимых переменных, соответствующих условиям  $u$ -го опыта;  $x_{iu}$  — значение  $i$ -й независимой переменной в  $u$ -м опыте.

Условием минимума суммы квадратов отклонений является равенство нулю частных производных от  $s$  по  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ .

Дифференцируя выражение (37) по  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  и приравнявая частные производные нулю, получим систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u}^2 + b_1 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{2u} + \dots + b_k \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{ku} &= \sum_{u=1}^N x_{0u} y_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{1u}^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{2u} + \dots + b_k \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{ku} &= \sum_{u=1}^N x_{1u} y_u; \\ \dots & \dots \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{2u} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{2u} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{2u}^2 + \dots + b_k \sum_{u=1}^N x_{2u} x_{ku} &= \sum_{u=1}^N x_{2u} y_u; \\ \dots & \dots \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{0u} x_{ku} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{1u} x_{ku} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{2u} x_{ku} + \dots + b_k \sum_{u=1}^N x_{ku}^2 &= \sum_{u=1}^N x_{ku} y_u. \end{aligned} \quad (38)$$

Введем обозначения

$$(ij) = (ji) = \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju}; \quad (ii) = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2; \quad (iy) = \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u; \\ i = 0, 1, 2, \dots, k; \quad i \neq j.$$

В соответствии с принятыми обозначениями сумму  $\sum_{u=1}^N x_{0u}^2$  обо-

значим через (00), так как в данном случае  $i=0$ ; сумму  $\sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u}$  — через (01), так как  $i=0; j=1$  и т. д.

С учетом принятых обозначений система уравнений (38) примет вид

$$\begin{aligned} b_0(00) + b_1(01) + b_2(02) + \dots + b_k(0k) &= (0y); \\ b_0(10) + b_1(11) + b_2(12) + \dots + b_k(1k) &= (1y); \\ b_0(20) + b_1(21) + b_2(22) + \dots + b_k(2k) &= (2y); \\ \dots & \dots \\ b_0(k0) + b_1(k1) + b_2(k2) + \dots + b_k(kk) &= (ky). \end{aligned} \quad (39)$$

Чтобы найти коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_k$ , необходимо решить систему уравнений (39). Для упрощения вывода расчетных формул используем матричную алгебру.

Запишем значения независимых переменных  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  в  $N$  опытах в виде следующей матрицы:



$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Такую матрицу называют матрицей условий эксперимента. В общем случае  $X$  — матрица является прямоугольной, так как число опытов  $N$  обычно больше числа определяемых коэффициентов.

Значения величины  $y$ , полученные в  $N$  опытах, представим матрицей, содержащей  $N$  строк и один столбец:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$Y$ -матрицу называют матрицей наблюдений.

Транспонированной называют матрицу, в которой относительно исходной матрицы строки и столбцы поменялись местами.

Процесс умножения матриц определяется правилом «строка на столбец». В результате этого каждый элемент матрицы произведения представляет собой сумму произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы. Для умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$  необходимо, чтобы матрица  $A$  содержала столько столбцов, сколько строк имеется в матрице  $B$ .

Например:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}) & (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}) & (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}) \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу  $X^*$ , транспонированную по отношению к матрице  $X$ :

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Умножим слева  $X$ -матрицу на матрицу, транспонированную к ней. Необходимо отметить, что произведение матрицы  $A$  на матрицу  $B$  не равно произведению матрицы  $B$  на матрицу  $A$ , поэтому при умножении матриц указывают их расположение в произведении. Обозначим элементы матрицы-произведения  $X^*X$  — через  $h_{lv}$ , где  $l$  — номер строки;  $v$  — номер столбца.

Элемент  $h_{11}$  матрицы  $X^*X$  равен сумме произведений элементов первой строки матрицы  $X^*$  на соответствующие элементы первого столбца матрицы  $X$ , т. е.  $h_{11} = (x_{01}x_{01} + x_{02}x_{02} + \dots + x_{0N}x_{0N}) = \sum_{u=1}^N x_{0u}^2 = (00)$ . Элемент  $h_{12}$  матрицы  $X^*X$  равен сумме произведений

элементов первой строки матрицы  $X^*$  на соответствующие элементы второго столбца матрицы  $X$ , т. е.  $h_{12} = (x_{01}x_{11} + x_{02}x_{12} + \dots + x_{0N}x_{1N}) = \sum_{u=1}^N x_{0u}x_{1u} = (01)$ . Элемент  $h_{21}$  матрицы  $X^*X$  равен

сумме произведений элементов второй строки матрицы  $X^*$  на соответствующие элементы первого столбца матрицы  $X$ , т. е.  $h_{21} = (x_{11}x_{01} + x_{12}x_{02} + \dots + x_{1N}x_{0N}) = \sum_{u=1}^N x_{1u}x_{0u} = (10)$  и т. д.

Заменив в матрице обозначения  $h_{lv}$  элементов их значениями, найденными указанным способом, получим матрицу  $X^*X$ , элементами которой будут являться коэффициенты системы нормальных уравнений (39):

$$X^*X = \begin{pmatrix} (00) & (01) & (02) & \dots & (0k) \\ (10) & (11) & (12) & \dots & (1k) \\ (20) & (21) & (22) & \dots & (2k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k0) & (k1) & (k2) & \dots & (kk) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Матрица  $X^*X$  симметричная, так как  $(ij) = (ji)$ . Умножим слева  $Y$ -матрицу наблюдаемых значений на матрицу  $X^*$  и получим матрицу, состоящую из  $k+1$  строк и одного столбца:

$$X^*Y = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (x_{01}y_1 + x_{02}y_2 + \dots + x_{0N}y_N) \\ (x_{11}y_1 + x_{12}y_2 + \dots + x_{1N}y_N) \\ (x_{21}y_1 + x_{22}y_2 + \dots + x_{2N}y_N) \\ \dots \\ (x_{k1}y_1 + x_{k2}y_2 + \dots + x_{kN}y_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^N x_{0u}y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{1u}y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{2u}y_u \\ \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{ku}y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0y) \\ (1y) \\ (2y) \\ \dots \\ (ky) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Элементами матрицы произведения  $X^*Y$  являются свободные члены системы нормальных уравнений (39).

Искомые коэффициенты  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  запишем в виде следующей матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Если умножить матрицу  $X^*X$  на матрицу  $B$ , то получим матрицу, состоящую из  $k+1$  строк и одного столбца:

$$(X^*X)B = \begin{pmatrix} (00)b_0 + (01)b_1 + (02)b_2 + \dots + (0k)b_k \\ (10)b_0 + (11)b_1 + (12)b_2 + \dots + (1k)b_k \\ (20)b_0 + (21)b_1 + (22)b_2 + \dots + (2k)b_k \\ \dots \\ (k0)b_0 + (k1)b_1 + (k2)b_2 + \dots + (kk)b_k \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Элементы этой матрицы представляют собой левые части уравнений системы (39).

Матрицы  $(X^*X)B$  и  $X^*Y$  имеют одинаковый размер, а именно: каждая из этих матриц состоит из одного столбца и  $k+1$  строк. Из соотношений (39) следует, что элементы матрицы  $(X^*X)B$  равны соответствующим элементам матрицы  $X^*Y$ , поэтому справедливо выражение

$$(X^*X)B = X^*Y. \quad (47)$$

Найдем матрицу  $(X^*X)^{-1}$ , обратную матрице  $(X^*X)$ . Обратной к матрице  $A$  называют такую матрицу  $A^{-1}$ , для которой

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где  $E$  — единичная матрица;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица  $A$  называется невырожденной, если определитель ее отличен от нуля. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Умножив слева обе части уравнения (47) на матрицу  $(X^*X)^{-1}$ , получим

$$(X^*X)^{-1}(X^*X)B = (X^*X)^{-1}(X^*Y).$$

Так как  $(X^*X)^{-1}(X^*X) = E$ , а  $EB = B$ , то  $B = (X^*X)^{-1}(X^*Y)$ . (48)

Обозначим элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$  через  $c_{ij}$ , где  $i$  — номер строки, а  $j$  — номер столбца. В этом случае матрицу  $(X^*X)^{-1}$

можно будет записать в виде

$$(X^*X)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \dots c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \dots c_{1k} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} \dots c_{kk} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

В результате умножения слева матрицы  $X^*Y$  на матрицу  $(X^*X)^{-1}$  получим матрицу, содержащую  $k+1$  строку и один столбец:

$$(X^*X)^{-1}(X^*Y) = \begin{pmatrix} c_{00}(0y) + c_{01}(1y) + c_{02}(2y) + \dots + c_{0k}(ky) \\ c_{10}(0y) + c_{11}(1y) + c_{12}(2y) + \dots + c_{1k}(ky) \\ c_{20}(0y) + c_{21}(1y) + c_{22}(2y) + \dots + c_{2k}(ky) \\ \dots \\ c_{k0}(0y) + c_{k1}(1y) + c_{k2}(2y) + \dots + c_{kk}(ky) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Подставив матрицы (45) и (50) в выражение (48), получим

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00}(0y) + c_{01}(1y) + c_{02}(2y) + \dots + c_{0k}(ky) \\ c_{10}(0y) + c_{11}(1y) + c_{12}(2y) + \dots + c_{1k}(ky) \\ c_{20}(0y) + c_{21}(1y) + c_{22}(2y) + \dots + c_{2k}(ky) \\ \dots \\ c_{k0}(0y) + c_{k1}(1y) + c_{k2}(2y) + \dots + c_{kk}(ky) \end{pmatrix}.$$

Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, следовательно:

$$\begin{aligned} b_0 &= c_{00}(0y) + c_{01}(1y) + c_{02}(2y) + \dots + c_{0k}(ky), \\ b_1 &= c_{10}(0y) + c_{11}(1y) + c_{12}(2y) + \dots + c_{1k}(ky), \\ b_2 &= c_{20}(0y) + c_{21}(1y) + c_{22}(2y) + \dots + c_{2k}(ky), \\ &\dots \\ b_k &= c_{k0}(0y) + c_{k1}(1y) + c_{k2}(2y) + \dots + c_{kk}(ky). \end{aligned} \quad (51)$$

Полученные уравнения позволяют определять значения искомых коэффициентов  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ . На основании этих уравнений обобщенную формулу для определения указанных коэффициентов можно записать в виде

$$b_i = \sum_{j=0}^k c_{ij}(jy). \quad (52)$$

Таким образом, при определении коэффициентов регрессии приходится выполнять следующие операции: 1) составлять систему нормальных уравнений; 2) обращать матрицу  $X^*X$ , составленную из коэффициентов нормальных уравнений; 3) находить суммы произведений по выражению (52). Матрица, составленная из коэффициентов нормальных уравнений, должна быть невырожденной. Для

этого необходимо, чтобы переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  были линейно независимыми [7].

Сумма произведений (52), определяющая  $i$ -й коэффициент уравнения регрессии, состоит из  $k+1$  слагаемых. Число этих слагаемых равно числу коэффициентов уравнения регрессии. Каждое из слагаемых связано с соответствующей независимой переменной, поэтому коэффициенты не могут быть определены независимо друг от друга. Если по каким-либо причинам хотя бы один коэффициент исключен из уравнения регрессии, все остальные коэффициенты должны быть пересчитаны, так как исключение одной из переменных  $x_i$  приводит к изменению элементов  $c_{ij}$  обратной матрицы  $(X^*X)^{-1}$  и числа слагаемых в сумме (52).

После вычисления коэффициентов выполняют статистический анализ уравнения регрессии. Исследователя прежде всего интересует точность соответствия полученной модели изучаемому процессу, т. е. адекватность модели. Для проверки гипотезы адекватности модели определяют остаточную дисперсию, или иначе — дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности. Остаточная дисперсия характеризует рассеяние эмпирических значений  $y$  относительно расчетных  $y$ , определяемых по найденному уравнению регрессии. Эту дисперсию находят по выражению

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R}{f_R},$$

где  $s_R$  — остаточная сумма квадратов;  $f_R = N - (k + 1)$  — число степеней свободы.

Остаточную сумму квадратов определяют по формуле

$$s_R = \sum_{u=1}^N y_u^2 - \sum_{i=0}^k b_i \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u = \sum_{u=1}^N y_u^2 - \sum_{i=0}^k b_i (iy). \quad (53)$$

Для проверки гипотезы адекватности необходимо знать дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента. Проверку гипотезы адекватности производят по F-критерию Фишера. Если расчетное значение критерия  $F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2}$  меньше табличного  $F_T$  для принятого

уровня значимости, то гипотеза принимается.

Если априори имеется достаточно оснований для выражения исследуемой зависимости линейным уравнением регрессии, то остаточную дисперсию  $s_{ад}^2$  можно рассматривать, как оценку дисперсии  $\sigma_y^2$ . Остаточную сумму квадратов  $s_R$  можно вычислять по выражению

$$s_R = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2, \quad (54)$$

где  $y_u$  — наблюдаемое значение величины  $y$  в  $u$ -м опыте;  $\hat{y}_u$  — значение  $y$ , предсказанное найденным уравнением регрессии по условиям  $u$ -го опыта.

Остаточную сумму квадратов проще вычислять по выражению (53), однако для контроля правильности вычислений рекомендуется величину  $s_R$  определять и по выражению (54).

Элементы квадратной матрицы, расположенные на диагонали, соединяющей левый верхний угол с правым нижним углом, называют диагональными. Можно доказать, что диагональные элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$  определяют дисперсии  $\sigma^2\{b_i\}$  коэффициентов регрессии, а недиагональные элементы определяют  $\text{cov}\{b_i b_j\}$ , характеризующие статистическую зависимость между коэффициентами регрессии [7]. Поэтому матрицу  $(X^*X)^{-1}$  называют матрицей ошибок или корреляционной матрицей.

Дисперсии  $\sigma^2\{b_i\}$  и ковариации  $\text{cov}\{b_i b_j\}$  можно найти из соотношения [7]

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sigma^2\{b_0\} & \text{cov}\{b_0 b_1\} \dots \text{cov}\{b_0 b_k\} \\ \text{cov}\{b_1 b_0\} & \sigma^2\{b_1\} \dots \text{cov}\{b_1 b_k\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}\{b_k b_0\} & \text{cov}\{b_k b_1\} \dots \sigma^2\{b_k\} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} \dots c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} \dots c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} \dots c_{kk} \end{vmatrix} \sigma_y^2 = \\ &= \begin{vmatrix} c_{00} \sigma_y^2 & c_{01} \sigma_y^2 \dots c_{0k} \sigma_y^2 \\ c_{10} \sigma_y^2 & c_{11} \sigma_y^2 \dots c_{1k} \sigma_y^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} \sigma_y^2 & c_{k1} \sigma_y^2 \dots c_{kk} \sigma_y^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma^2\{b_0\} &= c_{00} \sigma_y^2; \quad \sigma^2\{b_1\} = c_{11} \sigma_y^2; \dots; \quad \sigma^2\{b_k\} = c_{kk} \sigma_y^2; \\ \text{cov}\{b_0 b_1\} &= c_{01} \sigma_y^2; \dots; \quad \text{cov}\{b_{k-1} b_k\} = c_{k-1, k} \sigma_y^2. \end{aligned}$$

В общем виде формулы для определения  $\sigma^2\{b_i\}$  и  $\text{cov}\{b_i b_j\}$  можно записать следующим образом:

$$\sigma^2\{b_i\} = c_{ii} \sigma_y^2; \quad (56)$$

$$\text{cov}\{b_i b_j\} = c_{ij} \sigma_y^2. \quad (57)$$

Коэффициент корреляции  $\rho$  величин  $(b_i b_j)$

$$\rho\{b_i b_j\} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}. \quad (58)$$

В заключение необходимо напомнить, что уравнение регрессии выражает связь случайной величины  $y$  с неслучайными переменными величинами  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , причем коэффициенты  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  являются величинами случайными, так как их определяют по наблюдаемым значениям случайной величины  $y$ .

Рассмотрим более общий случай, когда зависимость математического ожидания  $M[y]$  случайной величины  $y$  от  $k$  независимых

переменных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , выражается полиномом степени  $\alpha$ , т. е.

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{1 < i < j < k} \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (59)$$

Число коэффициентов регрессии в этом уравнении равно  $c_{k+\alpha}^{\alpha}$ , т. е. числу сочетаний из  $(k+\alpha)$  по  $\alpha$ . Путем несложных преобразований уравнение (59) можно привести к уравнению вида (35). Например, примем степень  $\beta$  полинома равной 2. Тогда оценка  $y$  величины  $\eta$  может быть записана в виде уравнения

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{k-1,k} x_{k-1} x_k + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{kk} x_k^2. \quad (60)$$

Введем фиктивную переменную  $x_0 = 1$  и заменим члены второго порядка линейными, приравняв квадраты факторов и парные взаимодействия новым переменным:

$$x_1^2 = x_{k+1}; \quad x_2^2 = x_{k+2}; \dots; \quad x_k^2 = x_{2k};$$

$$x_1 x_2 = x_{2k+1}; \dots; \quad x_{k-1} x_k = x_{k1};$$

где

$$k_1 = c_{k+2}^2 - 1.$$

В новой системе обозначений полином (60) можно записать как линейное однородное уравнение

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{k_1} x_{k_1}.$$

Аналогичным образом можно нелинейные члены полинома любого порядка заменить линейными членами. Изложенная процедура возможна, если все коэффициенты входят в уравнение линейно. Такие уравнения называют линейными по параметрам. Таким образом, после линеаризации полином любого порядка можно рассматривать как линейное однородное уравнение и применять для регрессионного анализа формулы, выведенные для линейного уравнения регрессии. В этом случае в  $X$ -матрицу (матрицу условий эксперимента) вводят столбцы, соответствующие новым переменным, а в матрицу  $B$  — коэффициенты, соответствующие новым переменным.

Если априори степень полинома неизвестна, то расчеты необходимо произвести несколько раз, последовательно увеличивая степень полинома до тех пор, пока полученное уравнение регрессии не станет адекватным. При изменении порядка  $\alpha$  полинома все вычисления, связанные с регрессионным анализом, необходимо произвести заново. Это объясняется тем, что с изменением порядка полинома изменяются  $X$ -матрица, элементы обратной матрицы  $(X^*X)^{-1}$  и число членов в выражении (52).

Изменение порядка полинома или исключение хотя бы части его членов приводит к изменению численных значений оставшихся в полиноме коэффициентов. В результате возникает неопределенность в оценке коэффициентов регрессии, которая затрудняет физическую интерпретацию влияния независимых переменных на иссле-

дуемую величину. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение регрессии используют только как интерполяционную формулу.

Можно избавиться от неопределенности, связанной с неоднозначной численной оценкой коэффициентов регрессии, и значительно упростить формулу для вычисления коэффициентов, если эксперименты планировать так, чтобы сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов  $X$ -матрицы была равна нулю, т. е.

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0. \quad \text{Такое планирование называют ортогональным. В результате его матрица } X^*X \text{ коэффициентов нормальных уравнений}$$

станет диагональной. Диагональной называют квадратную матрицу, в которой отличны от нуля только элементы, лежащие на диагонали, связывающей левый верхний угол с правым нижним.

Матрица  $X^*X$  при ортогональном планировании имеет вид

$$X^*X = \begin{vmatrix} (00) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (11) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (22) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (kk) \end{vmatrix}. \quad (61)$$

Операция нахождения матрицы, обратной для диагональной, очень проста. Матрица, обратная для диагональной, будет также диагональной, причем элементы, лежащие на диагонали обратной матрицы, равны обратным величинам соответствующих элементов прямой матрицы:

$$c_{ii} = \frac{1}{(ii)}, \quad (62)$$

где  $c_{ii}$  — элементы обратной матрицы;  $(ii)$  — элементы исходной матрицы.

Обратная матрица  $(X^*X)^{-1}$  при ортогональном планировании имеет вид

$$(X^*X)^{-1} = \begin{vmatrix} c_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix}. \quad (63)$$

Элементы  $c_{ij}$  ( $i \neq j$ ) матрицы  $(X^*X)^{-1}$  равны нулю, поэтому ковариации равны нулю. При этом коэффициенты регрессии будут определяться независимо друг от друга. Из соотношений (51) следует, что при  $c_{ij} = 0$  коэффициенты регрессии будут определяться по выражениям

$$b_0 = c_{00}(0y); \quad b_1 = c_{11}(1y); \quad b_2 = c_{22}(2y); \quad \dots; \quad b_k = c_{kk}(ky).$$

В общем виде формулу для определения коэффициентов регрес-

сии при ортогональном планировании можно записать следующим образом:

$$b_i = c_{ii}(iy) = c_{ii} \sum_{u=1}^N x_{iu}y_u. \quad (64)$$

Если корреляционная матрица  $(X^*X)^{-1}$  диагональна, то, вычислив по выражению  $s^2\{b_i\} = c_{ii}s_y^2$  оценки  $s^2\{b_i\}$  дисперсий  $\sigma^2\{b_i\}$ , можно установить доверительные границы для каждого коэффициента регрессии в отдельности [7]:

$$b_i - ts\{b_i\} < \beta_i < b_i + ts\{b_i\},$$

или

$$b_i - t\sqrt{c_{ii}s_y^2} < \beta_i < b_i + t\sqrt{c_{ii}s_y^2},$$

где  $b_i$  — оценка коэффициента регрессии  $\beta_i$ ;  $t$  — табличное значение критерия Стьюдента;  $s\{b_i\}$  — ошибка в определении  $b_i$ .

План эксперимента

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y$
1	+	-	-	$y_1$
2	+	+	-	$y_2$
3	+	-	+	$y_3$
4	+	+	+	$y_4$

Необходимо отметить, что при недиагональной корреляционной матрице доверительные границы для  $i$ -го коэффициента регрессии можно установить только после того, как выбраны некоторые фиксированные значения для остальных коэффициентов регрессии [7].

Для иллюстрации изложенного материала рассмотрим следующий пример. Требуется найти зависимость  $y$  от  $x_1$  и  $x_2$ . Искомое уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

Был реализован полный факторный эксперимент типа  $2^2$ , матрица планирования которого приведена в табл. 21.

Запишем  $X$ -матрицу условий эксперимента:

$$X = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Каждая строка этой матрицы — условия опыта. Приведенная матрица ортогональна, так как сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов равна нулю.

$Y$ -матрица наблюдений имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу, транспонированную к  $X$ -матрице:

$$X^* = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Умножим слева  $X$ -матрицу на матрицу  $X^*$ :

$$X^*X = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы-произведения обозначим через  $h_{lv}$ . Элемент  $h_{11}$  равен сумме произведений элементов первой строки матрицы  $X^*$  на соответствующие элементы первого столбца матрицы  $X$ , т. е.

$$h_{11} = (+1)(+1) + (+1)(+1) + (+1)(+1) + (+1)(+1) = 4.$$

Элемент  $h_{12}$  матрицы  $X^*X$  равен сумме произведений элементов первой строки матрицы  $X^*$  на элементы второго столбца матрицы  $X$ .

Аналогично находим, что  $h_{12} = 0$ ;  $h_{13} = 0$ ;  $h_{21} = 0$ ;

$$h_{22} = 4; h_{23} = 0; h_{31} = 0; h_{32} = 0; h_{33} = 4.$$

Таким образом, матрица произведения  $X^*X$  имеет вид

$$X^*X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим слева  $Y$ -матрицу на матрицу  $X^*$ :

$$X^*Y = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ (-1)y_1 + y_2 + (-1)y_3 + y_4 \\ (-1)y_1 + (-1)y_2 + y_3 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{0u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{1u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{2u}y_u \end{pmatrix}.$$

Искомые коэффициенты  $b_0, b_1, b_2$  запишем в виде матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Система нормальных уравнений  $(X^*X)B=X^*Y$  в данном случае будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{0u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{1u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{2u}y_u \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Находим матрицу  $(X^*X)^{-1}$ . Так как матрица  $X^*X$  диагональная, то элементы, лежащие на диагонали обратной матрицы, находим по выражению (62):

$$(X^*X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Умножаем слева обе части уравнения (65) на матрицу  $(X^*X)^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{0u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{1u}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{2u}y_u \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{0u}y_u \\ \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{1u}y_u \\ \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{2u}y_u \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, следовательно:

$$b_0 = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{0u}y_u, \quad b_1 = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{1u}y_u, \quad b_2 = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{2u}y_u.$$

Остаточную сумму квадратов  $s_R$  можно находить как по выражению (53), так и по выражению (54). Выражение (53) в рассматриваемом примере имеет вид

$$s_R = \sum_{u=1}^4 y_u^2 - \sum_{i=0}^2 b_i \sum_{u=1}^4 x_{iu}y_u = \sum_{u=1}^4 y_u^2 - 4 \sum_{i=0}^2 b_i^2,$$

так как по выражению (64)  $b_i = c_{ii} \sum_{u=1}^N x_{iu}y_u$ , а в нашем случае

$$b_i = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 x_{iu}y_u, \quad \text{откуда} \quad \sum_{u=1}^4 x_{iu}y_u = 4b_i.$$

Дисперсия адекватности

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{s_R}{f_R} = \frac{s_R}{N - (k + 1)} = \frac{s_R}{4 - (2 + 1)} = s_R.$$

Оценки  $s^2\{b_i\}$  дисперсий  $\sigma^2\{b_i\}$  будут равны:

$$s^2\{b_0\} = c_{00}s_y^2 = \frac{1}{4} s_y^2; \quad s^2\{b_1\} = c_{11}s_y^2 = \frac{1}{4} s_y^2; \quad s^2\{b_2\} = c_{22}s_y^2 = \frac{1}{4} s_y^2.$$

Ковариации  $\text{cov}\{b_i, b_j\}$  равны нулю, так как в матрице  $(X^*X)^{-1}$  элементы  $c_{ij}$  равны нулю.

Таким образом, регрессионный анализ линейного уравнения можно представить в виде последовательности следующих операций.

1. Составляют  $X$ -матрицу условий опытов и  $Y$ -матрицу наблюдений.
2. Строят матрицу  $X^*$ , транспонированную к  $X$ -матрице.
3. Вычисляют матрицу произведения  $X^*X$ .
4. Находят матрицу  $(X^*X)^{-1}$ , обратную матрице  $X^*X$ .
5. Вычисляют матрицу произведения  $X^*Y$ .
6. По выражению (52) или (64) определяют коэффициенты уравнения регрессии.
7. Находят  $\text{cov}\{b_i, b_j\}$  и оценки  $s^2\{b_i\}$  дисперсий  $\sigma^2\{b_i\}$ .
8. Вычисляют дисперсию  $s_{\text{ад}}^2$  и проверяют гипотезу адекватности уравнения регрессии.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий методику регрессионного анализа в случае, когда уравнение регрессии представлено полиномом второго порядка. Исследуемая величина  $y$  зависит от двух факторов, а оценка уравнения регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (66)$$

Введем обозначения

$$x_0 = 1; \quad x_3 = x_1x_2; \quad x_4 = x_1^2; \quad x_5 = x_2^2.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (66) примет вид

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5. \quad (67)$$



Матрица планирования и результаты опытов приведены в табл. 22.

Таблица 22

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2 (x_3)$	$x_1^2 (x_4)$	$x_2^2 (x_5)$	$y$
1	1	1	0	0	1	0	58,7
2	1	-1	0	0	1	0	49,2
3	1	0,5	0,866	0,433	0,25	0,75	50,5
4	1	0,5	-0,866	-0,433	0,25	0,75	61,0
5	1	-0,5	0,866	-0,433	0,25	0,75	43,8
6	1	-0,5	-0,866	0,433	0,25	0,75	57,7
7	1	0	0	0	0	0	50,1

Для вычисления коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_5$  составим  $X$ -матрицу условий эксперимента и  $Y$ -матрицу наблюдений:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,866 & 0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0,5 & -0,866 & -0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & -0,5 & 0,866 & -0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & -0,5 & -0,866 & 0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 58,7 \\ 49,2 \\ 50,5 \\ 61,0 \\ 43,8 \\ 57,7 \\ 50,1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем  $X$ -матрицу:

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,866 & -0,866 & 0,866 & -0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0,433 & -0,433 & -0,433 & 0,433 & 0 \\ 1 & 1 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим слева  $X$ -матрицу и  $Y$ -матрицу на матрицу  $X^*$ :

$$X^*X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2,25 & 0,75 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 2,25 \end{pmatrix}; \quad X^*Y = \begin{pmatrix} 371 \\ 14,5 \\ -21,131 \\ 1,4722 \\ 161,15 \\ 159,75 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу  $(X^*X)^{-1}$ , обратную матрице  $(X^*X)$ . Элементы  $a_{ij}^{-1}$  матрицы  $A^{-1}$ , обратной матрице  $A$ , можно вычислить по формуле  $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ , где  $|A|$  — определитель матрицы  $A$ ;  $A_{ji}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ji}$  в определителе  $|A|$ . Минором  $M_{ji}$  элемента  $a_{ji}$  определителя  $|A|$  порядка  $n \geq 2$  называется определитель порядка  $n-1$ , полученный из определителя  $|A|$  вычеркиванием  $j$ -й строки  $i$ -го столбца, в пересечении которых стоит данный элемент  $a_{ji}$ . Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ji}$  называется число  $A_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ji}$ . Например, необходимо найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную матрице  $A$ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7.$$

Алгебраическим дополнением  $A_{11}$  элемента  $a_{11}$  будет  $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 5$ ; алгебраическим дополнением  $A_{12}$  элемента  $a_{12}$  будет  $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$ ; алгебраическим дополнением  $A_{21}$  будет число  $-3$ , а  $A_{22}$  — число 1. Элементы обратной матрицы  $A^{-1}$  равны соответственно:

$$a_{11}^{-1} = \frac{A_{11}}{|A|} = -\frac{5}{7}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{A_{21}}{|A|} = \frac{3}{7}; \\ a_{21}^{-1} = \frac{A_{12}}{|A|} = \frac{4}{7}; \quad a_{22}^{-1} = \frac{A_{22}}{|A|} = -\frac{1}{7}.$$

Матрица  $A^{-1}$  имеет вид

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix}.$$

Известны другие методы вычисления элементов обратной матрицы, например метод Гаусса. Для обращения матриц высокого порядка обычно используют ЭВМ. В рассматриваемом примере элементы  $c_{ij}$  матрицы  $(X^*X)^{-1}$  вычисляли методом Гаусса на ЭВМ «Мир-1» по стандартной программе. Матрица  $(X^*X)^{-1}$  имеет вид

$$(X^*X)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,3333 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0,8333 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0,8333 & 1,5 \end{vmatrix}.$$

Находим коэффициенты уравнения (67) по выражению (52): здесь  $(0y)$ ,  $(1y)$ ,  $(2y)$ , ...,  $(5y)$  — суммы, определяемые по формулам (44);  $c_{00}$ ,  $c_{01}$ , ...,  $c_{ij}$  — элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$ ; элементы  $c_{01}$ ,  $c_{02}$ ,  $c_{03}$  равны нулю, поэтому

$$b_0 = c_{00}(0y) + c_{04}(4y) + c_{05}(5y) = 1.371 - 1.161,15 - 1.159,75 = 50,1;$$

$$b_1 = c_{11}(1y) = 0,3333 \cdot 14,5 = 4,8333;$$

$$b_2 = c_{22}(2y) = 0,3333(-21,131) = -7,0437;$$

$$b_3 = c_{33}(3y) = 1,3333 \cdot 1,4722 = 1,963;$$

$$b_4 = c_{40}(0y) + c_{44}(4y) + c_{45}(5y) = -1.371 + 1,5 \cdot 161,15 + 0,8333 \cdot 159,75 = 3,85;$$

$$b_5 = c_{50}(0y) + c_{54}(4y) + c_{55}(5y) = -1.371 + 0,8333 \cdot 161,15 + 1,5 \cdot 159,75 = 2,9167.$$

Таким образом, уравнение (67) имеет вид

$$y = 50,1x_0 + 4,8333x_1 - 7,0437x_2 + 1,963x_3 + 3,85x_4 + 2,9167x_5. \quad (68)$$

По выражению (53) находим остаточную сумму квадратов:

$$s_R = \sum_{u=1}^7 y_u^2 - \sum_{i=0}^5 b_i(iy) = 19895,32 - 19895,278 = 0,042.$$

По формуле (54) получаем аналогичный результат:

$$s_R = \sum_{u=1}^7 (y_u - \hat{y}_u)^2 = 0,042.$$

Остаточная дисперсия, или дисперсия адекватности,

$$s_{ал}^2 = \frac{s_R}{f_R} = \frac{s_R}{N - (k + 1)} = 0,042.$$

Дисперсия  $s_y^2$ , характеризующая ошибку эксперимента, определенная по результатам пяти предварительных опытов с числом степеней свободы  $f=4$ :  $s_y^2=0,02$ . Вычисляем дисперсионное отношение

$$F_p = \frac{s_{ал}^2}{s_y^2} = 2,1.$$

Табличное значение F-критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости и числах степеней свободы для числителя  $f_R=1$  и для знаменателя  $f=4$   $F_T=7,71$ .

Уравнение (68) адекватно, так как  $F_T > F_p$ .

Дисперсии коэффициентов регрессии

$$s^2\{b_0\} = c_{00}s_y^2 = 1 \cdot 0,02 = 0,02; \quad s^2\{b_1\} = c_{11}s_y^2 = 0,3333 \cdot 0,02 = 0,0067;$$

$$s^2\{b_2\} = c_{22}s_y^2 = 0,3333 \cdot 0,02 = 0,0067; \quad s^2\{b_3\} = c_{33}s_y^2 = 1,3333 \cdot 0,02 = 0,0267;$$

$$s^2\{b_4\} = c_{44}s_y^2 = 1,5 \cdot 0,02 = 0,03; \quad s^2\{b_5\} = c_{55}s_y^2 = 1,5 \cdot 0,02 = 0,03.$$

Ковариации находим по выражению (57):

$$\begin{aligned} \text{cov}\{b_0, b_4\} &= c_{04}s_y^2 = -1 \cdot 0,02 = -0,02; \quad \text{cov}\{b_0, b_5\} = c_{05}s_y^2 = \\ &= -1 \cdot 0,02 = -0,02; \quad \text{cov}\{b_4, b_5\} = c_{45}s_y^2 = 0,8333 \cdot 0,02 = 0,0167. \end{aligned}$$

Найденные ковариации показывают, что между коэффициентами  $b_0$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  существует корреляционная связь. Если какой-либо из этих коэффициентов будет исключен из уравнения регрессии, остальные коэффициенты должны быть пересчитаны.

Переходя от переменных  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  к  $x_1 \cdot x_2$ ,  $x_1^2$ ,  $x_2^2$ , получим исконое уравнение

$$y = 50,1 + 4,8333x_1 - 7,0437x_2 + 1,963x_1x_2 + 3,85x_1^2 + 2,9167x_2^2.$$

Это уравнение можно использовать для поиска оптимальных условий ведения процесса, а также как интерполяционную формулу для предсказания значений  $y$  в области эксперимента.

## 2. ПРИМЕРЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ РАВНОМЕРНОМ И НЕРАВНОМЕРНОМ ДУБЛИРОВАНИИ ОПЫТОВ

Регрессионный анализ при дублировании опытов имеет особенности, которые рассмотрим на простых примерах равномерного и неравномерного дублирования.

**Пример 1.** Изучается влияние двух факторов  $x_1$  и  $x_2$  на функцию отклика  $y$ . Матрица планирования эксперимента типа  $2^2$  при равномерном дублировании опытов приведена в табл. 23. Числа  $n_i$  параллельных опытов во всех строках матрицы планирования одинаковы и равны 2. Матрицы  $X$ ,  $Y$  и  $B$  имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Таблица 23

Матрица планирования эксперимента  $2^2$  при равномерном дублировании опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y'$	$y''$	$\bar{y}$
1	+	-	-	$y'_1$	$y''_1$	$\bar{y}_1$
2	+	+	-	$y'_2$	$y''_2$	$\bar{y}_2$
3	+	-	+	$y'_3$	$y''_3$	$\bar{y}_3$
4	+	+	+	$y'_4$	$y''_4$	$\bar{y}_4$

Вычисляем произведения матриц  $X^*X$  и  $X^*Y$ :

$$X^*X = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix};$$

$$X^*Y = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y''_1 + y''_2 + y''_3 + y''_4 \\ -y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y''_1 + y''_2 - y''_3 + y''_4 \\ -y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y''_1 - y''_2 + y''_3 + y''_4 \end{vmatrix}.$$

Находим матрицу  $(X^*X)^{-1}$ , обратную матрице  $X^*X$ ,

$$(X^*X)^{-1} = \begin{vmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{vmatrix}.$$

По выражению  $B = (X^*X)^{-1}(X^*Y)$  определяем коэффициенты регрессии

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y''_1 + y''_2 + y''_3 + y''_4 \\ -y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y''_1 + y''_2 - y''_3 + y''_4 \\ -y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y''_1 - y''_2 + y''_3 + y''_4 \end{vmatrix};$$

$$b_0 = \frac{1}{8} (y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y''_1 + y''_2 + y''_3 + y''_4);$$

$$b_1 = \frac{1}{8} (-y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y''_1 + y''_2 - y''_3 + y''_4);$$

$$b_2 = \frac{1}{8} (-y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y''_1 - y''_2 + y''_3 + y''_4).$$

Учитывая, что  $\frac{1}{2} (y'_1 + y''_1) = \bar{y}_1$ ;  $\frac{1}{2} (y'_2 + y''_2) = \bar{y}_2$  и т. д., получим

$$b_0 = \frac{1}{4} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4); \quad b_1 = \frac{1}{4} (-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4);$$

$$b_2 = \frac{1}{4} (-\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4).$$

Приведенные выражения позволяют получить формулу для определения коэффициентов регрессии при равномерном дублировании опытов:

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} \bar{y}_j,$$

где  $\bar{y}_j$  — среднее арифметическое значение функции отклика в  $j$ -м опыте по результатам  $n$  параллельных опытов.

Дисперсии коэффициентов регрессии

$$s^2\{b_i\} = \frac{1}{8} s_y^2.$$

В общем виде формула для определения дисперсий коэффициентов имеет вид

$$s^2\{b_i\} = \frac{1}{Nn} s_y^2,$$

где  $N$  — число строк матрицы планирования или число опытов;  $n$  — число параллельных опытов;  $s_y^2$  — дисперсия воспроизводимости эксперимента, определяемая по выражению (17).

Установив по формуле (22) величину доверительного интервала  $\Delta b_i$ , проверяют статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии. По выражению (23) определяют дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности и с помощью формулы (24) проверяют гипотезу адекватности модели по F-критерию.

**Пример 2.** При изучении влияния факторов  $x_1$  и  $x_2$  на функцию отклика  $y$  в эксперименте типа  $2^2$  первый и второй опыты повторены дважды, а третий и четвертый опыты проведены по одному разу. Матрица планирования этого эксперимента представлена в табл. 24.

Матрицы  $X$ ,  $Y$  и  $B$  имеют вид

$$X = \begin{vmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \end{vmatrix}; \quad Y = \begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y''_1 \\ y''_2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}.$$

Находим произведения матриц  $X^*X$  и  $X^*Y$ :

$$X^*X = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Таблица 24  
Матрица планирования эксперимента типа  $2^2$  при неравномерном дублировании опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y'$	$y''$	$\bar{y}$
1	+	-	-	$y'_1$	$y''_1$	$\bar{y}_1$
2	+	+	-	$y'_2$	$y''_2$	$\bar{y}_2$
3	+	-	+	$y'_3$	-	$\bar{y}_3 = y'_3$
4	+	+	+	$y'_4$	-	$\bar{y}_4 = y'_4$

$$X^*Y = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y_1'' \\ y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y_1'' + y_2'' \\ -y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y_1'' + y_2'' \\ -y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y_1'' - y_2'' \end{vmatrix}.$$

Матрица  $(X^*X)^{-1}$  недиагональна, поэтому вычисление ее усложняется. По данным работы [13] матрица  $(X^*X)^{-1}$  определяется выражением

$$(X^*X)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{36}{192} & 0 & \frac{12}{192} \\ 0 & \frac{32}{192} & 0 \\ \frac{12}{192} & 0 & \frac{36}{192} \end{vmatrix} = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Находим коэффициенты регрессии по уравнению  $B = (X^*X^*)^{-1}(X^*Y)$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y_1'' + y_2'' \\ -y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y_1'' + y_2'' \\ -y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y_1'' - y_2'' \end{vmatrix}:$$

$$b_0 = \frac{1}{48} [9(y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y_1'' + y_2'') + 3(-y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y_1'' - y_2'')];$$

$$b_1 = \frac{1}{48} [8(-y'_1 + y'_2 - y'_3 + y'_4 - y_1'' + y_2'')];$$

$$b_2 = \frac{1}{48} [3(y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 + y_1'' + y_2'') + 9(-y'_1 - y'_2 + y'_3 + y'_4 - y_1'' - y_2'')].$$

При неравномерном дублировании опытов ортогональность матрицы планирования нарушилась, и вследствие этого значительно усложнились формулы для вычисления коэффициентов регрессии и их ошибок. Нondiagonальные элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$  не равны нулю, следовательно, не равны нулю и ковариации. Дисперсии  $s^2\{b_i\}$  коэффициентов уравнения регрессии определяют по выражению  $s^2\{b_i\} = c_{ii}s_y^2$ , а ковариации коэффициентов — по формуле  $\text{cov}\{b_i, b_j\} = c_{ij}s_y^2$ , где  $c_{ii}$  и  $c_{ij}$  — соответствующие элементы обратной матрицы  $(X^*X)^{-1}$ . Для рассматриваемого примера

$$s^2\{b_0\} = c_{00}s_y^2 = \frac{36}{192}s_y^2,$$

$$s^2\{b_1\} = c_{11}s_y^2 = \frac{32}{192}s_y^2,$$

$$s^2\{b_2\} = c_{22}s_y^2 = \frac{36}{192}s_y^2,$$

$$\text{cov}\{b_0, b_1\} = \text{cov}\{b_1, b_0\} = c_{01}s_y^2 = c_{10}s_y^2 = 0 \cdot s_y^2 = 0;$$

$$\text{cov}\{b_0, b_2\} = \text{cov}\{b_2, b_0\} = c_{02}s_y^2 = c_{20}s_y^2 = \frac{12}{192}s_y^2.$$

Найденные ковариации показывают, что между коэффициентами  $b_0$  и  $b_2$  существует корреляционная связь. Если какой-либо из этих коэффициентов будет исключен из уравнения регрессии, остальные коэффициенты должны быть пересчитаны.

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента определяют по выражению (25). Оценку значимости коэффициентов регрессии производят с помощью  $t$ -критерия, расчетное значение которого определяют отдельно для каждого коэффициента. Дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности находят по формуле (26). Гипотезу адекватности полученной модели проверяют по  $F$ -критерию, используя для этого формулу (24).

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ДЛЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

При неортогональном планировании, большом числе факторов и неравномерном дублировании опытов регрессионный анализ отличается сложностью и большой трудоемкостью. Для упрощения и сокращения трудоемкости анализа применяют ЭВМ. Применение ЭВМ рассмотрим на примере регрессионного анализа результатов полного факторного эксперимента  $2^3$  при использовании ЭЦВМ «Мир-1» [12]. Алгоритм указанной задачи предусматривает выполнение следующих операций:

1. Определяют среднее значение  $\bar{y}_i$  и дисперсию  $s_i^2$  каждого опыта по выражениям

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2,$$

где  $j$  и  $n$  — соответственно номер и число параллельных наблюдений в опыте;  $i$  — номер опыта или строки матрицы планирования.

2. Рассчитывают значение  $G$  — критерия Кохрена:

$$G = s_{i \max}^2 / \sum_{i=1}^m s_i^2,$$

где  $m$  — число опытов или строк в матрице.

Проверяют гипотезу однородности дисперсий сопоставлением расчетного  $G_p$  с его табличным значением  $G_t$ . Если  $G_p < G_t$ , гипотеза принимается.

3. Вычисляют дисперсию воспроизводимости эксперимента:

$$s^2\{\bar{y}\} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2.$$

4. Формируют матрицу взаимодействий  $x_{12}$ ,  $x_{13}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{123}$  и определяют коэффициенты регрессии по формуле

$$b_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ij} \bar{y}_i,$$

где  $j$  — номер фактора;  $j=0, 1, 2, \dots, k$ .

5. Проверяют значимость коэффициентов, для чего:

а) находят ошибку в определении  $j$ -го коэффициента регрессии

$$s\{b_j\} = \sqrt{s^2\{\bar{y}\}/nm};$$

б) определяют значение  $t$  для каждого из коэффициентов:

$$t_j = b_j/s\{b_j\};$$

в) сопоставляют расчетные значения  $t_p$ -критерия с табличным  $t_T$ . Если  $t_p > t_T$ , коэффициент значим. Если это неравенство не выполняется, то соответствующий коэффициент приравнивают нулю.

6. Формируют уравнение регрессии и проверяют его адекватность по критерию Фишера:

$$F = s_{ад}^2/s^2\{\bar{y}\}.$$

Дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности предварительно определяют по формуле

$$s_{ад}^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 / (m - l),$$

где  $\hat{y}_i$  — расчетное значение  $y_i$ , найденное по уравнению регрессии;  $l$  — число значимых коэффициентов в уравнении.

Адекватность проверяют сравнением расчетного и табличного значений критерия Фишера. Если  $F_p < F_T$ , то гипотеза адекватности уравнения принимается. Программа, описывающая данный алгоритм на языке «Алмир-65», приведена в работе [12].

### Глава III

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 1. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ

Движение по градиенту заканчивают после достижения области оптимума, представляющей собой область факторного пространства вблизи экстремума. Функцию отклика в области оптимума обычно удается аппроксимировать полиномом второй степени вида

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_i x_i + \sum_{1 < i < l < k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 < i < k} b_{ii} x_i^2.$$

Для оценки всех коэффициентов полинома второй степени необходимо, чтобы в плане эксперимента каждый фактор принимал не менее трех значений. Применение планов типа  $3^k$  связано с большим числом опытов. Как показали исследования [7], более рациональным является центральное композиционное планирование. Центральным композиционным план второго порядка получают дорстройкой некоторого количества точек к «ядру», образованному линейным планом. При числе  $k$  факторов менее пяти за «ядро» центрального композиционного плана обычно принимают план полного факторного эксперимента типа  $2^k$ . Если число факторов более пяти, то за «ядро» центрального композиционного плана принимают полуреплику от полного факторного эксперимента типа  $2^k$ . Такой выбор «ядра» центрального композиционного плана обусловлен тем, что от «ядра» плана требуется отдельная оценка всех линейных эффектов и парных эффектов взаимодействия. Для двух факторов центральный композиционный план второго порядка может быть представлен следующей схемой (рис. 3).

К полному факторному эксперименту  $2^2$  (точки 1, 2, 3, 4) добавляют некоторое число  $n_0$  опытов в центре плана (точка 9) и четыре «звездных» точки 5, 6, 7, 8 с координатами  $(+\alpha; 0)$ ;  $(-\alpha; 0)$ ;  $(0; +\alpha)$ ;  $(0; -\alpha)$ .

План второго порядка для двух факторов (см. рис. 3) может быть представлен матрицей (табл. 25). Для трех факторов схема центрального композиционного плана второго порядка изображена на рис. 4.

Чтобы получить центральный композиционный план второго порядка для трех факторов, к полному факторному эксперименту  $2^3$  добавляют шесть «звездных» точек с координатами  $(+\alpha; 0; 0)$ ;  $(-\alpha; 0; 0)$ ;  $(0; +\alpha; 0)$ ;  $(0; -\alpha; 0)$ ;  $(0; 0; +\alpha)$ ;  $(0; 0; -\alpha)$  и некоторое число  $n_0$  точек в центре плана. Центральным композиционным планом второго порядка для трех факторов (см. рис. 4) может быть выражен матрицей (табл. 26).

Таблица 25

Матрица центрального композиционного плана второго порядка для двух факторов

Содержание плана	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
План типа 22	1	+	+	+	+	+	+	$y_1$
	2	+	-	+	-	+	+	$y_2$
	3	+	+	-	-	+	+	$y_3$
	4	+	-	-	+	+	+	$y_4$
„Звездные“ точки	5	+	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_5$
	6	+	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_8$
Нулевая точка	9	+	0	0	0	0	0	$y_9$

Таблица 26

Матрица центрального композиционного плана второго порядка для трех факторов

Содержание плана	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$
План типа 23	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_1$
	2	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	$y_2$
	3	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	$y_3$
	4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	$y_4$
	5	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	$y_5$
	6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	$y_6$
	7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	$y_7$
	8	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	$y_8$
„Звездные“ точки	9	+	$+\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	$y_9$
	10	+	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	$y_{10}$
	11	+	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	$y_{11}$
	12	+	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	$y_{12}$
	13	+	0	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	$y_{13}$
	14	+	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	$y_{14}$
Нулевая точка	15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{15}$	

Общее число  $N$  опытов центрального композиционного плана второго порядка зависит от числа  $k$  факторов и определяется по выражению  $N=2^k+2k+n_0$ . Величину «звездного» плеча  $\alpha$  и число опытов  $n_0$  в центре плана выбирают в зависимости от принятого критерия оптимальности. За критерий оптимальности обычно принимают ортогональность или ротатабельность плана.

## 2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В первых работах, посвященных исследованию области оптимума, по аналогии с ортогональными планами первого порядка использовали ортогональные планы второго порядка. Преимущество ортогональных планов состоит в малом объеме вычислений, так как все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга. В ортогональных планах сумма построчных произведений элементов двух любых столбцов матрицы планирования равна нулю. В матрице центрального композиционного плана не все столбцы ортогональны, так как

$$\sum_{j=1}^N x_{0j}x_{1j}^2 \neq 0; \quad (69)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j}^2 \neq 0 \quad (70)$$

В связи с тем, что  $x_0$  всегда равно  $+1$ , а  $x_{ij}^2 \geq 0$ .

Например, матрица, представленная табл. 25, не ортогональна, ибо

$$\sum_{j=1}^9 x_{0j}x_{1j}^2 = 4 + 2\alpha^2; \quad \sum_{j=1}^9 x_{0j}x_{2j}^2 = 4 + 2\alpha^2;$$

$$\sum_{j=1}^9 x_{1j}^2x_{2j}^2 = 4.$$

Для ортогонализации соотношения (69) необходимо преобразовать столбцы матрицы, заменив  $x_i^2$  новой переменной  $x_i'$ . Новую переменную находят по выражению

$$x_i' = x_i^2 - \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}{N} = x_i^2 - \bar{x}_i^2. \quad (71)$$

После замены  $x_i^2$  на  $x_i'$  будут равны нулю суммы построчных произведений столбцов:

$$\sum_{j=1}^N x_{0j}x_{ij}' = \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 - Nx_i^2 = 0. \quad (72)$$

Так, например, в матрице центрального композиционного плана для двух факторов (см. табл. 25) получаем новые переменные

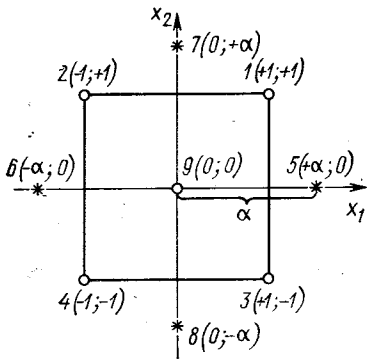


Рис. 3. Схема центрального композиционного плана второго порядка для двух факторов

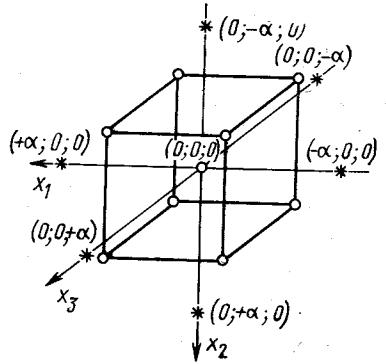


Рис. 4. Схема центрального композиционного плана второго порядка для трех факторов

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{1j}^2}{9} = x_1^2 - \bar{x}_1^2 = x_1^2 - \frac{4 + 2\alpha^2}{9}; \\ x'_2 &= x_2^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{2j}^2}{9} = x_2^2 - \bar{x}_2^2 = x_2^2 - \frac{4 + 2\alpha^2}{9}. \end{aligned} \right\} (73)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^9 x_{0j} x'_{1j} &= \sum_{j=1}^9 x_{0j} (x_{1j}^2 - \bar{x}_1^2) = \\ &= \sum_{j=1}^9 x_{1j}^2 - 9\bar{x}_1^2 = 4 + 2\alpha^2 - \frac{9(4 + 2\alpha^2)}{9} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^9 x_{0j} x'_{2j} = 0.$$

Ортогонализация соотношения (70) достигается выбором «звездного» плеча  $\alpha$ . Значения «звездного» плеча  $\alpha$ , вычисленные для различного числа факторов, приведены в табл. 27. Если ортогональность принять за достаточный критерий оптимальности плана эксперимента, то на число опытов в центре плана не накладывается какого-либо ограничения, и обычно  $n_0 = 1$  [7].

Подставляя  $\alpha = 1$  в соотношения (73), находим новые переменные  $x'_1$  и  $x'_2$ :

$$x'_1 = x_1^2 - \frac{2}{3}; \quad x'_2 = x_2^2 - \frac{2}{3}.$$

Тогда ортогональный центральный композиционный план второго порядка для двух факторов может быть представлен матрицей (табл. 28).

При трех факторах  $\alpha = 1,215$ . Используя соотношение (71) и матрицу плана второго порядка для трех факторов (см. табл. 26), находим новые переменные  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ :

$$x'_1 = x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^{15} x_{1j}^2}{15} = x_1^2 - \frac{8 + 2(1,215)^2}{15} = x_1^2 - 0,73;$$

аналогично

$$x'_2 = x_2^2 - 0,73; \quad x'_3 = x_3^2 - 0,73.$$

Таблица 27

Величина «звездного» плеча  $\alpha$

Число независимых переменных	«Ядро» плана	Число дополнительных опытов	Величина $\alpha$
2	2 <sup>2</sup>	5	1,000
3	2 <sup>3</sup>	7	1,215
4	2 <sup>4</sup>	9	1,414
5	2 <sup>5-1</sup>	11	1,547

$$(1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

Таблица 28

Ортогональный центральный композиционный план второго порядка для двух факторов

Содержание плана	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2 - \frac{2}{3}$	$x_2^2 - \frac{2}{3}$	$y$
План типа 2 <sup>2</sup>	1	+	+	+	+	+1/3	+1/3	$y_1$
	2	+	-	+	-	+1/3	+1/3	$y_2$
	3	+	+	-	-	+1/3	+1/3	$y_3$
	4	+	-	-	+	+1/3	+1/3	$y_4$
«Звездные» точки с плечом $\alpha = 1$	5	+	+	0	0	+1/3	-2/3	$y_5$
	6	+	-	0	0	+1/3	-2/3	$y_6$
	7	+	0	+	0	-2/3	+1/3	$y_7$
	8	+	0	-	0	-2/3	+1/3	$y_8$
Нулевая точка	9	+	0	0	0	-2/3	-2/3	$y_9$

Матрица ортогонального планирования для трех факторов представлена табл. 29. Благодаря ортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2},$$

где  $i$  — номер столбца матрицы;  $j$  — номер опыта;  $x_{ij}$  — элементы соответствующего столбца матрицы;  $y_j$  — значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте.

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формуле

$$s^2\{b_i\} = \frac{s_y^2}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}.$$

Дисперсии коэффициентов не равны, так как суммы квадратов элементов столбцов матрицы  $\sum_{j=1}^N x_{ij}^2$  не равны друг другу.

Реализация опытов по матрице планирования с преобразованной квадратичной переменной позволяет построить модель вида

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_i x_i + \sum_{1 < i < l < k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 < i < k} b_{ii} (x_i^2 - \bar{x}_i^2).$$

Чтобы перейти к обычной форме записи уравнения

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_i x_i + \sum_{1 < i < l < k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 < i < k} b_{ii} x_i^2,$$

Матрица ортогонального планирования для трех факторов

Содержание плана	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1, x_2$	$x_2, x_3$	$x_1, x_3$	$x_1, x_3$	$x_1^2 - 0,73$	$x_2^2 - 0,73$	$x_3^2 - 0,73$	$y$
План $2^3$	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	$y_1$
	2	+	-	+	+	-	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	$y_2$
	3	+	+	-	+	-	-	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	$y_3$
	4	+	-	-	+	+	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	$y_4$
	5	+	+	+	-	-	-	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	$y_5$
	6	+	-	-	+	+	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	$y_6$
	7	+	+	-	-	-	-	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	$y_7$
	8	+	-	+	+	+	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	$y_8$
«Звездные» точ. кн. с $\alpha = 1,215$	9	+	+1,215	0	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	$y_9$
	10	+	-1,215	0	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	$y_{10}$
	11	+	0	+1,215	0	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	$y_{11}$
	12	+	0	-1,215	0	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	$y_{12}$
	13	+	0	0	+1,215	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	$y_{13}$
	14	+	0	0	-1,215	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	$y_{14}$
Нулевая точка	15	+	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	$y_{15}$	

находят величину  $b_0$  по выражению

$$b_0 = b'_0 - b_{11}\bar{x}_1^2 - \dots - b_{kk}\bar{x}_k^2,$$

с дисперсией

$$s^2\{b_0\} = s^2\{b'_0\} + \bar{x}_1^2 s^2\{b_{11}\} + \dots + \bar{x}_k^2 s^2\{b_{kk}\}.$$

Проверка адекватности уравнения второго порядка, получаемого после центрального композиционного ортогонального планирования, производится так же, как и проверка адекватности линейной модели, полученной при реализации плана первого порядка.

### 3. РОТАТАБЕЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как показали исследования [7], критерий ортогональности не является достаточно сильным критерием оптимизации центрального композиционного плана второго порядка. Информация о поверхности отклика, полученная при ортогональном планировании второго порядка, различна в разных направлениях. В то же время исследователь, начиная эксперимент, чаще всего не знает, какое направление будет представлять преимущественный интерес. В тех случаях, когда нет достоверной информации об ориентации поверхности отклика, наиболее разумным является использование центральных композиционных планов, отвечающих требованию ротатабельности, т. е. планов, позволяющих получать модель, способную предсказывать значение параметра оптимизации с одинаковой точностью независимо от направления на равных расстояниях от центра плана.

Ротатабельность центрального композиционного плана достигается выбором величины «звездного» плеча  $\alpha$ . Величину звездного плеча для «ядра», содержащего полный факторный эксперимент, определяют из соотношения

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}}, \quad (74)$$

а для «ядра», содержащего дробную реплику,

$$\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}. \quad (75)$$

Для ротатабельного планирования второго порядка важное значение имеет выбор числа опытов в центре плана, так как число опытов в центре плана определяет характер распределения получаемой информации о поверхности отклика. Число опытов в центре плана выбирается таким, чтобы обеспечивалось так называемое равномерное планирование. Планирование называется равномер-ротатабельным, если получаемая информация постоянно остается внутри интервала  $0 \leq \rho \leq 1$ , где  $\rho$  — радиус информационного контура. Равномер-ротатабельное планирование возможно, если некоторая константа  $\lambda$  не превышает единицы (немного меньше ее):

$$\lambda = \frac{k(n_c + n_0)}{(k+2)n_c}, \quad (76)$$



де  $n_0$  — число опытов в центре плана (число нулевых точек);  $n_c = N - n_0$ ;  $N$  — общее число опытов;  $k$  — число факторов.

Таблица 30

Данные для построения матриц центрального композиционного ротатабельного планирования второго порядка

Число факторов $k$	„Ядро“ плана	Число точек „ядра“ $n_d$	Число „звездных“ точек $n_a$	Число нулевых точек $n_0$	Величина „звездного“ плеча $\alpha$	Общее число опытов $N$
2	2 <sup>2</sup>	4	4	5	1,414	13
3	2 <sup>3</sup>	8	6	6	1,682	20
4	2 <sup>4</sup>	16	8	7	2,000	31
5	2 <sup>5</sup>	32	10	10	2,378	52
5	2 <sup>5-1</sup>	16	10	6	2,000	32
6	2 <sup>6</sup>	64	12	15	2,828	91
6	2 <sup>6-1</sup>	32	12	9	2,378	53
7	2 <sup>7</sup>	128	14	21	3,363	163
7	2 <sup>7-1</sup>	64	14	14	2,828	92

Все данные, необходимые для построения матриц центрального композиционного ротатабельного планирования второго порядка при числе факторов от двух до семи, табулированы (табл. 30) [7]. Матрица ротатабельного равномер-планирования второго порядка для  $k=2$  приведена в табл. 31. Матрицы ротатабельного планирования второго порядка не ортогональны, поэтому объем вычислительной работы при определении коэффициентов регрессии довольно велик. Вычисление коэффициентов регрессии рекомендуется проводить с помощью электронных вычислительных машин, используя метод наименьших квадратов. Коэффициенты уравнения регрессии определяют по формулам, приведенным в работе [7]:

$$b_0 = \frac{A}{N} \left[ 2\lambda^2 (k+2) \sum_{j=1}^N y_j - 2\lambda c \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j \right]; \quad (77)$$

$$b_i = \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j; \quad (78)$$

$$b_{ii} = \frac{c^2}{N\lambda} \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{ij} y_j; \quad (79)$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N} \left\{ c^2 [(k+2)\lambda - k] \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j + c^2 (1-\lambda) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j - 2\lambda c \sum_{j=1}^N y_j \right\}; \quad (80)$$

Таблица 31

Матрица ротатабельного равномер-планирования для  $k=2$

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
1	+	+	+	+	+	+	$y_1$	8	+	0	-1,414	0	0	0	$y_8$
2	+	-	+	-	+	+	$y_2$	9	+	0	0	0	0	0	$y_9$
3	+	+	-	+	+	+	$y_3$	10	+	0	0	0	0	0	$y_{10}$
4	+	-	-	-	+	+	$y_4$	11	+	0	0	0	0	0	$y_{11}$
5	+	+1,414	0	0	2	0	$y_5$	12	+	0	0	0	0	0	$y_{12}$
6	+	-1,414	0	0	2	0	$y_6$	13	+	0	0	0	0	0	$y_{13}$
7	+	0	+1,414	0	0	2	$y_7$								

где

$$A = \frac{1}{2\lambda [(k+2)\lambda - k]}; \quad c = \frac{N}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}.$$

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии находят по формулам

$$s^2 \{b_0\} = \frac{2A\lambda^2 (k+2)}{N} s_y^2; \quad (81)$$

$$s^2 \{b_i\} = \frac{c}{N} s_y^2; \quad (82)$$

$$s^2 \{b_{ii}\} = \frac{c^2}{\lambda N} s_y^2; \quad (83)$$

$$s^2 \{b_{ii}\} = \frac{Ac^2 [(k+1)\lambda - (k-1)]}{N} s_y^2. \quad (84)$$

Вычислив коэффициенты уравнения регрессии, определяют их доверительные интервалы. После этого, исключив из уравнения статистически незначимые коэффициенты, получают математическую модель. Адекватность полученной модели проверяют с помощью расчетного критерия Фишера

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2}.$$

Дисперсию параметра оптимизации определяют по результатам опытов в центре плана:

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1},$$

где  $n_0$  — число параллельных опытов в центре плана;  $y_u$  — значение параметра оптимизации в  $u$ -м опыте;  $\bar{y}$  — среднее арифметическое значение параметра оптимизации в  $n_0$  опытах;  $u$  — номер параллельного опыта в центре плана.

Для определения  $s_{ax}^2$  вычисляют сумму  $s_R$  квадратов отклонений расчетных  $\hat{y}_j$  значений функции отклика от экспериментальных  $y_j$ :

$$s_R = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2.$$

Из полученной суммы  $s_R$  вычитают сумму  $s_E$ , использованную для определения дисперсии параметра оптимизации по результатам опытов в центре плана:

$$s_E = \sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2. \quad (85)$$

Полученный результат  $(s_R - s_E)$  делят на число степеней свободы  $f = N - k' - (n_0 - 1)$ , где  $k'$  — число статистически значимых коэффициентов регрессии. Таким образом,

$$s_{ax}^2 = \frac{s_R - s_E}{f}. \quad (86)$$

Если  $F_D < F_T$  (при выбранном уровне значимости), то гипотеза адекватности модели принимается. Если гипотеза адекватности модели не принимается, то применяют планирование третьего порядка или повторяют все опыты, сузив интервалы варьирования или изменив основные уровни факторов.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ ОПТИМУМА, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ПОЛИНОМОМ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В результате выполнения плана второго порядка исследователь получает полином второй степени, адекватно описывающий область оптимума:

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_i x_i + \sum_{1 < i < l < k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 < i < k} b_{ii} x_i^2. \quad (87)$$

Уравнение второй степени в таком виде анализировать сложно, поэтому путем преобразований его приводят к канонической форме. Каноническое преобразование уравнения второй степени заключается в выборе новой системы координат, в которой уравнение принимает более простой вид. Новую систему координат получают путем параллельного переноса старой системы в новое начало и поворота координатных осей относительно этого начала. В результате канонического преобразования уравнение (87) приводится к стандартному каноническому уравнению

$$Y - Y_s = B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + \dots + B_{kk} X_k^2, \quad (88)$$

где  $Y$  — значение параметра оптимизации;  $Y_s$  — значение параметра оптимизации в новом начале координат;  $X_1, X_2, \dots, X_k$  — канонические переменные, являющиеся линейными функциями факторов;  $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{kk}$  — коэффициенты уравнения регрессии в канонической форме.

Первым этапом канонического преобразования является перенос начала координат в особую точку — центр поверхности отклика. Для определения координат этой точки исходное уравнение (87) дифференцируют по каждой независимой переменной. Приравнявая частные производные нулю, получают систему уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \dots; \quad \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0.$$

При аппроксимации функции отклика полиномом второй степени и дифференцировании его по каждой независимой переменной получают систему  $k$  линейных уравнений. Если определитель этой системы уравнений равен нулю, то поверхность отклика не имеет центра. В этом случае начало координат не переносят или переносят в точку с наилучшим значением параметра оптимизации.

Если поверхность имеет центр, т. е. определитель системы отличен от нуля, тогда начало координат переносят в центр. Решая указанную выше систему уравнений, находят координаты центра  $s$  поверхности в старой системе координат. При параллельном переносе системы координат в центр  $s$  поверхности в исходном уравнении исчезают члены, содержащие линейные эффекты, и изменяется свободный член. Коэффициенты при вторых степенях и взаимодействия инвариантны относительно переноса. Подставляя найденные значения координат центра  $s$  в исходное уравнение, определяют значение параметра оптимизации  $Y_s$  в центре (в начале новой системы координат).

После параллельного переноса координатных осей исходное уравнение (87) принимает вид

$$Y = Y_s + \sum_{1 < i < l < k} b_{il} \tilde{x}_i \tilde{x}_l + \sum_{1 < i < k} b_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (89)$$

где  $Y_s$  — значение параметра оптимизации в новом начале координат;  $\tilde{x}_i, \tilde{x}_l$  — новые координаты.

Вторым этапом канонического преобразования является поворот координатных осей в новом начале координат до совмещения их с главными осями геометрической поверхности, соответствующей изучаемой функции отклика. При повороте координатных осей исчезают члены с эффектами взаимодействия и изменяются коэффициенты при вторых степенях. Свободный член инвариантен относительно поворота координатных осей. В результате поворота осей получают уравнение

$$Y - Y_s = B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + \dots + B_{kk} X_k^2.$$

Для определения коэффициентов  $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{kk}$  необходимо решить характеристическое уравнение

$$f(B) = \begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2} b_{12} & \dots & \frac{1}{2} b_{1k} \\ \frac{1}{2} b_{21} & b_{22} - B & \dots & \frac{1}{2} b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} b_{k1} & \frac{1}{2} b_{k2} & \dots & b_{kk} - B \end{vmatrix} = 0. \quad (90)$$

Корни этого уравнения и будут искомыми коэффициентами регрессии  $B_{ii}$ .

Для пояснения изложенного материала рассмотрим следующий пример. Необходимо привести к канонической форме уравнение, полученное в результате реализации плана второго порядка,

$$y = 20 - 10x_1 - 15x_2 + 4x_1x_2 + 6x_1^2 + 4x_2^2. \quad (91)$$

Дифференцируем уравнение по независимым переменным и приравниваем частные производные нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -10 + 4x_2 + 12x_1 = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -15 + 4x_1 + 8x_2 = 0.$$

Вычисляем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 96 - 16 = 80.$$

Определитель не равен нулю, следовательно, исследуемая поверхность имеет центр.

Находим координаты  $x_{1s}$  и  $x_{2s}$  центра  $s$ :

$$x_{1s} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 8 \end{vmatrix}}{80} = \frac{20}{80} = 0,25; \quad x_{2s} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}}{80} = \frac{140}{80} = 1,75.$$

Подставляя  $x_{1s}$  и  $x_{2s}$  в уравнение (91), находим значение параметра оптимизации  $Y_s$  в новом начале координат:

$$Y_s = 20 - 10 \cdot 0,25 - 15 \cdot 1,75 + 4 \cdot 0,25 \cdot 1,75 + 6(0,25)^2 + 4(1,75)^2 = 4,625.$$

После параллельного переноса координатных осей уравнение примет вид

$$Y = 4,625 + 4\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2.$$

Для определения коэффициентов  $B_{11}$ ,  $B_{22}$  решаем следующее характеристическое уравнение:

$$f(B) = \begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2} b_{12} \\ \frac{1}{2} b_{21} & b_{22} - B \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя значения  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$ , получим

$$f(B) = \begin{vmatrix} 6 - B & \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 & 4 - B \end{vmatrix} = B^2 - 10B + 20 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим его корни:

$$B_{11} = 7,236; \quad B_{22} = 2,764.$$

Правильность вычислений можно проверить сравнением сумм коэффициентов при квадратичных членах в исходном и каноническом уравнениях. При правильно выполненных вычислениях суммы коэффициентов должны быть равны, т. е.

$$\sum_{1 < i < k} b_{ii} = \sum_{1 < i < k} B_{ii}.$$

Таким образом, уравнение (91) в канонической форме имеет вид

$$Y - 4,625 = 7,236X_1^2 + 2,764X_2^2.$$

Уравнение в канонической форме удобно для анализа и оптимизации, так как в него входят все факторы только в квадрате. Величина  $Y - Y_s$  зависит от знаков коэффициентов  $B_{ii}$  и не зависит от направления движения из центра по оси  $X_i$ .

Если все коэффициенты  $B_{ii}$  отличны от нуля и центр поверхности лежит в области эксперимента, то возможны следующие случаи [9]: 1) все коэффициенты  $B_{ii} < 0$ , тогда движение в любую сторону от центра уменьшает параметр оптимизации; 2) все коэффициенты  $B_{ii} > 0$ , тогда движение в любую сторону от центра увеличивает параметр оптимизации; 3) часть коэффициентов  $B_{ii} < 0$ , а часть коэффициентов  $B_{ii} > 0$ ; в этом случае для увеличения параметра оптимизации следует двигаться от центра так, чтобы значения  $X_i$  для коэффициентов  $B_{ii} < 0$  равнялись нулю, т. е. искать максимум вдоль осей с  $B_{ii} > 0$ ; наоборот, для уменьшения параметра оптимизации следует двигаться только вдоль осей с  $B_{ii} < 0$ .

При  $k \leq 3$  после канонического преобразования уравнения регрессии легко определить, к какому типу относится геометрический образ изучаемой функции отклика.

При  $k = 2$  геометрический образ изучаемой функции можно представить в виде контурных линий (изолиний). Возможны четыре типа контурных линий (рис. 5). Каждая линия представляет собой проекцию сечения поверхности отклика плоскостью, параллельной плоскости чертежа при значениях параметра оптимизации, равных  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ . Такие линии называют линиями равного отклика, так как каждая линия соответствует определенному значению параметра оптимизации.

Эллипсы (рис. 5, а) соответствуют поверхности отклика, имеющей экстремум в центре  $s$ . Коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют одинаковые знаки. Если коэффициенты отрицательны, то центр фигуры является максимумом, если коэффициенты положительны — минимумом. Эллипс вытянут по той оси, которой соответствует меньший по абсолютной величине коэффициент в каноническом уравнении.

Гиперболы (рис. 5, б) соответствуют поверхности отклика типа минимакса. Коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют разные знаки.

Параметр оптимизации увеличивается при движении из центра фигуры по одной оси и уменьшается при движении по другой оси. Исследователь выбирает направление движения в зависимости от того, что его интересует — максимум или минимум. Здесь, как и

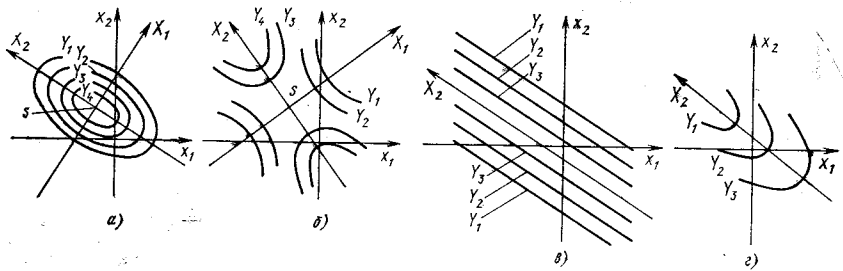


рис. 5. Контурные кривые, характеризующие область оптимума, описываемую уравнением второго порядка, при числе факторов  $k=2$ :

а—экстремум; б—минимум; в—стационарное возвышение; г—возрастающее возвышение

при крутом восхождении, намечается серия мысленных опытов, часть из которых реализуется.

Параллельные линии (рис. 5, в) соответствуют поверхности отклика, представляющей собой стационарное возвышение. Коэффициент  $B_{22}$  равен нулю. Под определение центра в этом случае подходит любая точка на оси  $X_2$ .

Параболы (рис. 5, г) соответствуют поверхности отклика типа возрастающего возвышения. При коэффициенте  $B_{22}$ , равном нулю, центр фигуры находится в бесконечности. Начало координат помещают в точку  $C$  вблизи центра эксперимента на оси  $X_2$  и получают уравнение параболы [7]

$$Y - Y_c = B_{11} X_1^2 + B_2 X_2,$$

где  $B_2$  — коэффициент, определяющий крутизну возвышения, т. е. скорость увеличения параметра оптимизации по оси  $X_2$ .

Аналогично можно анализировать поверхности отклика, описываемые уравнениями второго порядка, при числе факторов  $k=3$ . Рассмотрим некоторые контурные поверхности, характеризующие область оптимума. Область оптимума характеризуется эллипсоидом вращения (рис. 6, а) и имеет экстремум в центре эллипсоида, если все коэффициенты  $B_{ii}$  канонического уравнения имеют одинаковые знаки. Если два коэффициента имеют одинаковые знаки, а третий близок к нулю, то область оптимума может характеризоваться эллиптическим цилиндром (рис. 6, б). В этом случае ось цилиндра, соответствующая незначимому коэффициенту, является линией максимума. При близости к нулю одного коэффициента канонического уравнения область оптимума может также характеризоваться эллиптическим параболоидом (рис. 6, д), при этом центр фигуры находится в бесконечности. Если знак одного из коэффициентов канонического уравнения противоположен знакам двух других, то область оптимума характеризуется одно- или двухполостным параболоидом (рис. 6, г, е). В случае, когда два коэффициента канонического уравнения близки к нулю, область оптимума может характеризоваться серией параллельных плоскостей (рис. 6, е),

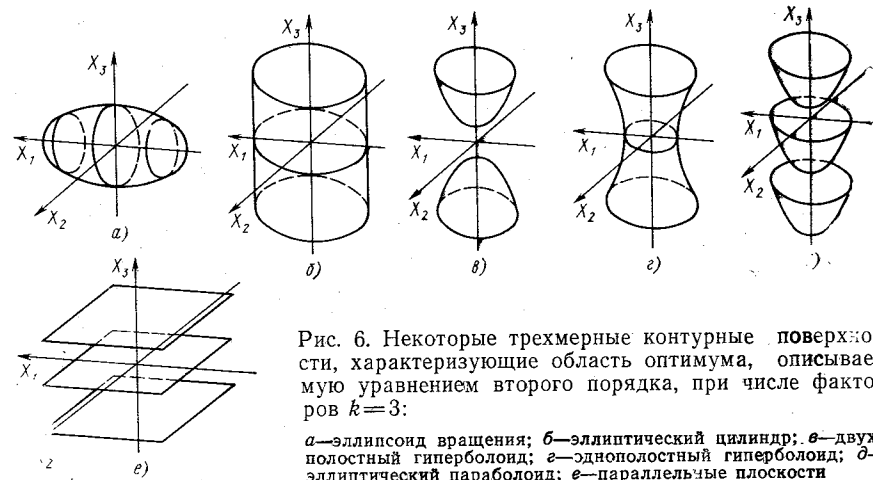


рис. 6. Некоторые трехмерные контурные поверхности, характеризующие область оптимума, описываемую уравнением второго порядка, при числе факторов  $k=3$ :

а—эллипсоид вращения; б—эллиптический цилиндр; в—двухполостный гиперболюид; г—однополостный гиперболюид; д—эллиптический параболоид; е—параллельные плоскости

одна из которых соответствует наибольшей величине параметра оптимизации.

При  $k>3$  наглядное представление о геометрическом образе функции отклика становится невозможным из-за отсутствия у человека геометрической интуиции в многомерных пространствах.

Все многообразие поверхностей отклика, описываемых уравнениями второго порядка, можно проиллюстрировать поверхностями трех следующих типов: 1) поверхности, имеющие экстремум—максимум или минимум (см. рис. 5, а; 6, а); в этом случае все коэффициенты канонического уравнения имеют одинаковые знаки; центр фигуры находится вблизи центра эксперимента; 2) поверхности типа минимакса (см. рис. 5, б; рис. 6, в, г); коэффициенты канонического уравнения имеют разные знаки; центр фигуры находится вблизи центра эксперимента; 3) поверхности типа возрастающего возвышения, или гребня (см. рис. 5, в, г; рис. 6, д, е); некоторые коэффициенты канонического уравнения близки к нулю; центр фигуры удален от центра эксперимента.

Если поверхность отклика иллюстрируется поверхностями первого типа, то решение экстремальной задачи заканчивают после приведения уравнения к канонической форме. Исследователю остается только провести несколько опытов в центре фигуры и убедиться в том, что экспериментальные данные хорошо совпадают со значениями, предсказанными уравнением регрессии. Ситуация значительно сложнее, если поверхность принадлежит второму или третьему типу. В этих случаях приходится искать условный экстремум в той части факторного пространства, где проводились эксперименты, либо искать его при некоторой разумной экстраполяции. Если поверхность является минимаксом, то в поисках условного максимума двигаются из центра фигуры в прямом или обратном направлениях координатных осей, для которых канонические коэффициенты положительны. В случае нелинейного возрастающего воз-

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Уровни			Интервалы варьирования
	верхний +1	основной 0	нижний -1	
$x_1$ — скорость резания, м/мин	314	205	96	109
$x_2$ — подача, мм/об	0,7	0,5	0,3	0,2
$x_3$ — глубина резания, мм	0,75	0,5	0,25	0,25

Таблица 33

План эксперимента типа 2<sup>3</sup>

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$y (Rz)$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	2,16
2	+	+	-	-	-	-	+	+	2,65
3	+	-	+	-	-	+	-	+	3,80
4	+	+	+	-	+	-	-	-	4,70
5	+	-	-	+	+	-	-	+	2,22
6	+	+	-	+	-	+	-	-	2,48
7	+	-	+	+	-	-	+	-	4,20
8	+	+	+	+	+	+	+	+	4,89

2<sup>5</sup> позволяет получить отдельные оценки для коэффициентов уравнения регрессии вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (92)$$

Коэффициенты уравнения регрессии (92) определяли по формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N}; \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{N}; \quad b_{il} = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{lj} y_j}{N}.$$

В результате расчетов были получены следующие значения коэффициентов:  $b_0 = 3,3875$ ;  $b_1 = 0,2925$ ;  $b_2 = 1,01$ ;  $b_3 = 0,06$ ;  $b_{12} = 0,105$ ;  $b_{13} = -0,055$ ;  $b_{23} = 0,0875$ ;  $b_{123} = 0,0025$

После подстановки значений коэффициентов уравнение (92) приняло вид

$$y = 3,3875 + 0,2925x_1 + 1,01x_2 + 0,06x_3 + 0,105x_1x_2 - 0,055x_1x_3 + 0,0875x_2x_3 + 0,0025x_1x_2x_3. \quad (93)$$

Для проверки адекватности полученного уравнения и определения дисперсий коэффициентов необходимо знать дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента. Находим ее по результатам шести опытов, поставленных в центре плана (опыты 1—6, табл. 34).

вышения условный экстремум при ограничениях, наложенных сферой радиуса  $\varrho^2 = \sum x_i^2$ , можно искать, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа [7]. Можно также находить условный экстремум перебором всех комбинаций независимых переменных, варьируя их определенным образом. Решить эту задачу можно только с помощью ЭВМ, так как при каждой комбинации значений независимых переменных необходимо вычислять значение параметра оптимизации.

Поиск оптимальных условий исследуемого процесса при небольшом числе  $k$  влияющих факторов можно упростить, анализируя поверхность отклика в области оптимума графоаналитическим методом с помощью двумерных сечений. Исходное уравнение регрессии в этом случае сводят к уравнению с двумя факторами, стабилизируя остальные на постоянных уровнях. Этим способом можно получить представление о влиянии каждой пары факторов на параметр оптимизации.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ РОТАТАБЕЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ МАТЕРИАЛОВ РЕЗАНИЕМ

Изготовление прецизионных деталей из пластмасс часто производится обработкой резанием. Выбор рациональных режимов резания в значительной степени определяет производительность процесса и качество обработанной поверхности. В работе [3] предусматривалось установление влияния режимов резания на шероховатость поверхности при точении капролона марки С и поиск условий, обеспечивающих минимальную шероховатость обработанной поверхности. Исследования проводились на высокоскоростном токарном станке. В качестве режущего инструмента использовались резцы с пластинками из твердого сплава ВК6М со следующими геометрическими параметрами:  $\gamma = 30^\circ$ ;  $\alpha = 18^\circ$ ;  $\lambda = 0$ ;  $r = 1,5$  мм. Шероховатость поверхности режущего инструмента соответствовала  $Ra = 0,04 \div 0,16$  мкм. Обработке подвергались блоки из капролона без охлаждения.

Шероховатость поверхности определялась на двойном микроскопе МИС-11. За критерий шероховатости принималась высота неровностей  $Rz$ , которая оценивалась по десяти измерениям каждого участка. В качестве факторов выбраны скорость резания  $v$ , подача  $s$  и глубина резания  $t$ , ибо эти элементы режима в основном и определяют высоту неровностей обработанной поверхности. В качестве параметра оптимизации принимаем высоту неровностей.

На первом этапе исследования был поставлен полный факторный эксперимент типа 2<sup>3</sup>. Уровни факторов и интервалы варьирования выбраны по результатам предварительных поисковых экспериментов. Факторы, уровни и интервалы варьирования факторов приведены в табл. 32. Матрица плана эксперимента и результаты измерений высоты неровностей  $y$  представлены в табл. 33. План типа

Таблица 34

## Результаты опытов в центре плана и в «звездных» точках

Содержание плана	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$
Опыты в центре плана	1	+	0	0	0	0	0	0	2,31
	2	+	0	0	0	0	0	0	2,08
	3	+	0	0	0	0	0	0	2,12
	4	+	0	0	0	0	0	0	2,32
	5	+	0	0	0	0	0	0	2,36
	6	+	0	0	0	0	0	0	2,12
Опыты в «звездных» точках	7	+	-1,682	0	0	2,828	0	0	3,55
	8	+	+1,682	0	0	2,828	0	0	4,50
	9	+	0	-1,682	0	0	2,828	0	1,80
	10	+	0	+1,682	0	0	2,828	0	5,15
	11	+	0	0	-1,682	0	0	2,828	2,32
	12	+	0	0	+1,682	0	0	2,828	2,56

Среднее арифметическое значение параметра оптимизации  $\bar{y}$  в центре плана

$$\bar{y} = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0=6} y_u = 2,218.$$

Дисперсия  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента

$$s_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0=6} (y_u - \bar{y})^2 = 0,015456.$$

Разность между значением параметра оптимизации  $\bar{y}$  в центре плана и величиной свободного члена  $b_0$

$$|\bar{y} - b_0| = |2,218 - 3,3875| = 1,1695.$$

Полученная разность во много раз превышает ошибку  $s_y$  эксперимента:

$$s_y = +\sqrt{s_y^2} = 0,1241.$$

Из этого следует, что коэффициенты при квадратичных членах значимо отличаются от нуля, а исследуемая зависимость не может быть с достаточной точностью аппроксимирована уравнением (92). Поэтому перешли к планированию второго порядка и аппроксимировали неизвестную функцию отклика полиномом вида

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \quad (94)$$

Эксперимент был поставлен по программе центрального композиционного ротатабельного планирования второго порядка. Реализованные восемь опытов полного факторного эксперимента  $2^3$  (см. табл. 33) и шесть опытов в центре плана (см. табл. 34) дополнили

шестью опытами в «звездных» точках (опыты 7—12, табл. 34). Величина «звездного» плеча  $\alpha$  в рассматриваемом случае равна 1,682. Коэффициенты уравнения (94) находили по формулам (77), (78), (79), (80). Получили следующие значения коэффициентов:

$$b_0 = 2,1956; \quad b_1 = 0,2882; \quad b_2 = 0,9819; \quad b_3 = 0,0646; \quad b_{12} = 0,105; \\ b_{13} = -0,055; \quad b_{23} = 0,0875; \quad b_{123} = 0,0025; \quad b_{11} = 0,6663; \\ b_{22} = 0,4594; \quad b_{33} = 0,0833.$$

После подстановки значений коэффициентов в уравнение (94) оно получило вид

$$y = 2,1956 + 0,2882 x_1 + 0,9819 x_2 + 0,0646 x_3 + \\ + 0,105 x_1 x_2 - 0,055 x_1 x_3 + 0,0875 x_2 x_3 + 0,0025 x_1 x_2 x_3 + \\ + 0,6663 x_1^2 + 0,4594 x_2^2 + 0,0833 x_3^2. \quad (95)$$

Дисперсии коэффициентов, вычисленные по формулам (81), (82), (83), (84), имели следующие значения:

$$s^2\{b_0\} = 0,00258; \quad s^2\{b_i\} = 0,001131; \quad s^2\{b_{ii}\} = 0,00193; \\ s^2\{b_{ii}\} = 0,00107.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов равны:

$$\Delta b_0 = \pm ts\{b_0\} = \pm 2,57 \cdot 0,05079 = \pm 0,1305; \quad \Delta b_i = \pm ts\{b_i\} = \\ = \pm 0,0864; \quad \Delta b_{ii} = \pm ts\{b_{ii}\} = \pm 0,1129; \quad \Delta b_{ii} = \\ = \pm ts\{b_{ii}\} = \pm 0,084067.$$

В связи с тем что коэффициенты  $b_3$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{123}$ ,  $b_{33}$  по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. Так как среди незначимых оказался и коэффициент  $b_{33}$  при квадратичном члене, значимые коэффициенты были пересчитаны с использованием метода наименьших квадратов. Пересчитанные значения коэффициентов оказались следующими:  $b_0 = 2,26$ ;  $b_{11} = 0,6555$ ;  $b_{22} = 0,4389$ ;  $b_1 = 0,2882$ ;  $b_2 = 0,9819$

Таким образом, математическая модель, полученная в результате ротатабельного планирования второго порядка, приняла вид

$$y = 2,26 + 0,2882 x_1 + 0,9819 x_2 + 0,6555 x_1^2 + 0,4389 x_2^2. \quad (96)$$

Для проверки адекватности модели (96) нашли дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности по формуле

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R - s_E}{N - k' - (n_0 - 1)}.$$

Остаточная сумма квадратов

$$s_R = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2 = 0,4102.$$

Сумма квадратов  $s_E$ , найденная по выражению (85) и использованная для определения дисперсии параметра оптимизации, равна

0,077284. При указанных значениях  $s_R$  и  $s_F$  дисперсия  $s_{ад}^2 = 0,0333$ .  
 Определили расчетное значение F-критерия:

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} = 2,15.$$

При 5%-ном уровне значимости и числа степеней свободы для числителя 10 и знаменателя 5 табличное значение критерия  $F_T$  равно 4,74. Значение  $F_p < F_T$ , поэтому модель (96) следует признать адекватной. Уравнение (96) неудобно для интерпретации полученных результатов и практических расчетов, поэтому его преобразовали по формулам перехода от кодированных значений ( $x_1, x_2, x_3$ ) к натуральным значениям факторов ( $v, s, t$ ):

$$x_1 = \frac{v - v_0}{\Delta v}; \quad x_2 = \frac{s - s_0}{\Delta s}; \quad x_3 = \frac{t - t_0}{\Delta t},$$

где  $v_0, s_0, t_0$  — натуральные значения факторов на основных уровнях;  $\Delta v, \Delta s, \Delta t$  — значения интервалов варьирования.

Таким образом,

$$x_1 = \frac{v - 205}{109}; \quad x_2 = \frac{s - 0,5}{0,2}; \quad x_3 = \frac{t - 0,5}{0,25}. \quad (97)$$

Уравнение (96) с учетом отношений (97) можно представить следующим выражением:

$$Rz = 4,325 - 0,019977v - 6,063s + 5,517 \cdot 10^{-5}v^2 + 10,973s^2. \quad (98)$$

Из приведенного выражения следует, что в области эксперимента ( $t = 0,25 \div 0,75$  мм) глубина резания не оказывает влияния на шероховатость обработанной поверхности капролона. Уравнение (96) используем для поиска оптимального режима обработки капролона резцом с заданной геометрией. В результате переноса начала координат в центр фигуры с координатами  $x_{1s} = -0,22$ ;  $x_{2s} = -1,12$  (они соответствуют значениям  $v = 181$  м/мин;  $s = 0,276$  мм/об) и поворота координатных осей уравнение (96) было приведено к каноническому виду

$$Y - 1,68 = 0,6555X_1^2 + 0,4389X_2^2. \quad (99)$$

Выражение (99) является уравнением эллипса в каноническом виде. Так как коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют положительные знаки, центр эллипсов ( $x_{1s} = -0,22$ ;  $x_{2s} = -1,12$ ) является минимумом функции отклика. В этом случае для поиска экстремума достаточно поставить опыт в центре фигуры и проверить, насколько точно значение параметра оптимизации, предсказанное уравнением регрессии, совпадает с экспериментальным.

В дополнительном опыте, поставленном в центре фигуры ( $x_{1s} = -0,22$ ;  $x_{2s} = -1,12$ ), получено значение функции отклика  $y = 1,7$  мкм. Дальнейшее варьирование скорости и подачи вблизи экстремума не вызвало уменьшения значения  $y$ . Таким образом, оптимальным следует считать режим:  $v = 181$  м/мин,  $s = 0,276$  мм/об при  $t = 0,25 \div 0,75$  мм. Уравнение (99) можно также использовать для определения ожидаемой шероховатости поверхности при обработке капролона на режимах, входящих в область эксперимента.

## Глава IV

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ПРОЦЕССА

#### 1. МОДЕЛИ ПРОЦЕССА

Геометрия наплавленного валика (рис. 7) характеризуется высотой валика  $a$ , шириной валика  $b$ , глубиной проплавления  $h$ , коэффициентом формы  $\psi_p = \frac{b}{a}$  валика, коэффициентом формы  $\psi_n = \frac{b}{h}$  проплавления, коэффициентом полноты  $\mu_b = \frac{F_n}{ab}$  валика и коэффициентом полноты  $\mu_n = \frac{F_n}{bh}$  проплавления.

Рациональные размеры валика в значительной степени определяют производительность процесса наплавки. От размеров валика зависят также чистота наплавленной поверхности и величина припуска на последующую механическую обработку. Кроме этого, при наплавке легированных и высоколегированных сталей на среднеуглеродистую конструкционную сталь от размеров валика зависят структура, механические свойства наплавленного слоя и механические свойства наплавленной детали.

Теория тепловых процессов при сварке в настоящее время не позволяет с необходимой точностью рассчитать размеры и форму наплавленного валика в зависимости от ряда основных технологических факторов процесса.

Эмпирическим путем исследовано влияние отдельных параметров дуговой сварки на размеры и форму шва. Установлено, что на размеры шва основное влияние оказывают следующие факторы процесса: сварочный ток, род и полярность тока, диаметр электрода, напряжение на электродах и скорость сварки. Размеры шва зависят также от ряда дополнительных факторов: начальной температуры основного металла, вылета электрода, положения электрода в пространстве и положения изделия при сварке. Предложены некоторые приближенные зависимости ширины шва, высоты валика, глубины проплавления и коэффициента формы проплавления от основных параметров сварки [10, 18]. Эти зависимости имеют вид

$$b = f_1(I_{св}); \quad b = f_2(d_a); \quad b = f_3(v_a); \quad h = f_4(I_{св});$$

$$h = f_5(d_a); \quad h = f_6(v_n); \quad a = f_7(U_p),$$

где  $I_{св}$  — сварочный ток;  $d_a$  — диаметр электрода;  $v_a$  — скорость подачи электрода;  $v_n$  — скорость наплавки;  $U_p$  — рабочее напряжение на электродах.

Каждая из зависимостей, являясь функцией одной переменной, получена при определенных условиях процесса и фиксации на при-

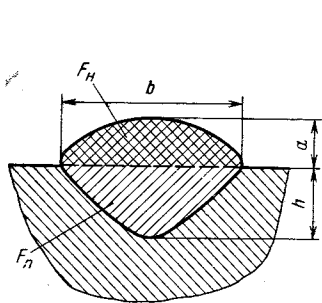


Рис. 7. Основные размеры напавленного валика:

$F_H$ —площадь напавленного металла;  $F_П$ —площадь проплавления

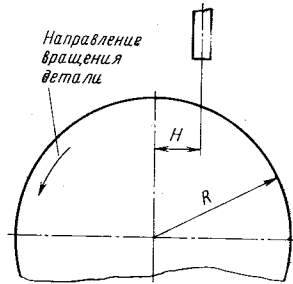


Рис. 8. Схема смещения электрода

нятых уровнях всех влияющих факторов, кроме одного. При других значениях влияющих факторов эти зависимости получаются иными. Вибродуговая наплавка является многофакторным процессом. Влияние основных факторов этого процесса на размеры и форму валика изучено недостаточно [11], причем влияние основных факторов на размеры валика при наплавке электродами большого диаметра (3—3,5—4 мм) вообще не исследовалось.

Для расчета размеров валика необходимы модели, характеризующие зависимости размеров валика не от одного, а одновременно от всех влияющих факторов процесса.

В работе поставлена задача получить математические модели для расчета ожидаемых размеров и формы валика в зависимости от принятого режима вибродуговой наплавки. Переменными факторами являются  $d_э$  — диаметр электрода;  $v_э$  — скорость подачи электрода;  $v_н$  — скорость наплавки;  $U_p$  — рабочее напряжение;  $s_0 = \frac{H}{R}$  — относительное смещение электрода от зенита, где  $H$  — смещение электрода в сторону наплавки от вертикальной оси поперечного сечения наплавляемого вала;  $R$  — радиус вала (рис. 8). Зависимости размеров валика от основных факторов процесса можно представить в общей форме выражениями

$$b = f_1(d_э, v_э, v_н, U_p, s_0); \quad (100)$$

$$a = f_2(d_э, v_э, v_н, U_p, s_0); \quad (101)$$

$$h = f_3(d_э, v_э, v_н, U_p, s_0). \quad (102)$$

Предположим, что зависимости (100), (101), (102) можно с достаточной точностью аппроксимировать уравнениями регрессии степенного вида. Так, например, зависимость (100) можно выразить уравнением

$$b = c d_э^{\alpha_1} v_э^{\alpha_2} v_н^{\alpha_3} U_p^{\alpha_4} s_0^{\alpha_5}. \quad (103)$$

После логарифмирования уравнение (103) линеаризуется:

$$\lg b = \lg c + \alpha_1 \lg d_э + \alpha_2 \lg v_э + \alpha_3 \lg v_н + \alpha_4 \lg U_p + \alpha_5 \lg s_0. \quad (104)$$

Возможность аппроксимации зависимостей (100), (101) и (102) уравнениями вида (103) устанавливается проверкой гипотезы адекватности линейной модели при выражении результатов эксперимента полиномом

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_5 x_5 + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{45} x_4 x_5,$$

где  $y$  — это  $\lg b$ ,  $\lg a$  или  $\lg h$ ;  $x_1, x_2, \dots, x_5$  — кодированные значения факторов.

Для оценки коэффициентов полинома, используя полуреплику  $2^{5-1}$  ( $1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ ) от полного факторного эксперимента  $2^5$ , поставили 16 опытов. Принятые уровни факторов приведены в табл. 35.

Таблица 35

Факторы и их уровни

Факторы	Кодовое обозначение факторов	Уровни факторов		
		верхний +1	основной 0	нижний -1
$d_э$ , мм	$x_1$	3,5	3,0	2,5
$v_э$ , м/ч	$x_2$	72,4	64	56,5
$v_н$ , м/ч	$x_3$	51,4	40	31,1
$U_p$ , В	$x_4$	23	22	21
$s_0$	$x_5$	0,454	0,364	0,272

Кодированные значения факторов определяли по выражению

$$x_i = \frac{2(\lg \tilde{x}_i - \lg \tilde{x}_i^H)}{\lg \tilde{x}_i^B - \lg \tilde{x}_i^H} + 1,$$

где  $x_i$  — кодированное значение  $i$ -го фактора;  $\tilde{x}_i$  — натуральное значение  $i$ -го фактора;  $\tilde{x}_i^B$  — натуральное значение верхнего уровня  $i$ -го фактора;  $\tilde{x}_i^H$  — натуральное значение нижнего уровня  $i$ -го фактора. По полученной матрице поставлен эксперимент, заключающийся в вибродуговой наплавке валиков электродом из стали 12X18H9T на образцы диаметром 110 мм из стали 45. Наплавка в углекислом газе осуществлялась с помощью головки ВГ-8М-УПИ и выпрямителя ВС-600. Условия выполнения каждого из 16 предусмотренных планом опытов определялись матрицей планирования, представленной в табл. 36. Из напавленных образцов готовили макрошлифы, на которых с помощью микроскопа УИМ-21 измеряли  $a, b, h$ , площадь проплавления  $F_П$  и площадь  $F_H$  наплавки. Результаты измерений  $a, b, h$  приведены в табл. 36.

После математической обработки экспериментальных данных были получены уравнения регрессии для  $y_b, y_a$  и  $y_h$ . Уравнение регрессии, например, для  $y_b$  получило вид

$$y_b = 0,898625 + 0,081325x_1 + 0,0271625x_2 - 0,0566125x_3 + 0,0091625x_4 + 0,0128375x_5 - 0,0065625x_1x_2 + 0,0038125x_1x_3 + 0,0001375x_1x_4 + 0,0067625x_1x_5 - 0,002x_2x_3 + 0,0072x_2x_4 + 0,0048x_2x_5 - 0,006x_3x_4 + 0,0029x_3x_5 + 0,00325x_4x_5.$$

Статистическая проверка коэффициентов показала, что при 5%-ном уровне значимости коэффициенты при парных взаимодействиях



Матрица планирования и результаты опытов

Таблица 36

Номер опыта	Условия опытов															$y_b$ (lg b)	$y_a$ (lg a)	$y_h$ (lg h)
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_1 x_4$	$x_1 x_5$	$x_2 x_3$	$x_2 x_4$	$x_2 x_5$	$x_3 x_4$	$x_3 x_5$			
1	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	0,8293	0,2788	0,1903
2	+	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	0,9934	0,4472	0,4232
3	+	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	0,8865	0,3222	0,3222
4	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	1,0511	0,3892	0,4983
5	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	0,7284	0,2041	0,0969
6	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	0,9269	0,2553	0,2788
7	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	0,7889	0,1761	0,2041
8	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	0,9112	0,4393	0,4548
9	+	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	0,8482	0,2788	0,2553
10	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	1,0334	0,3424	0,4548
11	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	0,9469	0,2553	0,3118
12	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	1,0531	0,5250	0,5966
13	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	0,7284	0,1614	0,0607
14	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	0,8837	0,3222	0,3522
15	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	0,7818	0,2304	0,2041
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,9868	0,3010	0,4150

яя незначимы. Линейная часть полинома  $y_b = 0,898625 + 0,081325x_1 + 0,0271625x_2 - 0,0566125x_3 + 0,0091625x_4 + 0,0128375x_5$  адекватна при 5%-ном уровне значимости. Следовательно, зависимость ширины валика от исследуемых факторов с достаточной точностью можно аппроксимировать уравнением степенного вида. В результате перехода от кодированных значений факторов к натуральным получили

$$\lg b = -0,2699 + 1,1125 \lg d_3 + 0,5044 \lg v_3 - 0,5184 \lg v_H + 0,4639 \lg U_p + 0,1332 \lg s_0.$$

После потенцирования

$$b = 0,5371 \frac{d_3^{1,1125} v_3^{0,5044} U_p^{0,4639} s_0^{0,1332}}{v_H^{0,5184}} \quad (105)$$

Анализ результатов эксперимента, выполненный по аналогичной методике, показал, что зависимости высоты валика и глубины проплавления от исследуемых факторов процесса также можно с достаточной точностью аппроксимировать уравнениями степенного вида. При  $s_0 = 0$  зависимости типа (103) теряют физический смысл, поэтому в выражение (103) вместо  $s_0^{0,5}$  ввели множитель  $(k_1 + k_2 s_0)$ . После этого выражение (103) приняло вид

$$b = c d_3^{\alpha_1} v_3^{\alpha_2} v_H^{\alpha_3} U_p^{\alpha_4} (k_1 + k_2 s_0).$$

Матрица плана эксперимента

Таблица 37

Номер опыта	Условия опытов					Размеры валика		
	$d_3$	$U_p$	$v_3$	$v_H$	$s_0$	$b$	$a$	$h$
1	2,0	20	48,25	22,6	0,167	4,55	2,2	0,35
2	2,5	21	56,5	33,9	0,250	6,1	2,2	1,5
3	3,0	22	64,4	45,2	0,333	7,7	2,1	1,7
4	3,5	23	72,4	56,5	0,417	9,0	2,15	2,5
5	4,0	24	79,9	67,8	0,500	10,3	1,7	3,0
6	2,0	23	64,4	67,8	0,250	4,0	1,35	0,45
7	2,5	24	72,4	22,6	0,333	9,7	2,7	2,3
8	3,0	20	79,9	33,9	0,417	9,3	2,3	1,8
9	3,5	21	48,25	45,2	0,500	8,4	1,8	1,55
10	4,0	22	56,5	56,5	0,167	7,4	2,3	2,35
11	2,0	21	79,9	56,5	0,333	4,85	1,7	0,9
12	2,5	22	48,25	67,8	0,417	4,5	1,5	0,55
13	3,0	23	56,5	22,6	0,500	10,5	1,8	1,3
14	3,5	24	64,4	33,9	0,167	8,7	2,6	4,2
15	4,0	20	72,4	45,2	0,250	9,3	3,0	3,9
16	2,0	24	56,5	45,2	0,417	4,2	1,5	0,4
17	2,5	20	64,4	56,5	0,500	5,1	1,75	1,1
18	3,0	21	72,4	67,8	0,167	6,0	2,2	1,6
19	3,5	22	79,9	22,6	0,250	13	4,25	5,3
20	4,0	23	48,25	33,9	0,333	10,6	2,5	2,55
21	2,0	22	72,4	33,9	0,500	5,5	2,0	0,9
22	2,5	23	79,9	45,2	0,167	6,6	2,3	1,8
23	3,0	24	48,25	56,5	0,250	5,8	1,8	1,1
24	3,5	20	56,5	67,8	0,333	6,8	1,65	1,6
25	4,0	21	64,4	22,6	0,417	14,3	2,9	3,9

Для уточнения параметров модели (105) в связи с заменой  $s_0^{0,5}$  сомножителем  $(k_1 + k_2 s_0)$  поставлен новый эксперимент. План этого эксперимента, основанный на использовании взаимноортогональных латинских квадратов, получен по методике, изложенной в работе [16]. Сравнительно с первым область нового эксперимента была расширена:  $d_3$  варьировался от 2 до 4 мм;  $v_3$  — от 48,25 до 79,9 м/ч;  $v_H$  — от 22,6 до 67,8 м/ч;  $U_p$  — от 20 до 24 В;  $s_0$  — от 0,167 до 0,5. Для каждого фактора были установлены пять уровней. План эксперимента предусматривал 25 опытов [16]. Матрица плана и результаты опытов приведены в табл. 37. Математическая обработка результатов эксперимента позволила получить уточненную модель

$$b = 0,12415 \frac{d_3^{1,146} v_3^{0,524} U_p^{0,488} (1,97 + s_0)}{v_H^{0,447}} \quad (106)$$

Проверка адекватности модели (106) по F-критерию показала, что модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, так как  $F_p = 3,1 < F_T = 4,6$ . Модель выражает влияние факторов процесса на ширину валика. Степень влияния относительного смещения электрода на ширину валика можно проиллюстрировать следующими данными: при увеличении  $s_0$  в 2 раза (от 0,25 до 0,5) ширина ва-

лика увеличится только в 1,11 раза. Аналогично получены модели для высоты валика и глубины проплавления. Зависимость высоты валика от исследованных факторов процесса имеет вид

$$a = 2,12638 \frac{d_s^{0,481} v_s^{0,47} (1,7517 - s_0)}{U_p^{0,418} v_n^{0,406}} \quad (107)$$

Характер и степень влияния факторов на высоту валика описываются полученной моделью. Степень влияния относительного смещения на высоту валика можно оценить по следующим данным: при увеличении относительного смещения в 2 раза (от 0,25 до 0,5) высота валика уменьшится только в 1,2 раза. Для глубины проплавления получена зависимость

$$h = 40,82 \cdot 10^{-6} \frac{d_s^{2,437} v_s^{1,675} U_p^{0,669} (2,13 - s_0)}{v_n^{0,439}} \quad (108)$$

Характер и степень влияния факторов на глубину проплавления определяются уравнением (108). Степень влияния относительного смещения электрода на глубину проплавления можно проиллюстрировать следующими данными: при увеличении относительного смещения электрода в 2 раза (от 0,25 до 0,5) глубина проплавления уменьшится только в 1,15 раза. Увеличение диаметра электрода увеличивает переход основного металла в наплавленный слой, так как глубина проплавления возрастает значительно быстрее, чем высота валика (см. уравнения (107) и (108)).

С ростом скорости подачи электрода увеличивается переход основного металла в наплавленный слой. С увеличением скорости наплавки все размеры валика уменьшаются. При увеличении напряжения увеличивается переход основного металла в наплавленный слой, так как согласно уравнениям (107) и (108) с повышением напряжения глубина проплавления увеличивается, а высота валика уменьшается. Относительное смещение электрода оказывает на глубину проплавления меньшее влияние, чем на высоту валика. Увеличение относительного смещения электрода способствует получению низких и широких валиков.

Из анализа зависимостей (106), (107) и (108) следует, что в тех случаях, когда требуется получить наплавленный слой, близкий по составу к электродному металлу, необходимо использовать электрод малого диаметра, при этом скорость подачи электрода и рабочее напряжение должны быть минимальными. В тех случаях, когда металл электрода незначительно отличается по составу от основного металла, для достижения высокой производительности процесса необходимо применять электрод большого диаметра и повышенные скорости его подачи. Требуемую толщину наплавленного слоя при этом можно получать подбором значений скорости и шага наплавки, рабочего напряжения и относительного смещения электрода.

При наплавке стали 12X18H9T на среднеуглеродистую сталь для получения в наплавленном слое мартенситной структуры необ-

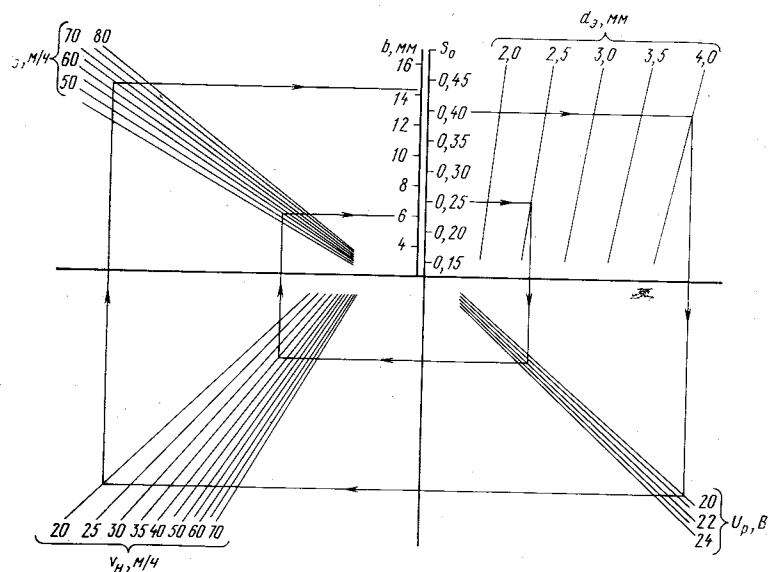


Рис. 9. Номограмма расчета ширины валика

ходимо стремиться к наибольшей глубине проплавления, увеличивая переход основного металла в наплавленный слой. В этом случае следует использовать электрод большого диаметра и повышенную скорость его подачи.

Установленные зависимости размеров валика от параметров процесса имеют большое практическое значение при выборе режимов вибродуговой наплавки, особенно при наплавке легированных и высоколегированных сталей на среднеуглеродистую конструкционную сталь. Сопоставление размеров валика, вычисленных по полученным моделям, с экспериментальными данными показало, что средняя ошибка в определении ширины валика не превышает 5%, высоты валика — 10%, а глубины проплавления — 15%. На режимах, входящих в область эксперимента, было наплавлено 10 образцов. При этом полученные результаты отличались от расчетных на величины, не превышающие указанных выше ошибок.

Форма наплавленного валика характеризуется коэффициентами формы валика  $\psi_b = \frac{b}{a}$  и формы проплавления  $\psi_n = \frac{b}{h}$ . Зависимости этих коэффициентов от основных параметров процесса вибродуговой наплавки были получены аналогично зависимостям для глубины проплавления, ширины и высоты валика:

$$\psi_b = 0,11712 \frac{d_s^{0,665} U_p^{0,906} v_s^{0,054} (0,5 + s_0)}{v_n^{0,041}}; \quad (109)$$

$$\psi_n = 4128,23 \frac{(0,66 + s_0)}{d_s^{1,291} v_s^{1,151} U_p^{0,181} v_n^{0,008}} \quad (110)$$

Полученные модели выражают характер и степень влияния основных факторов процесса на коэффициенты формы валика и формы проплавления. О степени влияния относительного смещения на величину  $\psi_v$  можно судить по следующим данным: при увеличении  $s_0$  в 2 раза (от 0,25 до 0,5) коэффициент  $\psi_v$  увеличивается в 1,33 раза. Нормальная форма поверхности шва обеспечивается при коэффициенте формы валика более 5. При меньшем коэффициенте не обеспечивается плавность перехода от металла шва к основному металлу [18]. Отсутствие плавного перехода от металла шва к основному металлу снижает прочность сварного соединения.

Необходимо отметить, что с ростом  $\psi_v$  уменьшается припуск на механическую обработку для получения чистой, без черноты, наплавленной поверхности. Коэффициент  $\psi_n$  влияет на стойкость металла шва против образования кристаллизационных трещин. Повышение коэффициента формы проплавления от 1,3 до 7,0 приводит к повышению стойкости металла шва против образования кристаллизационных трещин [18]. Требуемые величины  $\psi_v$  и  $\psi_n$  можно обеспечить, руководствуясь моделями (109) и (110) и соответствующим подбором значений основных факторов.

Состав валика определяется долями участия электродного и основного металла в металле валика. Доля участия основного металла в валике находится по выражению

$$\gamma_0 = \frac{F_n}{F_n + F_p},$$

где  $F_n$  — площадь проплавления, мм<sup>2</sup>;  $F_p$  — площадь наплавки, мм<sup>2</sup>.

Рост  $\gamma_0$  свидетельствует об увеличении доли основного металла в металле валика. Соотношение основного и электродного металлов в наплавленном валике зависит от режима наплавки. В результате проведенных нами исследований установлена зависимость  $\gamma_0$  от основных параметров процесса. Эта зависимость имеет вид

$$\gamma_0 = 19,78 \cdot 10^{-6} d_s^{1,344} v_s^{0,6856} U_p^{0,958} v_n^{0,112} (9,63 - s_0). \quad (111)$$

Модель (111) описывает характер и степень влияния основных факторов на величину  $\gamma_0$ . По зависимостям (106), (107) и (108) составлены номограммы для определения глубины проплавления, ширины и высоты валика. Номограмма для определения ширины валика представлена на рис. 9. Номограммы подобного типа для высоты валика и глубины проплавления приведены в работе [16]. Рассмотрим пример пользования номограммы. Режим выбран следующим:  $d_s = 2,5$  мм;  $v_s = 55$  м/ч;  $U_p = 22$  В;  $s_0 = 0,25$ ;  $v_n = 35$  м/ч. Используя номограмму, находим ширину валика. Для этого из точки, соответствующей  $s_0 = 0,25$ , проводим горизонтальную линию до пересечения с линией, соответствующей диаметру электрода 2,5 мм. Из точки пересечения проводим вертикальную линию до пересечения с линией, соответствующей  $U_p = 22$  В. Затем проводим горизонтальную линию до шкалы ширины валика; получается, что выбранному режиму соответствует ширина валика 6 мм. Аналогич-

ным образом, используя номограммы высоты валика и глубины проплавления, находим, что указанному выше режиму соответствует валик с высотой  $a = 2,1$  мм и глубиной проплавления  $h = 1$  мм.

Полученные модели использованы при наплавке шнеков экструзионных машин завода «Уралкабель». Шнеки представляют собой винты с крупным шагом и фасонным профилем, причем у одних шнеков нарезка имеет переменный по высоте профиль, а у других — переменный шаг. Шнеки характеризуются высокими требованиями к шероховатости поверхностей, высокой точностью и весьма малой жесткостью. Они очень сложны в изготовлении.

В процессе эксплуатации шнеки изнашиваются, в результате чего производительность машин существенно понижается. Для восстановления и упрочнения шнеков требовалось произвести наплавку винтовой части по вершинам гребней, образующим винтовую ленточку на длине порядка 2 м. В зависимости от типа шнека винтовая ленточка может иметь ширину от 4 до 14 мм. Для наплавки ленточек за один рабочий ход, что обеспечивало высокое качество и наибольшую производительность сравнительно с наплавкой в несколько проходов, требовалось найти режимы, обеспечивающие необходимую ширину валика при заданной толщине слоя наплавки. Поиск режимов осуществлялся с помощью моделей (106) и (107). Задача поиска режимов формулировалась следующим образом.

Для заданных значений  $U_p = 21$  В;  $s_0 = 0; 0,25; d_s = 2; 2,5; 3; 3,5; 4$  мм;  $v_s = 48; 52; 56; \dots; 92$  м/ч;  $b = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;$

$$14 \text{ мм; вычислить } v_n = \sqrt[0,447]{\frac{0,12415 d_s^{1,146} v_s^{0,524} U_p^{0,488} (1,97 + s_0)}{b}}.$$

Если  $v_n$  находится в пределах от 20 до 70 м/ч, то вычислить  $a$  по выражению (107). Таким образом, задача сводилась: 1) к поиску сочетаний  $v_s$  и  $v_n$ , обеспечивающих требуемое значение  $b$  при принятых  $d_s$ ,  $s_0$  и  $U_p$ ; 2) к вычислению высоты  $a$  валика при каждом сочетании значений факторов, установленных в 1-м пункте; 3) к выбору из числа найденных режима, обеспечивающего требуемую ширину  $b$  при заданной высоте  $a$  валика.

Задача решалась на ЭВМ «Наири-2» по блок-схеме, приведенной на рис. 10. Результат получился несколько неожиданным, а именно: например, при  $d_s = 2$  мм;  $s_0 = 0,25$ ;  $U_p = 21$  В;  $b = 4$  мм и  $v_s = 48; 52; 56; \dots; 92$  м/ч были вычислены  $v_n$  и  $a$ , при этом значения  $a$ , полученные при различных сочетаниях  $v_s$  и  $v_n$  мало отличались друг от друга. Указанное обстоятельство, по-видимому, объясняется тем, что в уравнениях (106) и (107) отношения  $\frac{v_s^{0,524}}{v_n^{0,447}}$  и  $\frac{v_s^{0,47}}{v_n^{0,406}}$  близки друг к другу. Следовательно, при  $b = \text{const}$

изменение  $v_s$  приводит к такому изменению  $v_n$ , при котором отношение  $\frac{v_s^{0,47}}{v_n^{0,406}}$  изменяется незначительно. Для проверки этого предпо-

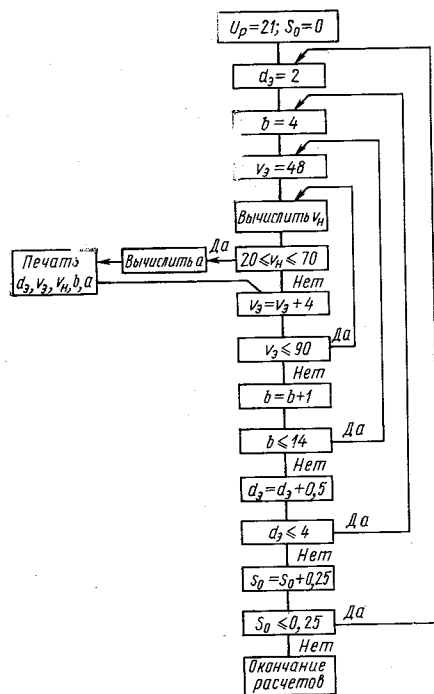


Рис. 10. Блок-схема расчета режимов, обеспечивающих требуемую ширину и заданную высоту валика

ложения были выполнены расчеты по схеме перебора всех значений  $v_3$  и  $v_n$ . В результате было установлено, что при  $b = \text{const}$  различные значения  $a$  целесообразнее получать, изменяя  $d_3$ ,  $s_0$ ,  $U_p$ . Данные расчетов по блок-схеме (см. рис. 10), например, для требуемой  $b = 6$  мм при заданной  $a = 2$  мм имеют значения  $v_3 = 56$  м/ч,  $v_n = 52,8$  м/ч ( $d_3 = 3$  мм,  $s_0 = 0,25$ ), а для  $b = 12$  мм при  $a = 4,5$  мм —  $v_3 = 84$  м/ч,  $v_n = 20,5$  м/ч ( $d_3 = 3,5$  мм,  $s_0 = 0$ ). Полученные результаты сведены в таблицу, которая в книге не приводится. Результаты подвергались проверке, показавшей хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными.

Найденные режимы использованы для наплавки шнеков экструзионных машин завода «Уралкабель». По данным завода, производительность машин с наплавленными шнеками повысилась на 15%, причем после годичной эксплуатации

заметного износа наплавленных поверхностей обнаружено не было.

Использование статистических методов планирования позволило получить ряд новых данных и сделать следующие выводы.

1. В результате исследований получены математические модели, характеризующие зависимости размеров и формы валика от пяти основных факторов процесса при наплавке сталей аустенитного класса на среднеуглеродистую конструкционную сталь.

2. Полученные зависимости могут быть использованы для расчета размеров валика по принятому режиму наплавки. Возможно также решение обратной задачи: по заданным размерам валика определять требуемый режим наплавки.

3. Построенные номограммы позволяют в производственных условиях определять размеры валика по выбранному режиму наплавки.

4. На примере наплавки шнеков показана эффективность использования моделей для определения режимов, обеспечивающих требуемые ширину и высоту валика.

5. Предложенная методика обеспечивает получение моделей процесса при использовании для наплавки других марок сталей.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ПРОЦЕССА

В большинстве случаев износ поверхностей деталей машин составляет десятые доли миллиметра. Наплавка в этих случаях слоев толщиной 2 мм и более приводит к увеличению расхода электродного металла и металла, переводимого в стружку, в результате чего возрастает стоимость наплавки и последующей механической обработки наплавленных деталей.

Толщина наплавленного слоя определяется сочетанием значений параметров процесса. Одну и ту же толщину  $a'$  наплавленного слоя (рис. 11) можно получить при различных сочетаниях значений параметров наплавки. Однако при этом остальные геометрические характеристики наплавленного слоя: припуск на механическую обработку  $z$ , глубина проплавления  $h$ , площадь наплавки и площадь проплавления — будут различными. Выбор режима, обеспечивающего заданную толщину наплавленного слоя при минимальном припуске на механическую обработку, позволит значительно сократить расход электродного металла и металла, переводимого в стружку. Следствием этого будет сокращение себестоимости наплавки, последующей механической обработки и числа станков, занятых на ремонтных работах. Основными параметрами наплавки, определяющими толщину наплавленного слоя, являются диаметр электрода, скорость его подачи, скорость наплавки, шаг наплавки, рабочее напряжение и величина смещения электрода. В данной работе были поставлены следующие задачи.

1. Получить модели, выражающие влияние основных параметров наплавки на толщину наплавленного слоя и величину припуска на обработку.

2. Установить режимы, обеспечивающие улучшение показателей экономичности наплавки и последующей механической обработки.

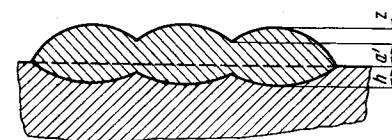
Эти задачи могут быть решены постановкой экстремального эксперимента. При планировании в качестве переменных факторов были приняты следующие:  $v_3$  — скорость подачи электрода, м/ч;  $v_n$  — скорость наплавки, м/ч;  $t$  — шаг наплавки, мм/об;  $U_p$  — рабочее напряжение, В;  $s_0 = \frac{H}{R}$  — относительное смещение электрода,

где  $R$  — радиус наплавливаемой поверхности;  $H$  — смещение электрода от зенита (осуществляли по схеме, изображенной на рис. 8).

В качестве параметра оптимизации был принят припуск на механическую обработку. Наплавку производили электродом диаметром 3,5 мм из стали 12X18H9T. Образцы диаметром 120 мм из стали 45 наплавливали с помощью головки ВГ-8М-УПИ и выпрямителя ВС-600. Условия наплавки характеризовались следующими величинами:

Рис. 11. Основные размеры наплавленного слоя:

$a'$  — толщина наплавленного слоя;  $z$  — припуск на механическую обработку;  $h$  — глубина проплавления



нами: дополнительная индуктивность цепи составляла 2,1 мГ, сопротивление сварочной цепи — 0,05 Ом; частота вибраций электрода — 50 Гц, амплитуда колебаний электрода — 1,7 мм, вылет электрода от торца горелки — 15 мм. Защитной средой являлся углекислый газ. Наплавка выполнялась при обратной полярности.

Таблица 38

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Интервалы варьирования	Уровни факторов		
		основной 0	верхний +1	нижний -1
$x_1$ — скорость подачи электродной проволоки, м/ч	8	56	64	48
$x_2$ — скорость наплавки, м/ч	6	34	40	28
$x_3$ — шаг наплавки, мм/об	1	6	7	5
$x_4$ — рабочее напряжение, В	1	21	22	20
$x_5$ — относительное смещение электрода от зенита	0,083	0,333	0,416	0,250

Таблица 39

Матрица планирования

Номер опыта	Факторы															$y_a$	$y_z$	
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_1x_4$	$x_1x_5$	$x_2x_3$	$x_2x_4$	$x_2x_5$	$x_3x_4$	$x_3x_5$			$x_4x_5$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,20	0,28
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,97	0,45
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,60	0,55
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,98	0,33
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,90	0,65
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,20	0,35
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,04	0,63
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,82	1,79
9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,31	0,42
10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,73	0,28
11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,9	0,36
12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,38	0,35
13	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,03	0,26
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,27	0,72
15	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,17	0,83
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1,55	0,41

На первом этапе исследования была реализована полуреплика  $2^{5-1}$  с определяющим контрастом  $1 = x_1x_2x_3x_4x_5$ . Основные уровни и интервалы варьирования факторов выбраны по результатам предварительных экспериментов. Интервалы варьирования и уровни факторов приведены в табл. 38. Из каждого цилиндрического наплавленного образца готовили по четыре макрошлифа, на которых измеряли толщины наплавленного слоя и припуски на обработку. Плоскость макрошлифа, в которой производили измерения, являлась продольной диаметральной плоскостью образца. Измере-

ния выполняли микроскопом УИМ-21 с точностью до 0,1 мм. На каждом макрошлифе  $a'$  и  $z$  определяли как средние значения из 12—16 измерений. Матрица планирования и результаты опытов представлены в табл. 39. В столбцах  $y_z$  и  $y_a$  таблицы соответственно приведены средние значения припуска  $z$  и толщины слоя  $a'$ . Опыты не дублировали. Дисперсии  $s^2\{y_z\}$  и  $s^2\{y_a\}$  определяли по шести параллельным опытам в центре плана, т. е. по результатам опытов, выполненных при нахождении факторов на основных уровнях. При числе степеней свободы  $f=5$  дисперсии оказались равными:  $s^2\{y_z\}=0,00578$ ;  $s^2\{y_a\}=0,01014$ .

Коэффициенты уравнения регрессии определяли по формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N}; \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{N}; \quad b_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{ij} y_j}{N}$$

Коэффициенты уравнения регрессии:

$$b_0 = 0,54125; \quad b_1 = 0,04375; \quad b_2 = 0,115; \quad b_3 = 0,16375; \\ b_4 = -0,0875; \quad b_5 = -0,17875; \quad b_{12} = 0,02; \quad b_{13} = 0,06875; \\ b_{14} = -0,0575; \quad b_{15} = -0,06375; \quad b_{23} = 0,095; \quad b_{24} = 0,08125; \\ b_{25} = -0,045; \quad b_{34} = -0,0625; \quad b_{35} = -0,11375; \quad b_{45} = 0,0525.$$

Средняя квадратичная ошибка в определении коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$  оказалась следующей:

$$s\{b_i\} = + \sqrt{\frac{s^2\{y_z\}}{N}} = 0,019.$$

Доверительный интервал коэффициентов уравнения регрессии определяли по формуле

$$\Delta b_i = \pm t s\{b_i\}.$$

Табличное значение критерия  $t$  при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы, с которым определялась дисперсия параметра оптимизации,  $f=5$ , равно 2,57. Следовательно,  $\Delta b_i = \pm 2,57 \times 0,019 = \pm 0,04883$ .

Коэффициенты  $b_1, b_{12}, b_{25}$  по абсолютной величине меньше доверительного интервала, поэтому их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. Уравнение регрессии для  $y_z$  приняло вид

$$y_z = 0,54125 + 0,115x_2 + 0,16375x_3 - 0,0875x_4 - 0,17875x_5 + \\ + 0,06875x_1x_3 - 0,0575x_1x_4 - 0,06375x_1x_5 + 0,095x_2x_3 - \\ - 0,08125x_2x_4 - 0,0625x_3x_4 - 0,11375x_3x_5 + 0,0525x_4x_5.$$

Значимость коэффициентов при парных взаимодействиях  $b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{23}, b_{24}, b_{34}, b_{35}, b_{45}$  свидетельствует о неадекватности линейной модели. Коэффициент  $b_0$  является совместной оценкой свободного члена  $\beta_0$  уравнения регрессии и суммы коэффициентов  $\beta_{\beta_{ii}}$  при квадратичных членах. Оценкой суммы  $\sum \beta_{ii}$  служит разность меж-

ду  $b_0$  и значением  $y$  в центре плана. Если эта разность превосходит ошибку опыта, то гипотеза значимости коэффициентов при квадратичных членах принимается. В нашем случае значение параметра оптимизации  $y_{20}$ , полученное в результате проведения опыта в центре плана, равно 0,25.

Разность  $b_0 - y_{20} = 0,29125$  в несколько раз больше ошибки опыта  $s\{y_z\} = +\sqrt{s^2\{y_z\}} = 0,076$ .

Следовательно, коэффициенты при квадратичных членах значимо отличаются от нуля, поэтому исследуемая зависимость не может быть с достаточной точностью аппроксимирована полиномом первой степени.

В результате математической обработки данных эксперимента получили следующие значения коэффициентов уравнения регрессии для  $y_a$ :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1,940625; & b_1 &= 0,171875; & b_2 &= -0,385625; & b_3 &= -0,318125; \\ b_4 &= 0,101875; & b_5 &= 0,013125; & b_{12} &= -0,044375; & b_{13} &= -0,084375; \\ b_{14} &= 0,018125; & b_{15} &= -0,010625; & b_{23} &= -0,091875; & b_{24} &= 0,093125; \\ b_{25} &= 0,049375; & b_{34} &= 0,030625; & b_{35} &= 0,069375; & b_{45} &= -0,003125. \end{aligned}$$

Средняя квадратичная ошибка в определении коэффициентов оказалась следующей:

$$s\{b_i\} = +\sqrt{\frac{s^2\{y_a\}}{N}} = 0,025159.$$

Доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии

$$\Delta b_i = \pm ts\{b_i\} = \pm 2,57 \cdot 0,025159 = \pm 0,064658.$$

Коэффициенты  $b_5, b_{12}, b_{14}, b_{15}, b_{25}, b_{34}, b_{45}$  по абсолютной величине меньше доверительного интервала, поэтому их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. В результате уравнение регрессии для  $y_a$  приняло вид

$$\begin{aligned} y_a &= 1,940625 + 0,171875x_1 - 0,385625x_2 - 0,318125x_3 + \\ &+ 0,101875x_4 - 0,084375x_1x_3 - 0,091875x_2x_3 + \\ &+ 0,093125x_2x_4 + 0,069375x_3x_5. \end{aligned}$$

Значимость коэффициентов при парных взаимодействиях  $b_{13}, b_{23}$  и  $b_{24}, b_{35}$  указывает на неадекватность линейной модели. Проверка гипотезы о значимости квадратичных эффектов показала, что коэффициенты при квадратичных членах значимо отличаются от нуля. Значимость коэффициентов при квадратичных членах в уравнениях регрессии для  $y_z$  и  $y_a$  указывает на необходимость аппроксимации функций откликов полиномами второго порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_{ik} x_i x_k + \sum_{1 < i < k} b_{ii} x_i^2.$$

С этой целью поставили эксперимент по программе центрального композиционного ротатабельного плана второго порядка. Величина «звездного» плеча  $\alpha$  в этом случае равна 2. Реализованные 16 опытов были дополнены 10 опытами в «звездных» точках (табл. 40, опыты 17—26) и шестью опытами в центре плана (табл. 40, опыты 27—32).

Коэффициенты приведенного выше полинома вычисляли, используя формулы (77), (78), (79) и (80). При числе факторов  $k=5$  и ядре плана, представленного полуреplikой  $2^{5-1}$  ( $1 = x_1x_2x_3x_4x_5$ ), эти формулы приняли вид

$$b_0 = 0,166671 \sum_{j=1}^{32} y_j - 0,036112 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{32} x_{ij}^2 y_j; \quad (112)$$

$$b_i = 0,041667 \sum_{j=1}^{32} x_{ij} y_j; \quad (113)$$

$$b_{ii} = 0,063195 \sum_{j=1}^{32} x_{ij} x_{ij} y_j; \quad (114)$$

$$b_{ii} = 0,031598 \sum_{j=1}^{32} x_{ij}^2 y_j + 0,003310 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{32} x_{ij}^2 y_j - 0,036112 \sum_{j=1}^{32} y_j. \quad (115)$$

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии находили, используя формулы (81), (82), (83) и (84). Для нашего случая указанные формулы получили вид

$$s^2\{b_0\} = 0,166671 s_y^2; \quad (116)$$

$$s^2\{b_i\} = 0,041667 s_y^2; \quad (117)$$

$$s^2\{b_{ii}\} = 0,063195 s_y^2; \quad (118)$$

$$s^2\{b_{ii}\} = 0,034908 s_y^2. \quad (119)$$

Находим коэффициенты уравнения регрессии для припуска на механическую обработку. С этой целью определяем суммы, входящие в формулы (112), (113), (114) и (115):

$$\sum_{j=1}^{32} y_j = 15,36; \quad \sum_{j=1}^{32} x_{1j}^2 y_j = 13,18;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{2j}^2 y_j = 12,58; \quad \sum_{j=1}^{32} x_{3j}^2 y_j = 13,90;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{4j}^2 y_j = 12,06; \quad \sum_{j=1}^{32} x_{5j}^2 y_j = 12,34;$$

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{32} x_{ij}^2 y_j = 64,06; \quad \sum_{j=1}^{32} x_{1j} y_j = 0,2;$$

Условия дополнительных опытов

Дополнительные опыты	Номер опыта	$y_z$										$y_a$									
		17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32				
Опыты в «звездных» точках с плечом $a=2$	$y_z$	0,44	0,69	0,60	0,38	0,96	0,35	0,27	0,58	0,33	0,59	0,19	0,18	0,33	0,27	0,19	0,35				
	$y_a$	2,53	1,12	1,50	2,68	1,23	2,90	2,18	1,90	1,74	2,17	2,35	2,37	2,23	2,26	2,38	2,24				
	$\frac{y_z}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_a}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_z^2}{c_x}$	0	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_a^2}{c_x}$	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_z^3}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_a^3}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_z^4}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	$\frac{y_a^4}{c_x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
Опыты в нулевой точке (в центре плана)	$y_z$																				
	$y_a$																				
	$\frac{y_z}{c_x}$																				
	$\frac{y_a}{c_x}$																				
	$\frac{y_z^2}{c_x}$																				
	$\frac{y_a^2}{c_x}$																				
	$\frac{y_z^3}{c_x}$																				
	$\frac{y_a^3}{c_x}$																				
	$\frac{y_z^4}{c_x}$																				
	$\frac{y_a^4}{c_x}$																				

$$\sum_{j=1}^{32} x_{2j} y_j = 2,28;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{4j} y_j = -2,02;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{1j} x_{2j} y_j = 0,32;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{1j} x_{4j} y_j = -0,92;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{2j} x_{3j} y_j = 1,52;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{2j} x_{5j} y_j = -0,72;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{3j} x_{5j} y_j = -1,82;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{3j} y_j = 3,84;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{5j} y_j = -3,38;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{1j} x_{3j} y_j = 1,1;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{1j} x_{5j} y_j = -1,02;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{2j} x_{4j} y_j = -1,3;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{3j} x_{4j} y_j = -1,0;$$

$$\sum_{j=1}^{32} x_{4j} x_{5j} y_j = 0,84.$$

Подставляя полученные суммы в формулы (112), (113), (114) и (115), находим значения коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$ :

$$b_0 = 0,166671 \cdot 15,36 - 0,036112 \cdot 64,06 = 0,246732;$$

$$b_1 = 0,41667 \cdot 0,2 = 0,008333; \quad b_2 = 0,041667 \cdot 2,28 = 0,095001;$$

$$b_3 = 0,041667 \cdot 3,84 = 0,160001; \quad b_4 = 0,041667 (-2,02) = -0,084167;$$

$$b_5 = 0,041667 (-3,38) = -0,140834; \quad b_{12} = 0,063195 \cdot 0,32 = 0,020222;$$

$$b_{13} = 0,063195 \cdot 1,1 = 0,069515; \quad b_{14} = 0,063195 (-0,92) = -0,058139;$$

$$b_{15} = 0,063195 (-1,02) = -0,064459; \quad b_{23} = 0,063195 \cdot 1,52 = 0,096056;$$

$$b_{24} = 0,063195 (-1,3) = -0,082154; \quad b_{25} = 0,063195 (-0,72) = -0,0455;$$

$$b_{34} = 0,063195 (-1,0) = -0,063195;$$

$$b_{35} = 0,063195 (-1,82) = -0,115015;$$

$$b_{45} = 0,063195 \cdot 0,84 = 0,053084;$$

$$b_{11} = 0,031598 \cdot 13,18 + 0,00331 \cdot 64,06 - 0,036112 \cdot 15,36 = 0,073821;$$

$$b_{22} = 0,031598 \cdot 12,58 + 0,00331 \cdot 64,06 - 0,036112 \cdot 15,36 = 0,054862;$$

$$b_{33} = 0,031598 \cdot 13,90 + 0,00331 \cdot 64,06 - 0,036112 \cdot 15,36 = 0,096571;$$

$$b_{44} = 0,031598 \cdot 12,06 + 0,00331 \cdot 64,06 - 0,036112 \cdot 15,36 = 0,038431;$$

$$b_{55} = 0,031598 \cdot 12,34 + 0,00331 \cdot 64,06 - 0,036112 \cdot 15,36 = 0,047278.$$

Дисперсию  $s^2\{y_z\}$  параметра оптимизации определяли по результатам опытов в центре плана (табл. 40, 41):

Таблица 41

Вспомогательная таблица для расчета дисперсии  $s^2\{y_z\}$ 

Номер опыта	$y_{zu}$	$\bar{y}_z$	$y_{zu} - \bar{y}_z$	$(y_{zu} - \bar{y}_z)^2$
27	0,19	$\frac{\sum_{u=1}^6 y_{zu}}{6} \approx 0,25$	-0,06	0,0036
28	0,18		-0,07	0,0049
29	0,33		0,08	0,0064
30	0,27		0,02	0,0004
31	0,19		-0,06	0,0036
32	0,35		0,1	0,01
$\sum_{u=1}^6 y_{zu} = 1,51$				$s_E = \sum_{u=1}^6 (y_{zu} - \bar{y}_z)^2 = 0,0289$

$$s^2\{y_z\} = \frac{\sum_{u=1}^6 (y_{zu} - \bar{y}_z)^2}{n_0 - 1} = 0,00578,$$

где  $n_0 = 6$  — число опытов в центре плана.Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$  определяем по формулам (116), (117), (118), (119):

$$\begin{aligned} s^2\{b_0\} &= 0,166671 & s^2\{y_z\} &= 0,000963; \\ s^2\{b_i\} &= 0,041667 & s^2\{y_z\} &= 0,00024; \\ s^2\{b_{ii}\} &= 0,063195 & s^2\{y_z\} &= 0,000365; \\ s^2\{b_{ii}\} &= 0,034908 & s^2\{y_z\} &= 0,000201. \end{aligned}$$

Средние квадратичные ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$  соответственно равны

$$\begin{aligned} s\{b_0\} &= 0,031032; & s\{b_i\} &= 0,015491; & s\{b_{ii}\} &= 0,019104; \\ & & s\{b_{ii}\} &= 0,014177. \end{aligned}$$

Определяем доверительные интервалы для коэффициентов:

$$\Delta b_0 = \pm ts\{b_0\} = \pm 2,57 \cdot 0,031032 = \pm 0,079752;$$

$$\Delta b_i = \pm ts\{b_i\} = \pm 0,039811;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm ts\{b_{ii}\} = \pm 0,049097; \quad \Delta b_{ii} = \pm ts\{b_{ii}\} = \pm 0,036434.$$

Так как коэффициенты  $b_1, b_{12}, b_{25}$  по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. Тогда уравнение регрессии, полученное в результате ротатабельного планирования второго порядка, примет вид

$$y_z = 0,246732 + 0,095001x_2 + 0,160001x_3 - 0,084167x_4 - 0,140834x_5 + 0,069515x_1x_3 - 0,058139x_1x_4 - 0,064459x_1x_5 + 0,096056x_2x_3 -$$

$$-0,082154x_2x_4 - 0,063195x_3x_4 - 0,115015x_3x_5 + 0,053084x_4x_5 + 0,073821x_1^2 + 0,054862x_2^2 + 0,096571x_3^2 + 0,038431x_4^2 + 0,047278x_5^2.$$

(120)

Адекватность полученной модели проверяем с помощью F-критерия:

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2},$$

где  $s_{ад}^2$  — дисперсия адекватности;  $s_y^2$  — дисперсия параметра оптимизации.Для определения  $s_{ад}^2$  вычисляем сумму  $s_R$  квадратов отклонений расчетных  $\hat{y}_{zj}$  значений функции отклика от экспериментальных  $y_{zj}$  во всех точках плана (табл. 42,  $s_R = 0,2342$ ).Сумма  $s_E$  (см. табл. 41), использованная для определения дисперсии  $s^2\{y_z\}$  по результатам опытов в центре плана, равна 0,0289.

Дисперсию адекватности определяем по выражению

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R - s_E}{f}.$$

Здесь число степеней свободы  $f = N - k' - (n_0 - 1)$ , где  $k'$  — число статистически значимых коэффициентов модели, т. е. уравнения (120), равное 18;  $N$  — общее число опытов, равное 32;  $n_0$  — число опытов в центре плана, равное 6.Таким образом,  $f = 9$  и  $s_{ад}^2 = 0,022811$ .Для рассматриваемого случая, при котором за  $s_y^2$  принимается  $s^2\{y_z\} = 0,00578$ , значение критерия  $F_p = 3,94$ . Табличное значение  $F_T$  — критерия при 5%-ном уровне значимости, числе степеней свободы для числителя 9 и для знаменателя 5 равно 4,85. Значение  $F_p < F_T$ , поэтому полученную модель можно считать адекватной.Переход от кодированных  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  к натуральным  $(v_3, v_4, t, U_p, s_0)$  значениям факторов осуществляется в соответствии с условиями эксперимента (см. табл. 38) по формулам

$$x_1 = \frac{v_3 - 56}{8}; \quad x_2 = \frac{v_4 - 34}{6}; \quad x_3 = \frac{t - 6}{1};$$

$$x_4 = \frac{U_p - 21}{1}; \quad x_5 = \frac{s_0 - 0,333}{0,083}.$$

Путем аналогичной математической обработки экспериментальных данных были получены значения коэффициентов уравнения регрессии для толщины  $y_a$  наплавленного слоя:

$$\begin{aligned} b_0 &= 2,320488; & b_1 &= 0,232085; & b_2 &= -0,35542; & b_3 &= -0,351253; \\ b_4 &= 0,091251; & b_5 &= -0,027084; & b_{12} &= -0,044868; & b_{13} &= -0,085313; \\ b_{14} &= 0,018327; & b_{15} &= -0,010743; & b_{23} &= -0,092897; & b_{24} &= 0,094161; \\ b_{25} &= 0,049924; & b_{34} &= 0,030966; & b_{35} &= 0,070146; & b_{45} &= -0,00316; \end{aligned}$$



Таблица 42

Вспомогательная таблица для вычисления  $S_R$ 

Номер опыта	$\hat{y}_{zj}$	$y_{zj}$	$\hat{y}_{zj} - y_{zj}$	$(\hat{y}_{zj} - y_{zj})^2$
1	0,33	0,28	0,05	0,0025
2	0,47	0,45	0,02	0,0004
3	0,52	0,55	-0,03	0,0009
4	0,34	0,33	0,01	0,0001
5	0,71	0,65	0,06	0,0036
6	0,35	0,35	0,00	0,0000
7	0,77	0,63	0,14	0,0196
8	1,64	1,79	-0,15	0,0225
9	0,50	0,42	0,08	0,0064
10	0,29	0,28	0,01	0,0001
11	0,51	0,36	0,17	0,0289
12	0,20	0,35	-0,15	0,0225
13	0,31	0,26	0,05	0,0025
14	0,74	0,72	0,02	0,0004
15	0,81	0,83	-0,02	0,0004
16	0,42	0,41	0,01	0,0001
17	0,54	0,44	0,10	0,0100
18	0,54	0,69	-0,15	0,0225
19	0,65	0,60	0,05	0,0025
20	0,28	0,38	-0,10	0,0100
21	0,95	0,96	-0,01	0,0001
22	0,31	0,35	-0,04	0,0016
23	0,23	0,27	-0,04	0,0016
24	0,57	0,58	-0,01	0,0001
25	0,15	0,33	-0,18	0,0324
26	0,72	0,59	0,13	0,0169
27	0,25	0,19	0,06	0,0036
28	0,25	0,18	0,07	0,0049
29	0,25	0,33	-0,08	0,0064
30	0,25	0,27	-0,02	0,0004
31	0,25	0,19	0,06	0,0036
32	0,25	0,35	-0,10	0,0100
				$s_R = \sum_{j=1}^{32} (\hat{y}_{zj} - y_{zj})^2 =$ $= 0,2342$

$$b_{11} = -0,121398; \quad b_{22} = -0,054411; \quad b_{33} = -0,06073;$$

$$b_{44} = -0,06705; \quad b_{55} = -0,088536.$$

Дисперсию  $s^2\{y_a\}$  определяли по результатам шести опытов в центре плана:  $s^2\{y_a\} = 0,01014$ . Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии для  $y_a$ ,

$$s^2\{b_0\} = 0,00169; \quad s^2\{b_i\} = 0,000422; \quad s^2\{b_{ii}\} = 0,00064;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = 0,000353.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов получили следующие значения:

$$\Delta b_0 = \pm 0,10565; \quad \Delta b_i = \pm 0,052792; \quad \Delta b_{ii} = \pm 0,065015;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm 0,048285.$$

Коэффициенты  $b_5, b_{12}, b_{14}, b_{15}, b_{25}, b_{34}, b_{45}$  по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, поэтому их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии для  $y_a$ . Уравнение регрессии для  $y_a$  примет вид

$$y_a = 2,320488 + 0,232085x_1 - 0,35542x_2 - 0,351253x_3 + 0,091251x_4 - \\ - 0,085313x_1x_3 - 0,092897x_2x_3 + 0,094161x_2x_4 + 0,070146x_3x_5 - \\ - 0,121398x_1^2 - 0,054411x_2^2 - 0,06073x_3^2 - 0,06705x_4^2 - 0,088536x_5^2.$$

(121)

Дисперсия, необходимая для проверки адекватности модели (121), получена по изложенной выше методике:  $s_{ал}^2 = 0,035946$ .

Проверка гипотезы адекватности модели (121) показала, что модель адекватна при 5%-ном уровне значимости:

$$F_p = \frac{s_{ал}^2}{s^2\{y_a\}} = 3,54 < F_T = 4,7.$$

Если функция  $y_z$  отклика имеет минимум, то с помощью уравнения (120) можно установить условия процесса, обеспечивающие получение минимального припуска на механическую обработку наплавленной поверхности. В этом случае сочетание определенных значений факторов будет обеспечивать минимум припуска. Сочетанию этих значений будет соответствовать определенное значение толщины слоя, которое во многих случаях может оказаться нерациональным или неприемлемым, а именно: толщина слоя при минимальном припуске может оказаться значительно больше или, наоборот, меньше, чем это требуется для наплавки заданной поверхности детали. Из уравнения (121) следует, что одна и та же толщина наплавленного слоя может быть получена при различных значениях факторов. Наплавки, выполненные при различных значениях факторов и имеющие одинаковую толщину слоя, будут иметь неодинаковый припуск на обработку.

Таким образом, задача, имеющая важное значение для практики, будет состоять в установлении условий процесса, обеспечивающих наименьший припуск при заданной толщине слоя наплавки. Решению этой задачи, заключающейся в нахождении условного минимума функции  $y_z$  при ограничениях, наложенных функцией  $y_a$ , и посвящены дальнейшие исследования. Решать указанную задачу можно двумя способами: аналитическим и графоаналитическим. При аналитическом решении можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Графоаналитический способ решения основан на рассмотрении двухмерных сечений поверхности от-

клика  $y_z$ , совмещенных с двумерными сечениями поверхности отклика  $y_a$ , и выборе условных экстремумов.

Двумерные сечения поверхности отклика получают следующим образом. В уравнение регрессии подставляют предположительно близкие к оптимальным значения всех факторов, кроме двух. В результате приходят к уравнению регрессии, выражающему зависимость параметра оптимизации от двух факторов. Устанавливая в указанном уравнении для параметра оптимизации определенное значение, получают зависимость между двумя факторами. Эту зависимость можно представить на плоскости кривой линией. Такая линия называется контурной или линией равного отклика, так как любая точка ее отвечает одному и тому же значению параметра оптимизации. Задавая различные значения параметру оптимизации, можно построить семейство таких линий, дающих наглядное представление о влиянии двух факторов на параметр оптимизации. Аналогично можно построить двумерные сечения для каждой пары из числа исследуемых факторов.

На практике требуемую толщину наплавленного слоя устанавливают подбором значений диаметра электрода, скорости наплавки, скорости подачи электрода и шага наплавки. При установлении требуемой толщины слоя, как правило, к изменению рабочего напряжения и относительного смещения электрода не прибегают. Поэтому анализ полученных зависимостей с помощью двумерных сечений проводили при постоянных значениях рабочего напряжения и относительного смещения.

Рассмотрим построение контурных кривых или, что одно и то же, кривых, образующихся в результате сечений поверхности отклика  $y_z$  плоскостями, параллельными (для нашего случая) плоскости системы координат  $x_1-x_2$ . Построение контурных линий производим для случая  $x_3=1$  ( $t=7$  мм);  $x_4=1$  ( $U_p=22$  В);  $x_5=1$  ( $s_0=0,416$ ).

Подставив в уравнение (120) значения  $x_3=1$ ;  $x_4=1$ ;  $x_5=1$ , получаем для  $y_z$  следующее выражение:

$$y_z = 0,238886 - 0,053083x_1 + 0,108903x_2 + 0,073821x_1^2 + 0,054862x_2^2 \quad (122)$$

Дифференцируя это уравнение по  $x_1$  и  $x_2$  и приравнявая частные производные нулю, получаем уравнения, решая которые, находим координаты  $x_{1s}$  и  $x_{2s}$  центра фигуры, образованной поверхностью отклика:

$$\frac{\partial y_z}{\partial x_1} = -0,053083 + 2 \cdot 0,073821x_1 = 0;$$

$$\frac{\partial y_z}{\partial x_2} = 0,108903 + 2 \cdot 0,054862x_2 = 0;$$

$$x_{1s} = 0,359538; \quad x_{2s} = -0,992517.$$

Подставляя в уравнение (122) вместо  $x_1$  и  $x_2$  координаты  $x_{1s}$  и

$x_{2s}$  центра, получаем значение параметра оптимизации  $Y_s^z$  в центре фигуры:

$$Y_s^z = 0,238886 - 0,053083 \cdot 0,359538 + 0,108903 (-0,992517) + 0,073821 (0,359538)^2 + 0,054862 (-0,992517)^2 = 0,175298.$$

Переносим начало системы координат  $x_1-x_2$  в центр  $s^z$  фигуры. При параллельном переносе системы координат в центр фигуры в исходном уравнении исчезают члены, содержащие линейные эффекты, и изменяется свободный член. В новой системе координат свободный член уравнения равен значению параметра оптимизации  $Y_s^z$  в центре фигуры. Коэффициенты квадратичных членов не изменятся при параллельном переносе системы координат. Таким образом, исходное для нашего случая уравнение (122) в новой системе координат примет вид

$$Y_z - 0,175298 = 0,073821X_1^2 + 0,054862X_2^2. \quad (123)$$

Задавшись значением припуска  $Y_z$ , подставляем его в уравнение (123), в результате чего получаем уравнение контурной кривой. По этому уравнению строим контурную кривую. Задавшись следующим значением припуска, получаем уравнение следующей контурной кривой и т. д. Результаты расчетов, относящихся к построению контурных кривых, приведены в табл. 43. Например, заданное значение припуска 0,2 мм. Подставляя  $Y_z=0,2$  мм в уравнение (123), получаем

$$0,024702 = 0,073821X_1^2 + 0,054862X_2^2.$$

Или

$$\frac{X_1^2}{0,33462} + \frac{X_2^2}{0,450257} = 1. \quad (124)$$

Уравнение (124) — уравнение эллипса в каноническом виде. Значения полуосей  $a$  и  $b$  эллипса в табл. 43 выражены в кодированных величинах факторов  $x_1$  и  $x_2$ .

По уравнению (124) построена контурная кривая 1 (рис. 12). Последовательно задаваясь значениями припуска 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7, аналогично получили уравнения, по которым построены

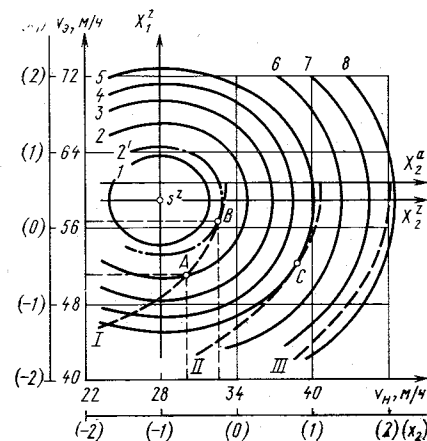


Рис. 12. Сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при  $x_3=1$  ( $t=7$  мм);  $x_4=1$  ( $U_p=22$  В);  $x_5=1$  ( $s_0=0,416$ );

I, II, III — толщина наплавленного слоя соответственно 2,0; 1,5; 1,0 мм; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 — припуск на механическую обработку соответственно 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 мм;  $a_0=3,5$  мм

контурные кривые, соответственно обозначенные на рис. 12 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Контурные кривые поверхности отклика, характеризующей толщину наплавленного слоя, построены по аналогичной методике. На рис. 12 контурные кривые для толщины слоя 2; 1,5; 1 мм обозначены соответственно I, II, III.

Таблица 43

Данные для построения контурных кривых поверхности отклика  $y_z$  при  $x_3=1$ ;  $x_4=1$ ;  $x_5=1$

Припуск на сторону $y_z$ , мм	Каноническое уравнение эллипса	Величины полуосей эллипса	
		$a$	$b$
0,20	$\frac{X_1^2}{0,33462} + \frac{X_2^2}{0,450257} = 1$	0,578463	0,671011
0,25	$\frac{X_1^2}{1,011934} + \frac{X_2^2}{1,361634} = 1$	1,005949	1,16689
0,30	$\frac{X_1^2}{1,689248} + \frac{X_2^2}{2,273012} = 1$	1,29971	1,507651
0,35	$\frac{X_1^2}{2,366562} + \frac{X_2^2}{3,184389} = 1$	1,538363	1,784485
0,40	$\frac{X_1^2}{3,043876} + \frac{X_2^2}{4,095767} = 1$	1,744670	2,023800
0,50	$\frac{X_1^2}{4,398504} + \frac{X_2^2}{5,918522} = 1$	2,097261	2,432801
0,60	$\frac{X_1^2}{5,753132} + \frac{X_2^2}{7,741278} = 1$	2,398568	2,782315
0,70	$\frac{X_1^2}{7,10776} + \frac{X_2^2}{9,564033} = 1$	2,666038	3,092577

Таким же способом были построены двумерные сечения поверхности отклика для  $y_z$  и поверхности отклика для  $y_a$  при других уровнях факторов  $x_3, x_4, x_5$ .

С помощью совмещенных сечений поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  можно назначать режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку наплавленной поверхности. Так, например, режим, обеспечивающий толщину слоя 2 мм и минимальный припуск на обработку при  $t=7$  мм,  $U_p=22$  В,  $s_0=0,416$ ,  $d_s=3,5$  мм, легко определяется по кривым на рис. 12. Кривая 1 соответствует толщине слоя 2 мм, она пересекает кривые 2, 3, 4 и 5, которые соответственно отвечают значениям припуска 0,25; 0,30; 0,35; 0,4 мм. Из перечисленных кривых наименьшему значению припуска отвечает кривая 2, поэтому координаты точки

A пересечения кривых 1 и 2 будут определять режим, обеспечивающий заданную толщину слоя 2 мм при минимальном припуске на обработку, равном 0,25 мм. Координатами точки A являются скорость подачи электрода 51 м/ч и скорость наплавки 30 м/ч. Если построить кривую равного отклика  $Y_z=0,22$  (рис. 12, кривая 2'), то эта кривая встретится с кривой 1 в точке B. Координаты точки B соответствуют  $v_a=56,5$  м/ч и  $v_n=32,5$  м/ч. При этом режиме будет обеспечена заданная толщина слоя 2 мм и минимальный припуск на обработку, равный 0,22 мм. Если заданная толщина слоя равна 1,5 мм, то режим, обеспечивающий получение этой толщины при минимальном припуске на обработку, будет определяться координатами точки C.

Таблица 44

Интервалы варьирования и уровни факторов

Факторы	Интервалы варьирования	Уровни факторов		
		верхний +1	основной 0	нижний -1
$x_1$ — скорость подачи электродной проволоки, м/ч	8	64	56	48
$x_2$ — скорость наплавки, м/ч	6	40	34	28
$x_3$ — шаг наплавки, мм/об	1	8	7	6
$x_4$ — рабочее напряжение, В	1	22	21	20
$x_5$ — относительное смещение электрода от зенита	0,083	0,416	0,333	0,250

Аналогичные исследования для определения режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя при минимальном припуске на механическую обработку, проводились с проволокой диаметром 4,0 мм из стали 12X18H9T.

В этих исследованиях были приняты интервалы варьирования и уровни факторов, указанные в табл. 44. При наплавках все остальные параметры процесса оставались теми же, что и при исследованиях с проволокой диаметром 3,5 мм. Матрица планирования и результаты опытов по наплавке проволокой диаметром 4,0 мм представлены в табл. 45. В этой таблице через  $y_a$  обозначена толщина наплавленного слоя, а через  $y_z$  — припуск на сторону для механической обработки наплавленной поверхности. Путем математической обработки результатов опытов, приведенных в табл. 45, получены следующие значения коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$ :

$$b_0=0,440294; b_1=0,051667; b_2=0,129168; b_3=0,329169;$$

$$b_4=-0,050834; b_5=-0,211668; b_{12}=0,012639; b_{13}=0,011375;$$

$$b_{14}=0,020222; b_{15}=-0,046764; b_{23}=0,035389; b_{24}=-0,049292;$$

$$b_{25}=-0,027806; b_{34}=-0,030334; b_{35}=-0,142821;$$

$$b_{45}=0,078362; b_{11}=0,126487; b_{22}=0,022848;$$

$$b_{33}=0,23392; b_{44}=0,035485; b_{55}=0,005151.$$

## Матрица планирования

Содержание плана	Номер опыта	$y_a$					$y_z$									
		$c_{1x}$	$c_{2x}$	$c_{3x}$	$c_{4x}$	$c_{5x}$	$c_{1z}$	$c_{2z}$	$c_{3z}$	$c_{4z}$	$c_{5z}$					
Ядро плана — полуреплика $2^{5-1}$ ( $1=x_1x_2x_3x_4x_5$ )	1	+	+	+	+	+	0,2	2,38	+	+	+	+	+	+	+	+
	2	+	+	+	+	+	0,54	3,44	+	+	+	+	+	+	+	+
	3	+	+	+	+	+	0,96	1,62	+	+	+	+	+	+	+	+
	4	+	+	+	+	+	0,42	2,06	+	+	+	+	+	+	+	+
	5	+	+	+	+	+	1,43	1,30	+	+	+	+	+	+	+	+
	6	+	+	+	+	+	0,43	2,25	+	+	+	+	+	+	+	+
	7	+	+	+	+	+	1,02	1,02	+	+	+	+	+	+	+	+
	8	+	+	+	+	+	2,13	0,93	+	+	+	+	+	+	+	+
	9	+	+	+	+	+	0,42	2,38	+	+	+	+	+	+	+	+
	10	+	+	+	+	+	0,33	2,6	+	+	+	+	+	+	+	+
	11	+	+	+	+	+	0,55	1,55	+	+	+	+	+	+	+	+
	12	+	+	+	+	+	0,82	2,02	+	+	+	+	+	+	+	+
	13	+	+	+	+	+	0,64	1,84	+	+	+	+	+	+	+	+
	14	+	+	+	+	+	1,36	2,00	+	+	+	+	+	+	+	+
	15	+	+	+	+	+	1,60	0,80	+	+	+	+	+	+	+	+
	16	+	+	+	+	+	0,93	1,30	+	+	+	+	+	+	+	+
Опыты в «звездных» точках с плечом $\alpha=2$	17	+	+	+	+	+	2,0	1,1	0	0	0	0	0	0	0	0
	18	+	+	+	+	+	1,52	0,55	0	0	0	0	0	0	0	0
	19	+	+	+	+	+	1,48	0,42	0	0	0	0	0	0	0	0
	20	+	+	+	+	+	2,32	0,41	0	0	0	0	0	0	0	0
	21	+	+	+	+	+	0,7	1,9	0	0	0	0	0	0	0	0
	22	+	+	+	+	+	2,28	0,60	0	0	0	0	0	0	0	0
	23	+	+	+	+	+	1,80	0,28	0	0	0	0	0	0	0	0
	24	+	+	+	+	+	1,50	0,65	0	0	0	0	0	0	0	0
	25	+	+	+	+	+	1,62	0,26	0	0	0	0	0	0	0	0
	26	+	+	+	+	+	2,22	0,43	0	0	0	0	0	0	0	0
Опыты в нулевой точке	27	0	0	0	0	0	2,07	0,32	0	0	0	0	0	0	0	0
	28	0	0	0	0	0	2,10	0,31	0	0	0	0	0	0	0	0
	29	0	0	0	0	0	2,10	0,32	0	0	0	0	0	0	0	0
	30	0	0	0	0	0	1,76	0,60	0	0	0	0	0	0	0	0
	31	0	0	0	0	0	1,80	0,55	0	0	0	0	0	0	0	0
	32	0	0	0	0	0	1,83	0,42	0	0	0	0	0	0	0	0

Для вычисленной по результатам опытов в центре плана дисперсии параметра оптимизации получено значение  $s^2\{y_z\}=0,01628$ . Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии, оказались равными соответственно:

$$s^2\{b_0\}=0,002713; \quad s^2\{b_{ii}\}=0,001028;$$

$$s^2\{b_i\}=0,000678; \quad s^2\{b_{ii}\}=0,000568.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов получили следующие значения:

$$\Delta b_0 = \pm 0,133861; \quad \Delta b_i = \pm 0,066917; \quad \Delta b_{ii} = \pm 0,082399;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm 0,061248.$$

Коэффициенты  $b_1, b_4, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{23}, b_{24}, b_{25}, b_{34}, b_{45}, b_{22}, b_{44}, b_{55}$  по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, поэтому эти коэффициенты можно признать статистически незначимыми.

Среди незначимых оказалось несколько коэффициентов квадратичных членов. В связи с этим необходимо было уточнить значимые коэффициенты путем пересчета их с использованием метода наименьших квадратов. После пересчета величины значимых коэффициентов следующие:

$$b_0=0,452857; \quad b_2=0,129168; \quad b_3=0,329169; \quad b_5=-0,211668;$$

$$b_{35}=-0,14125; \quad b_{11}=0,122054; \quad b_{33}=0,228304.$$

Таким образом, в результате ротатабельного планирования второго порядка было получено следующее уравнение регрессии для  $y_z$ :

$$y_z = 0,452857 + 0,129168x_2 + 0,329169x_3 - 0,211668x_5 - 0,14125x_3x_5 + 0,122054x_1^2 + 0,228304x_3^2.$$

Расчетами установлено, что значения дисперсии  $s_{ал}^2=0,05581$ . Проверка полученной модели показала, что модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, о чем свидетельствует сопоставление расчетного и табличного значений F-критерия:

$$F_p = \frac{s_{ал}^2}{s^2\{y_z\}} = 3,43 < F_T = 4,6.$$

В результате математической обработки экспериментальных данных, приведенных в табл. 45, получены следующие значения коэффициентов уравнения регрессии для  $y_a$ :

$$b_0=2,086148; \quad b_1=0,186251; \quad b_2=-0,36542; \quad b_3=-0,41542;$$

$$b_4=0,012083; \quad b_5=-0,037084; \quad b_{12}=-0,05498; \quad b_{13}=-0,029702;$$

$$b_{14}=-0,076466; \quad b_{15}=-0,042341; \quad b_{23}=0,02591; \quad b_{24}=0,024646;$$

$$b_{25}=0,051188; \quad b_{34}=0,075202; \quad b_{35}=0,154828; \quad b_{45}=-0,033493;$$

$$b_{11}=-0,033064; \quad b_{22}=-0,144288; \quad b_{33}=-0,101315;$$

$$b_{44}=-0,06087; \quad b_{55}=-0,006976.$$

Для дисперсии получено значение  $s^2\{y_a\}=0,02644$ .

Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии для  $y_a$ , оказались равными

$$s^2\{b_0\}=0,004406; \quad s^2\{b_i\}=0,001101;$$

$$s^2\{b_{ii}\}=0,00167; \quad s^2\{b_{ii}\}=0,000922.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов получились равными

$$\Delta b_0 = \pm 0,170588; \quad \Delta b_i = \pm 0,085275;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm 0,105023; \quad \Delta b_{ii} = \pm 0,078036.$$

Коэффициенты  $b_4, b_5, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{23}, b_{24}, b_{25}, b_{34}, b_{45}, b_{11}, b_{44}, b_{55}$  по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, поэтому их можно признать статистически незначимыми. Поскольку незначимыми оказались и некоторые коэффициенты при квадратичных членах, значимые коэффициенты были пересчитаны; новые значения коэффициентов следующие:

$$b_0 = 2,006609; \quad b_1 = 0,18625; \quad b_2 = -0,36542; \quad b_3 = -0,41542;$$

$$b_{35} = 0,153125; \quad b_{22} = -0,134197; \quad b_{33} = -0,091617.$$

Таким образом, в результате ротатабельного планирования второго порядка было получено следующее уравнение регрессии для  $y_a$ :

$$y_a = 2,006609 + 0,18625x_1 - 0,36542x_2 - 0,41542x_3 + \\ + 0,153125x_3x_5 - 0,134197x_2^2 - 0,091617x_3^2.$$

Расчетами установлено, что  $s_{ал}^2 = 0,08893$ . Результаты сравнения расчетного и табличного значений F-критерия свидетельствуют об адекватности полученной модели при 5%-ном уровне значимости

$$F_p = \frac{s_{ал}^2}{s^2\{y_a\}} = 3,36 < F_r = 4,6.$$

Задача нахождения условных минимумов при  $d_0 = 4$  мм также решалась с помощью совмещенных сечений поверхности отклика  $y_z$  и поверхности отклика  $y_a$  при различных сочетаниях уровней факторов  $x_3$  и  $x_5$  (рис. 13). На рис. 13 показаны точки пересечения контурных кривых поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$ . Каждая из этих точек определяет величину минимального припуска при заданной толщине слоя и принятых значениях факторов  $x_3$  и  $x_5$ . Заданным значениям толщины слоя 2,5; 2,0; 1,5 и 1,0 мм отвечают значения минимального припуска 0,3; 0,25; 0,4 и 0,5 мм.

Координаты каждой из указанных точек определяют значения скорости подачи электрода и скорости наплавки, обеспечивающие получение минимального припуска для заданной толщины слоя. Если построить двумерные сечения для всех возможных сочетаний уровней влияющих факторов ( $x_3, x_4, x_5$ ), то можно получить большой объем информации. В данной работе анализ двумерных сечений выполнен для ограниченного числа сочетаний уровней влияю-

щих факторов. Однако, несмотря на использование только небольшой части информации, полученной в результате проведенных исследований, можно предложить достаточно большое число режимов, обеспечивающих заданную толщину наплавленного слоя при минимальном припуске на механическую обработку. Предлагаемые режимы приведены в табл. 46.

Исследованиями установлено, что использование электрода диаметром 4 мм характеризуется незначительностью коэффициентов при факторе  $x_4$  и его взаимодействиях. Незначительность этих коэффициентов свидетельствует о том, что в области эксперимента, ограниченной пределами изменения  $U_p$  от 20 до 22 В, фактор  $x_4$  (рабочее напряжение) оказывает незначительное влияние на размеры наплавленного слоя. При различных наплавках электродом диаметром 4 мм рекомендуется одно значение  $U_p = 21$  В. Это значение является основным уровнем фактора. Для каждого режима указано машинное время  $\tau$  наплавки участка цилиндрической поверхности длиной 100 мм и диаметром 100 мм.

При назначении режима наплавки, обеспечивающего заданную толщину слоя и минимальный припуск при данных условиях, приходится делать выбор из нескольких возможных вариантов режима. Машинное время наплавки 100 мм длины цилиндрической поверхности позволяет выбрать режим, обеспечивающий не только заданную толщину слоя при минимальном припуске, но и наибольшую производительность наплавки.

Графоаналитический метод нахождения условного экстремума достаточно прост и нагляден, однако с увеличением числа факторов объем графической работы при построении двумерных сечений резко возрастает. Если число факторов больше трех, то задачи по нахождению условного экстремума целесообразно решать аналитическими методами. Как правило, аналитические методы решения подобных задач связаны с выполнением значительного объема вычислительной работы и поэтому требуют применения ЭВМ.

Если математические модели — линейные функции, то для нахождения условного экстремума можно пользоваться методами линейного программирования. Если математические модели — нелинейные функции, то для нахождения условного экстремума может

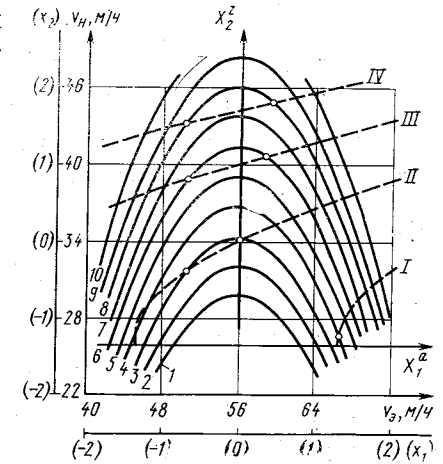


Рис. 13. Сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при  $x_3 = 0$  ( $t = 7$  мм);  $x_5 = 1$  ( $s_0 = 0,416$ ):

I, II, III, IV — толщина наплавленного слоя соответственно 2,5; 2,0; 1,5; 1,0 мм; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — припуск на механическую обработку соответственно 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6 мм;  $d_0 = 4,0$  мм

Таблица 46

Таблица режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя при минимальном припуске на механическую обработку

Диаметр электрода $d_э$ , мм	Толщина наплавленного слоя $a'$ , мм	Шаг наплавки $t$ , мм/об	Рабочее напряжение $U_p$ , В	Относительное смещение электрода $s_0$	Скорость подачи электрода $v_э$ , м/ч	Скорость наплавки $v_n$ , м/ч	Припуск на сторону $z$ , мм	Машинное время, $\tau$ , мин
3,5	1,0	7	22	0,416	47	42	0,65	6,41
	1,0	6	21	0,333	41	41	0,66	7,66
	1,5	7	22	0,416	52	38,5	0,40	7,00
	1,5	6	22	0,416	56	46	0,40	6,83
	1,5	6	21	0,333	45	38	0,47	8,26
	1,5	5	21	0,333	45,5	42	0,50	8,97
	2,0	7	22	0,416	57	32,7	0,21	8,23
	2,0	6	22	0,416	61	40,5	0,20	7,75
	2,0	5	22	0,416	69	47,5	0,25	7,93
	2,0	6	21	0,333	49,5	35	0,31	8,97
	2,0	5	21	0,333	53	42	0,32	8,97
	2,5	6	22	0,416	62,5	31	0,12	10,13
	2,5	5	22	0,416	69,5	39	0,12	9,66
	2,5	6	21	0,333	55	30	0,22	10,47
	2,5	5	21	0,333	57	37	0,19	10,18
	3,0	5	21	0,333	63	28	0,24	13,46
4,0	1,0	8	21	0,416	55	41	0,80	5,74
	1,0	7	21	0,416	55	44	0,46	6,12
	1,0	6	21	0,416	54	45	0,52	6,98
	1,5	8	21	0,416	54	35,5	0,70	6,63
	1,5	7	21	0,416	55	40	0,37	6,73
	1,5	6	21	0,416	55	41,5	0,44	7,57
	1,5	6	21	0,333	55,5	43	0,54	7,30
	1,5	6	21	0,250	55	44	0,62	7,14
	2,0	8	21	0,416	60	26	0,52	9,06
	2,0	7	21	0,416	53,5	33	0,23	8,16
	2,0	6	21	0,416	54	36	0,33	8,72
	2,0	6	21	0,333	55	38	0,44	8,26
	2,0	6	21	0,250	55	39,5	0,54	7,95
	2,5	7	21	0,416	66,5	26	0,28	10,35
	2,5	6	21	0,416	59	26	0,14	12,08
	2,5	6	21	0,333	53	26	0,20	12,08
2,5	6	21	0,250	54	32,5	0,41	9,66	
3,0	6	21	0,250	67,5	26	0,50	12,08	

быть использован метод неопределенных множителей Лагранжа.

Достаточно просто на ЭВМ находят условные экстремумы, изменяя факторы с определенным шагом, вычисляя для каждого сочетания значений факторов функцию отклика и устанавливая с помощью ЭВМ экстремальное значение функции отклика из ряда ее значений. Условия ведения процесса, обеспечивающие достижение условного экстремума, являются оптимальными.

Исследования по определению режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку, были проведены также для проволоки диаметром 2; 2,5; 3 мм. Для

нахождения этих режимов использовались графоаналитический и аналитические методы поиска условного экстремума. Результаты, полученные при использовании различных методов, хорошо согласуются между собой. Эти результаты были подвергнуты экспериментальной проверке, данные которой представлены в табл. 47. Проверка оптимальных режимов показала хорошее совпадение экспериментальных данных с расчетными.

Таблица 47

Режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку ( $d_э=2,5$  мм)

Оптимальные режимы			Расчетные значения, мм		Экспериментальные значения, мм	
$v_э$ , м/ч	$v_n$ , м/ч	$t$ , мм	$a'$	$z$	$a'$	$z$
65,20	63,80	3,44	1,0	0,48	0,90	0,52
88,40	65,45	3,50	1,5	0,30	1,48	0,35
111,00	61,70	3,75	2,0	0,22	1,91	0,26
96,67	42,97	3,62	2,5	0,24	2,45	0,22
74,50	31,30	3,40	3,0	0,22	2,90	0,18

Сопоставление режимов, установленных пробными наплавками, с оптимальными, показало, что использование оптимальных режимов сокращает в среднем в 2 раза количество металла, переводимого в стружку при механической обработке наплавленных поверхностей.

Проведенная работа позволяет сделать следующие выводы.

1. Использование статистических методов планирования эксперимента позволило положить начало исследованию вибродугового процесса наплавки как процесса многофакторного.

2. С помощью статистических методов планирования эксперимента установлены ранее неизвестные закономерности вибродугового процесса, описанные математическими моделями. Найденные модели характеризуют зависимость толщины слоя наплавки и припуска на обработку от пяти основных факторов процесса.

3. Полученные модели позволили решить одну из задач оптимизации процесса, заключающуюся в установлении режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя наплавки при минимальном припуске на обработку, в результате чего существенно улучшились технико-экономические показатели наплавки и последующей обработки наплавленных поверхностей.

4. Методика исследования и оптимизации процесса может быть использована при вибродуговой наплавке проволокой из других металлов и сплавов, при исследовании других видов наплавки, а также при исследовании и оптимизации ряда процессов электрохимической и электрохимической обработки металлов и сплавов.

## 1. НЕКОТОРЫЕ НЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ряде случаев целью исследования является получение математического описания изучаемого процесса. Часто из-за сложности процесса или малого объема информации неизвестную зависимость величины  $\xi$  от  $k$  независимых факторов представляют полиномом вида

$$\xi = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < l \leq k} \beta_{il} x_i x_l + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (125)$$

В этом случае необходимо определить коэффициенты уравнения и оценить их значимость. По результатам опытов можно определить только выборочные коэффициенты регрессии  $b_0, b_i, b_{il}, b_{ii}, \dots$ , которые являются лишь оценками теоретических коэффициентов  $\beta_0, \beta_i, \beta_{il}, \beta_{ii}, \dots$  полинома (125). Уравнение регрессии, полученное по результатам опытов, имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < l \leq k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (126)$$

где  $y$  — выборочная оценка функции отклика  $\xi$ .

Если априорная информация о порядке полинома отсутствует, то модель исследуемого процесса подбирают, начиная с простейшего линейного уравнения, последовательно увеличивая степень полинома до получения адекватной модели. Процесс получения модели в таких случаях осуществляется следующим образом. Вначале реализуется полный факторный эксперимент  $2^k$  или эксперимент, представленный дробной репликой  $2^{k-p}$ , где  $p$  — число эффектов взаимодействия, замененных новыми переменными. По результатам опытов, выполненных согласно этим планам, находят коэффициенты линейного уравнения регрессии. Если это уравнение окажется неадекватным, находят коэффициенты регрессии при эффектах взаимодействия факторов. Если уравнение регрессии с учетом взаимодействий факторов окажется также неадекватным, то выполненные ранее опыты дополняют опытами в «звездных» точках с плечом  $\alpha$  и опытами в центре плана, число которых равно  $n_0$ . Число опытов в «звездных» точках равно  $2k$ . По результатам опытов, выполненных согласно плану  $2^k$  или  $2^{k-p}$ , и дополнительным опытам в «звездных» точках и в центре плана оценивают коэффициенты полинома второго порядка. Следует отметить, что исследуемый процесс часто удается описать полиномом второго порядка. В случае неадекватности полинома второго порядка переходят к плани-

рованию третьего порядка и описывают исследуемый процесс полиномом третьей степени.

Если на основе априорной информации известно, что исследуемый процесс можно описать полиномом второго порядка, то для получения модели некомпозиционные планы в ряде случаев будут рациональнее центральных композиционных планов второго порядка.

При исследовании процессов и систем с двумя факторами рациональным является план типа правильного шестиугольника (рис. 14), на котором указаны номера опытов, а в скобках — уровни факторов в этих опытах. Обычно  $n_0$  принимают равным 4. В этом случае рассматриваемый план предусматривает проведение 10 опытов, из которых шесть выполняются при уровнях факторов, указанных в вершинах шестиугольника, и четыре опыта — при уровнях факторов, соответствующих центру плана. Этот план является ротатабельным и по числу опытов более экономичным, чем соответствующий ротатабельный план второго порядка, требующий для своей реализации 13 опытов: полный факторный эксперимент типа  $2^2$  содержит 4 опыта, в «звездных» точках необходимо провести  $2k = 2 \cdot 2 = 4$  опыта и 5 опытов в центре плана.

Другое достоинство описываемого плана в том, что для фактора  $x_1$  он требует использования пяти уровней (+1; +0,5; 0; -0,5; -1), а для фактора  $x_2$  — всего трех уровней (+0,866; 0; -0,866). Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка предусматривает использование обоих факторов на пяти уровнях (+1,414; +1; 0; -1; -1,414). На практике число уровней часто оказывается ограниченным, поэтому уменьшение числа уровней факторов представляет собой большое достоинство плана. Следует также отметить, что смена уровней факторов в процессе исследования усложняет и удорожает эксперимент.

Матрица плана (см. рис. 14) представлена табл. 48. По результатам опытов, выполненных согласно этому плану, можно определить коэффициенты

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2.$$

Эти коэффициенты находят с помощью метода наименьших квадратов или по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 y_{0u}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} y_j;$$

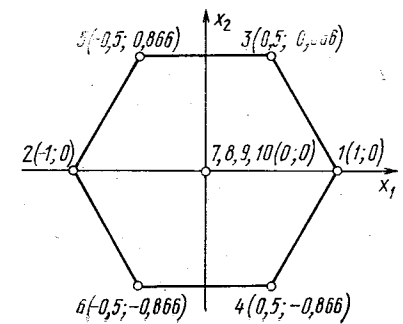


Рис. 14. Некомпозиционный ротатабельный план второго порядка  $k=2$

Матрица планирования

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
1	+	+	0	0	+	0	$y_1$
2	+	-	0	0	+	0	$y_2$
3	+	+0,5	+0,866	+0,433	+0,25	+0,75	$y_3$
4	+	+0,5	-0,866	-0,433	+0,25	+0,75	$y_4$
5	+	-0,5	+0,866	-0,433	+0,25	+0,75	$y_5$
6	+	-0,5	-0,866	+0,433	+0,25	+0,75	$y_6$
7	+	0	0	0	0	0	$y_7$
8	+	0	0	0	0	0	$y_8$
9	+	0	0	0	0	0	$y_9$
10	+	0	0	0	0	0	$y_{10}$

$$b_2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{2j} y_j; \quad b_{12} = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} x_{2j} y_j;$$

$$b_{11} = \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{10} x_{1j}^2 y_j + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{10} x_{2j}^2 y_j - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} y_j;$$

$$b_{22} = \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{10} x_{2j}^2 y_j + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{10} x_{1j}^2 y_j - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} y_j;$$

где  $y_{0u}$  — значение функции отклика в  $u$ -м опыте в центре плана;  $x_{1j}, x_{2j}$  — кодированные значения факторов в  $j$ -м опыте;  $y_j$  — значение функции отклика в  $j$ -м опыте.

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента определяют по результатам опытов в центре плана, используя формулу

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2}{n_0 - 1},$$

где  $\bar{y}_0$  — среднее арифметическое значение функции отклика, полученное по результатам  $n_0$  опытов в центре плана.

Дисперсии коэффициентов регрессии вычисляют по выражениям

$$s^2 \{b_0\} = \frac{1}{4} s_y^2; \quad s^2 \{b_1\} = s^2 \{b_2\} = \frac{1}{3} s_y^2;$$

$$s^2 \{b_{12}\} = \frac{4}{3} s_y^2; \quad s^2 \{b_{11}\} = s^2 \{b_{22}\} = \frac{3}{4} s_y^2.$$

Рассматриваемый план не является полностью ортогональным: коэффициенты  $b_0, b_{11}, b_{22}$  коррелированы. Ковариации, характеризующие статистические связи между коэффициентами  $b_0, b_{11}, b_{22}$ , можно вычислить по выражениям

$$\text{cov} \{b_0, b_{11}\} = \text{cov} \{b_0, b_{22}\} = -\frac{1}{4} s_y^2;$$

$$\text{cov} \{b_{11}, b_{22}\} = \frac{1}{12} s_y^2.$$

Для числа факторов от трех до семи рассмотрен ценный в практическом отношении класс некомпозиционных планов второго порядка. Эти планы представляют собой определенные выборки строк из полного факторного эксперимента типа  $3^k$  [20]. В этих планах каждая переменная варьируется всего на трех уровнях: +1, 0, -1, в то время как центральные композиционные ротатабельные планы второго порядка предусматривают использование каждого фактора на пяти уровнях. Смена уровней в процессе экспериментирования усложняет эксперимент и увеличивает его стоимость. Использование некомпозиционных планов, предусматривающих всего три уровня варьирования факторов, упрощает и удешевляет проведение эксперимента. Некомпозиционные планы характеризуются наличием в строках матрицы планирования большого числа нулей, в результате чего существенно упрощается вычисление коэффициентов модели. Кроме того, некомпозиционные планы для 3, 4, 6 и 7 факторов требуют постановки меньшего числа опытов по сравнению с соответствующими ротатабельными центральными композиционными планами второго порядка. Числа опытов, предусмотренные некомпозиционными планами и центральными композиционными ротатабельными планами второго порядка, следующие.

Число факторов	3	4	5	6	7
Некомпозиционный план (выборка из плана типа $3^k$ )	15	27	46	54	62
Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка	20	31	32	58	92

Схема некомпозиционного плана второго порядка для трех факторов изображена на рис. 15. Этот план предусматривает проведение 15 опытов. Номера опытов указаны на схеме. В центре плана, т. е. при нахождении всех факторов на нулевых уровнях ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ), предусмотрено проведение трех опытов (см. рис. 15, опыты 5; 10; 15). Матрица плана, изображенного на рис. 15, представлена в табл. 49.

Для четырех факторов матрица планирования приведена в табл. 50, для пяти факторов — в табл. 51; для шести — в табл. 52, для семи — в табл. 53 (в таблицах с целью сокращения их объема не приведены данные парных взаимодействий  $x_i x_j$  и квадратов

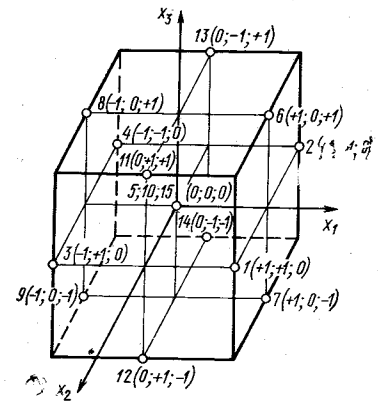


Рис. 15. Некомпозиционный план второго порядка для трех факторов (выборка из плана эксперимента  $3^3$ )



факторов  $x_i^2$ . Эти данные можно получить, располагая значениями факторов, приведенными в табл. 50, 51, 52, 53).

Таблица 49

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для трех факторов (выборка из плана эксперимента типа 3<sup>3</sup>)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$
1	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_1$
2	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_2$
3	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_3$
4	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_4$
5	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_5$
6	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_6$
7	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_7$
8	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_8$
9	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_9$
10	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{10}$
11	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{11}$
12	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{12}$
13	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{13}$
14	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{14}$
15	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	$y_{15}$

Таблица 50

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для четырех факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>4</sup>)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	+	+	+	0	0	15	+	0	+	—	0
2	+	+	+	0	0	16	+	0	+	—	0
3	+	+	+	0	0	17	+	0	+	—	0
4	+	+	+	0	0	18	+	0	+	—	0
5	+	+	+	0	0	19	+	+	+	+	0
6	+	+	+	0	0	20	+	+	+	+	0
7	+	+	+	0	0	21	+	+	+	+	0
8	+	+	+	0	0	22	+	+	+	+	0
9	+	+	+	0	0	23	+	+	+	+	0
10	+	+	+	0	0	24	+	+	+	+	0
11	+	+	+	0	0	25	+	+	+	+	0
12	+	+	+	0	0	26	+	+	+	+	0
13	+	+	+	0	0	27	+	+	+	+	0
14	+	+	+	0	0						

По результатам опытов, поставленных согласно рассмотренным некомпозиционным планам, можно определить коэффициенты уравнения регрессии

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{k-1,k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^2 + \dots + b_{kk}x_k^2 \quad (127)$$

Таблица 51

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для пяти факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>5</sup>)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	+	+	+	0	0	0	24	+	0	+	+	0	0
2	+	+	+	0	0	0	25	+	0	+	+	0	0
3	+	+	+	0	0	0	26	+	0	+	+	0	0
4	+	+	+	0	0	0	27	+	0	+	+	0	0
5	+	+	+	0	0	0	28	+	0	+	+	0	0
6	+	+	+	0	0	0	29	+	0	+	+	0	0
7	+	+	+	0	0	0	30	+	0	+	+	0	0
8	+	+	+	0	0	0	31	+	0	+	+	0	0
9	+	+	+	0	0	0	32	+	0	+	+	0	0
10	+	+	+	0	0	0	33	+	0	+	+	0	0
11	+	+	+	0	0	0	34	+	0	+	+	0	0
12	+	+	+	0	0	0	35	+	0	+	+	0	0
13	+	+	+	0	0	0	36	+	0	+	+	0	0
14	+	+	+	0	0	0	37	+	0	+	+	0	0
15	+	+	+	0	0	0	38	+	0	+	+	0	0
16	+	+	+	0	0	0	39	+	0	+	+	0	0
17	+	+	+	0	0	0	40	+	0	+	+	0	0
18	+	+	+	0	0	0	41	+	0	+	+	0	0
19	+	+	+	0	0	0	42	+	0	+	+	0	0
20	+	+	+	0	0	0	43	+	0	+	+	0	0
21	+	+	+	0	0	0	44	+	0	+	+	0	0
22	+	+	+	0	0	0	45	+	0	+	+	0	0
23	+	+	+	0	0	0	46	+	0	+	+	0	0

Коэффициенты уравнения (127) могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов. Для определения коэффициентов уравнения (127) получены формулы [20], которые для трех, четырех, пяти и семи факторов имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}; \quad b_i = A \sum_{j=1}^N x_{ij}y_j; \quad b_{ii} = D \sum_{j=1}^N x_{ij}x_{lj}y_j;$$

$$b_{ii} = B \sum_{j=1}^N x_{ij}^2y_j + C \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2y_j - \frac{1}{pn_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u},$$

где  $n_0$  — число опытов в центре плана;  $u$  — номер параллельного опыта в центре плана;  $y_{0u}$  — значение функции отклика в  $u$ -м опыте;  $N$  — число опытов в матрице планирования;  $j$  — номер опыта в матрице планирования;  $i, l$  — номера факторов;  $x_{ij}$  и  $x_{lj}$  — кодированные значения  $i$ -го и  $l$ -го факторов в  $j$ -м опыте;  $y_j$  — значение функции отклика в  $j$ -м опыте;  $k$  — число факторов;  $A, B, C, D, p$  — константы, зависящие от числа факторов.

Для трех, четырех, пяти и семи факторов дисперсии  $s^2\{b_0\}$ ,  $s^2\{b_i\}$ ,  $s^2\{b_{ii}\}$  коэффициентов регрессии определяют по формулам

Таблица 52

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для шести факторов (выборка из плана эксперимента типа 3<sup>6</sup>)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
1	+	+	+	0	+	0	0	28	+	+	0	0	+	+	0
2	+	+	+	0	+	0	0	29	+	+	0	0	+	+	0
3	+	+	+	0	+	0	0	30	+	+	0	0	+	+	0
4	+	+	+	0	+	0	0	31	+	+	0	0	+	+	0
5	+	+	+	0	+	0	0	32	+	+	0	0	+	+	0
6	+	+	+	0	+	0	0	33	+	+	0	0	+	+	0
7	+	+	+	0	+	0	0	34	+	+	0	0	+	+	0
8	+	+	+	0	+	0	0	35	+	+	0	0	+	+	0
9	+	+	+	0	+	0	0	36	+	+	0	0	+	+	0
10	+	+	+	0	+	0	0	37	+	+	0	0	+	+	0
11	+	+	+	0	+	0	0	38	+	+	0	0	+	+	0
12	+	+	+	0	+	0	0	39	+	+	0	0	+	+	0
13	+	+	+	0	+	0	0	40	+	+	0	0	+	+	0
14	+	+	+	0	+	0	0	41	+	+	0	0	+	+	0
15	+	+	+	0	+	0	0	42	+	+	0	0	+	+	0
16	+	+	+	0	+	0	0	43	+	+	0	0	+	+	0
17	+	+	+	0	+	0	0	44	+	+	0	0	+	+	0
18	+	+	+	0	+	0	0	45	+	+	0	0	+	+	0
19	+	+	+	0	+	0	0	46	+	+	0	0	+	+	0
20	+	+	+	0	+	0	0	47	+	+	0	0	+	+	0
21	+	+	+	0	+	0	0	48	+	+	0	0	+	+	0
22	+	+	+	0	+	0	0	49	+	+	0	0	+	+	0
23	+	+	+	0	+	0	0	50	+	+	0	0	+	+	0
24	+	+	+	0	+	0	0	51	+	+	0	0	+	+	0
25	+	+	+	0	+	0	0	52	+	+	0	0	+	+	0
26	+	+	+	0	+	0	0	53	+	+	0	0	+	+	0
27	+	+	+	0	+	0	0	54	+	+	0	0	+	+	0

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{n_0} s_{y^2}^2; \quad s^2\{b_i\} = A s_{y^2}^2;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = D s_{y^2}^2; \quad s^2\{b_{ij}\} = B_1 s_{y^2}^2;$$

где  $s_{y^2}^2$  — дисперсия воспроизводимости эксперимента;  $B_1$  — константа, зависящая от числа факторов.

Значения констант  $A$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $p$  и  $n_0$  для 3, 4, 5 и 7 факторов приведены в табл. 54.

При шести факторах формулы для вычисления коэффициентов регрессии и их дисперсий имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{6} \sum_{u=1}^6 y_{0u}; \quad b_i = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} y_j;$$

$$b_{ii} = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} x_{ij} y_j \text{ для } b_{14}; b_{25}; b_{36};$$

Таблица 53

Матрица некомпозиционного плана второго порядка для семи факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>7</sup>)

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	32	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	33	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+	34	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+	35	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	36	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	37	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	38	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	39	+	+	+	+	+	+	+	+
9	+	+	+	+	+	+	+	+	40	+	+	+	+	+	+	+	+
10	+	+	+	+	+	+	+	+	41	+	+	+	+	+	+	+	+
11	+	+	+	+	+	+	+	+	42	+	+	+	+	+	+	+	+
12	+	+	+	+	+	+	+	+	43	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+	+	+	+	+	+	+	+	44	+	+	+	+	+	+	+	+
14	+	+	+	+	+	+	+	+	45	+	+	+	+	+	+	+	+
15	+	+	+	+	+	+	+	+	46	+	+	+	+	+	+	+	+
16	+	+	+	+	+	+	+	+	47	+	+	+	+	+	+	+	+
17	+	+	+	+	+	+	+	+	48	+	+	+	+	+	+	+	+
18	+	+	+	+	+	+	+	+	49	+	+	+	+	+	+	+	+
19	+	+	+	+	+	+	+	+	50	+	+	+	+	+	+	+	+
20	+	+	+	+	+	+	+	+	51	+	+	+	+	+	+	+	+
21	+	+	+	+	+	+	+	+	52	+	+	+	+	+	+	+	+
22	+	+	+	+	+	+	+	+	53	+	+	+	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+	+	+	+	+	54	+	+	+	+	+	+	+	+
24	+	+	+	+	+	+	+	+	55	+	+	+	+	+	+	+	+
25	+	+	+	+	+	+	+	+	56	+	+	+	+	+	+	+	+
26	+	+	+	+	+	+	+	+	57	+	+	+	+	+	+	+	+
27	+	+	+	+	+	+	+	+	58	+	+	+	+	+	+	+	+
28	+	+	+	+	+	+	+	+	59	+	+	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+	+	+	+	+	+	60	+	+	+	+	+	+	+	+
30	+	+	+	+	+	+	+	+	61	+	+	+	+	+	+	+	+
31	+	+	+	+	+	+	+	+	62	+	+	+	+	+	+	+	+

Значения констант в формулах для вычисления коэффициентов регрессии и их дисперсий

Таблица 54

Число факторов	$A$	$B$	$B_1$	$C$	$D$	$p$	$n_0$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	2	3
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{4}$	2	3
5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{96}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{4}$	2	6
7	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{8}$	3	6

$$b_{ii} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} x_{ij} y_j \text{ для остальных } b_{ii};$$

$$b_{11} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{22} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{33} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{44} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{55} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{66} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j -$$

$$- \frac{1}{216} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{6} s_y^2; \quad s^2\{b_i\} = \frac{1}{24} s_y^2;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{1}{16} s_y^2 \text{ для } s^2\{b_{14}\}; s^2\{b_{25}\};$$

$$s^2\{b_{36}\}; s^2\{b_{ii}\} = \frac{1}{8} s_y^2 \text{ для остальных } s^2\{b_{ii}\}; s^2\{b_{ii}\} = \frac{21}{216} s_y^2.$$

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента определяют по результатам  $n_0$  опытов в центре плана:

$$s_y^2 = \frac{s_E}{n_0 - 1},$$

где  $s_E = \sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2$ ;  $\bar{y}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}$ .

Адекватность полученной модели проверяют с помощью F-критерия:

$$F_p = \frac{s_{ал}^2}{s_y^2}.$$

Дисперсию  $s_{ал}^2$  адекватности вычисляют по формуле

$$s_{ал}^2 = \frac{s_R - s_E}{f},$$

где  $s_R$  — сумма квадратов отклонений эмпирических значений  $y_j$  функции отклика от ее значений  $\hat{y}_j$ , вычисленных по модели, во всех точках плана;  $f$  — число степеней свободы,  $f = N - k' - (n_0 - 1)$ ;  $k'$  — число коэффициентов аппроксимирующего полинома.

Если найденное значение критерия  $F_p$  меньше табличного при принятом уровне значимости и соответствующих числах степеней свободы, то гипотеза адекватности полученной модели принимается.

Некомпозиционные планы для числа факторов от трех до семи имеют высокую степень ортогональности, а именно: только свободный член  $b_0$  и коэффициенты  $b_{ii}$  при квадратичных членах коррелированы друг с другом. При четырех и семи факторах указанные планы являются ротатабельными, а при другом числе факторов эти планы являются почти ротатабельными.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА ВИБРОДУГОВОЙ НАПЛАВКИ

Основное влияние на толщину наплавленного слоя оказывают диаметр электрода, скорость наплавки, скорость подачи проволоки и шаг наплавки. Рабочее напряжение и смещение электрода от зенита по сравнению с указанными факторами оказывают значительно меньшее влияние на толщину слоя. На практике при выбранном диаметре электрода необходимую толщину слоя устанавливают с помощью ряда пробных наплавку, выполняемых при различных сочетаниях значений шага наплавки, скорости подачи элект-

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y_a, \text{ мм}$	$y_z, \text{ мм}$
1	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	1,76	0,30
2	+	+	-	0	-	0	0	+	+	0	4,30	0,25
3	+	-	+	0	-	0	0	+	+	0	0,41	0,91
4	+	-	-	0	+	0	0	+	+	0	2,68	0,27
5	+	0	0	0	0	0	0	+	+	0	1,90	0,31
6	+	+	0	+	0	+	0	+	0	+	2,10	0,33
7	+	+	0	-	0	-	0	+	0	+	3,26	0,25
8	+	-	0	+	0	-	0	+	0	+	0,56	1,05
9	+	-	0	-	0	+	0	+	0	+	1,78	0,32
10	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09	0,27
11	+	0	+	+	0	0	+	0	+	+	0,80	0,64
12	+	0	+	-	0	0	-	0	+	+	1,71	0,32
13	+	0	-	+	0	0	-	0	+	+	2,68	0,35
14	+	0	-	-	0	0	+	0	+	+	4,68	0,29
15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,99	0,32

трода и скорости наплавки. На выполнение пробных наплавок затрачивают значительное время, при этом установленный с их помощью режим часто оказывается далеким от оптимального: наплавленные поверхности имеют большую высоту неровностей, что приводит к увеличению расхода электродного металла и затрат на последующую механическую обработку наплавленных поверхностей.

В работе была поставлена задача: определить для проволоки диаметром 2,5 мм из стали 12X18H9T условия наплавки, обеспечивающие заданную толщину наплавленного слоя при минимальном припуске на последующую обработку. Задача решалась нахождением условного минимума функции отклика для припуска при ограничениях, налагаемых функцией отклика для толщины слоя. Для получения указанных функций проведено экспериментальное исследование.

В исследовании переменными приняты следующие факторы:  $v_a$  — скорость подачи проволоки;  $v_n$  — скорость наплавки;  $t$  — шаг наплавки. В качестве параметра оптимизации приняли припуск на обработку. На основе априорной информации были выбраны уровни и интервалы варьирования факторов (табл. 55).

Таблица 55

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Кодовое обозначение	Интервалы варьирования	Уровни факторов			
			основной 0	верхний +1	нижний -1	
$v_a$ — скорость подачи электродной проволоки, м/ч	$x_1$	22	80	112	48	
$v_n$ — скорость наплавки, м/ч	$x_2$	20,7	41,4	62,1	20,7	
$t$ — шаг наплавки, мм	$x_3$	1	4	5	3	

Для получения моделей процесса в виде полиномов второй степени реализован некомпозиционный план второго порядка, матрица которого представлена табл. 56. В соответствии с условиями опытов (см. табл. 56) наплавливали в углекислом газе образцы диаметром 110 мм из стали 45 с помощью головки ВГ-8М-УПИ и сварочного выпрямителя ВС-600. Условия наплавки характеризовались совокупностью следующих параметров: дополнительная индуктивность — 2,1 мГн; сопротивление сварочной цепи 0,05 Ом; частота вибрации 50 Гц; амплитуда колебаний электрода 1,7 мм; смещение электрода от зенита в сторону наплавки 25 мм; вылет электрода 15 мм; рабочее напряжение 21—22 В. Из каждого образца приготавливали по четыре макрошлифа, на которых измеряли толщину слоя  $a'$  (см. рис. 11) и припуск  $z$ . Измерения выполняли микроскопом УИМ-21 с точностью 0,1 мм. На каждом макрошлифе измерения производили на участке длиной 20—25 мм. Таким образом, значения толщины  $y_a$  наплавленного слоя и припуска  $y_z$  на обработку, указанные в табл. 56, получены как средние из 20—25 измерений.

По данным опытов, проведенных согласно матрице планирования (см. табл. 56), получены модели, характеризующие зависимости  $y_a$  и  $y_z$  от исследуемых факторов процесса. Эти модели представлены полиномами второй степени.

Коэффициенты моделей вычисляли по приведенным выше формулам (стр. 119), которые для трех факторов имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{3} \sum_{u=1}^3 y_{0u}; \quad (128)$$

$$b_i = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} y_j; \quad (129)$$

$$b_{ii} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} x_{ij} y_j; \quad (130)$$

$$b_{ii} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{6} \sum_{u=1}^3 y_{0u}. \quad (131)$$

При определении коэффициентов модели для  $y_z$  значения сумм, входящих в формулы (128), (129), (130) и (131), оказались следующими:

$$\sum_{u=1}^3 y_{0u} = 90; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{1j} y_j = -1,42;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{2j} y_j = 1,01; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{3j} y_j = 1,19;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{1j}x_{2j}y_j = -0,59; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{1j}x_{3j}y_j = -0,65;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{2j}x_{3j}y_j = 0,29; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{1j}^2y_j = 3,68;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{2j}^2y_j = 3,33; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{3j}^2y_j = 3,55; \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2y_j = 10,56.$$

После подстановки указанных сумм в формулы (128), (129), (130) и (131) коэффициенты уравнения регрессии для  $y_z$  получили следующие значения:

$$b_0 = \frac{1}{3} 0,90 = 0,3; \quad b_1 = \frac{1}{8} (-1,42) = -0,1775;$$

$$b_2 = \frac{1}{8} 1,01 = 0,12625; \quad b_3 = \frac{1}{8} 1,19 = 0,14875;$$

$$b_{12} = \frac{1}{4} (-0,59) = -0,1475; \quad b_{13} = \frac{1}{4} (-0,65) = -0,1625;$$

$$b_{23} = \frac{1}{4} 0,29 = 0,0725;$$

$$b_{11} = \frac{1}{4} 3,68 - \frac{1}{16} 10,56 - \frac{1}{6} 0,90 = 0,11;$$

$$b_{22} = \frac{1}{4} 3,33 - \frac{1}{16} 10,56 - \frac{1}{6} 0,90 = 0,0225;$$

$$b_{33} = \frac{1}{4} 3,55 - \frac{1}{16} 10,56 - \frac{1}{6} 0,90 = 0,0775.$$

Дисперсию  $s^2\{y_z\}$  параметра оптимизации определяли по результатам опытов в центре плана (табл. 56, опыты 5; 10; 15). Для вычисления дисперсии  $s^2\{y_z\}$  составлена вспомогательная таблица (табл. 57).

Таблица 57

Вспомогательная таблица для расчета  $s^2\{y_z\}$

Номер опыта в центре плана	$y_z$	$\bar{y}_z$	$y_z - \bar{y}_z$	$(y_z - \bar{y}_z)^2$
5	0,31	0,30	0,01	0,0001
10	0,27		-0,03	0,0009
15	0,32		0,02	0,0004

$$s^2\{y_z\} = \frac{s_E}{n_0 - 1} = \frac{0,0014}{3 - 1} = 0,0007$$

$$s_E = \sum (y_z - \bar{y}_z)^2 = 0,0014$$

Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$ , вычисляли по указанным выше

формулам при числе факторов  $k=3$ . Получены следующие значения дисперсий:

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{3} s^2\{y_z\} = 0,000233;$$

$$s^2\{b_i\} = \frac{1}{8} s^2\{y_z\} = 0,000088;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{1}{4} s^2\{y_z\} = 0,000175;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{13}{48} s^2\{y_z\} = 0,000189.$$

Доверительный интервал  $\Delta b_0$  коэффициента  $b_0$  находим по выражению

$$\Delta b_0 = \pm t_{\alpha} s\{b_0\} = \pm 4,3 \cdot 0,015264 = \pm 0,065635.$$

При числе степеней свободы, равном 2, и 5%-ном уровне значимости  $t=4,3$ ,

$$s\{b_0\} = \sqrt{s^2\{b_0\}} = \sqrt{0,000233} = 0,015264.$$

Аналогично определяем доверительные интервалы коэффициентов  $b_i, b_{ii}, b_{ii}$ :

$$\Delta b_i = \pm t_{\alpha} s\{b_i\} = \pm 0,040334;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm t_{\alpha} s\{b_{ii}\} = \pm 0,056880;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm t_{\alpha} s\{b_{ii}\} = \pm 0,059206.$$

Коэффициент  $b_{22}$  меньше доверительного интервала, поэтому его можно признать статистически незначимым и исключить из уравнения регрессии. После исключения коэффициента  $b_{22}$  уравнение регрессии для  $y_z$  получает вид

$$y_z = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{33}x_3^2. \quad (132)$$

Так как незначимым оказался коэффициент при квадратичном члене, все остальные коэффициенты пересчитываем с использованием метода наименьших квадратов. Для этого по выражению (132) составляем систему нормальных уравнений:

$$b_0N + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j} +$$

$$+ b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 = \sum_{j=1}^N y_{zj};$$

$$b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{1j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}x_{1j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j} +$$

$$\begin{aligned}
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{2j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j} x_{2j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j}^2 + \\
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j} x_{2j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{2j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + \\
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^2 + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{3j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{1j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j}^2 + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j} x_{1j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{2j} + \\
& + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j} x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j} x_{2j}; \quad (133) \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{1j} x_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j} + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} x_{3j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j}^2 + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^2 x_{1j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{3j} + \\
& + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 x_{1j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j} x_{3j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{2j} + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j}^2 x_{3j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^2 x_{2j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j}^2 + \\
& + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} x_{3j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{2j} x_{3j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{1j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j} x_{1j}^2 + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{2j} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j} x_{1j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^4 + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j}^2 = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j}^2; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j}^2 + \\
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^3 + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^3 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j}^2 + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^4 = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{3j}^2.
\end{aligned}$$

После подстановки значений сумм система (133) принимает вид

$$\begin{aligned}
15b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 8b_{11} + 8b_{33} &= 6,18; \\
0b_0 + 8b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= -1,42; \\
0b_0 + 0b_1 + 8b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= 1,01; \\
0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 8b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= 1,19; \\
0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 4b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= -0,59; \quad (134) \\
0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 4b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= -0,65; \\
0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 4b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} &= 0,29; \\
8b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 8b_{11} + 4b_{33} &= 3,68; \\
8b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 4b_{11} + 8b_{33} &= 3,55.
\end{aligned}$$

Решая систему (134), получаем следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0,313846; & b_1 &= -0,1775; & b_2 &= 0,12625; \\
b_3 &= 0,14875; & b_{12} &= -0,1475; & b_{13} &= -0,1625; \\
b_{23} &= 0,0725; & b_{11} &= 0,108269; & b_{33} &= 0,075769.
\end{aligned}$$

Уравнение регрессии для  $y_z$  получает вид

$$\begin{aligned}
y_z &= 0,313846 - 0,1775x_1 + 0,12625x_2 + 0,14875x_3 - 0,1475x_1x_2 - \\
& - 0,1625x_1x_3 + 0,0725x_2x_3 + 0,108269x_1^2 + 0,075769x_3^2. \quad (135)
\end{aligned}$$

Адекватность полученной модели проверяем по F-критерию. Для вычисления дисперсии  $s_{ад}^2$  адекватности находим сумму  $s_R$  квадратов отклонений расчетных значений  $\hat{y}_z$  от экспериментальных  $y_z$  во всех точках плана (табл. 58). Расчетные значения  $\hat{y}_z$  определяем по выражению (135),  $s_E = 0,0014$  (см. табл. 57).

Находим дисперсию

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R - s_E}{N - k' - (n_0 - 1)} = 0,010975.$$

Дисперсия  $s^2\{y_z\} = 0,0007$  (см. табл. 57), поэтому расчетное значение F-критерия

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s^2\{y_z\}} = 15,68 < F_T = 19,3.$$

Таблица 58

Вспомогательная таблица для вычисления  $s_R$ 

Номер опыта	$y_z$	$\hat{y}_z$	$y_z - \hat{y}_z$	$(y_z - \hat{y}_z)^2$	Номер опыта	$y_z$	$\hat{y}_z$	$y_z - \hat{y}_z$	$(y_z - \hat{y}_z)^2$
1	0,30	0,22	0,08	0,0064	9	0,32	0,36	-0,04	0,0016
2	0,25	0,26	-0,01	0,0001	10	0,27	0,31	-0,04	0,0016
3	0,91	0,87	0,04	0,0016	11	0,64	0,74	-0,10	0,01
4	0,27	0,32	-0,05	0,0025	12	0,32	0,29	0,03	0,0009
5	0,31	0,31	0	0	13	0,35	0,34	0,01	0,0001
6	0,33	0,31	0,02	0,0004	14	0,29	0,19	0,10	0,01
7	0,25	0,33	-0,08	0,0064	15	0,32	0,31	0,01	0,0001
8	1,05	0,99	0,06	0,0036					

$$s_R = \sum (y_z - \hat{y}_z)^2 = 0,0453$$

Следовательно, полученная модель адекватна при 5%-ном уровне значимости.

Аналогично получено уравнение регрессии для  $y_a$ :

$$y_a = 1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,423214x_2^2. \quad (136)$$

Полученная модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, так как

$$F_p = \frac{s_{ax}^2}{s^2\{y_a\}} = 2,04 < F_T = 19,3.$$

Уравнения (135) и (136) можно использовать для определения толщины слоя и припуска на обработку при наплавке проволокой диаметром 2,5 мм на режимах, входящих в область эксперимента.

Переход от кодированных значений ( $x_1, x_2, x_3$ ) факторов к натуральным ( $v_a, v_H, t$ ) осуществляют по формулам

$$v_a = \varepsilon_1 x_1 + v_{a0}; \quad v_H = \varepsilon_2 x_2 + v_{H0}; \quad t = \varepsilon_3 x_3 + t_0,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — интервалы варьирования факторов;  $v_{a0}, v_{H0}, t_0$  — основные уровни факторов в натуральных выражениях.

Условный минимум функции  $y_z$  при ограничениях, налагаемых функцией  $y_a$ , находили с помощью совмещенных двумерных сечений. Для этого строили контурные кривые поверхности отклика  $y_z$  и поверхности отклика  $y_a$ .

Рассмотрим построение контурных кривых поверхности отклика  $y_z$  при  $x_3 = -1$ . Подставив в уравнение (135)  $x_3 = -1$ , получаем для  $y_z$  следующее выражение:

$$y_z = 0,240865 - 0,015x_1 + 0,05375x_2 - 0,1475x_1x_2 + 0,108269x_1^2. \quad (137)$$

Уравнение (137) приводим к каноническому виду. На первом этапе канонического преобразования начало координат переносим

в центр фигуры. Для определения координат центра  $s^z$  фигуры уравнение (137) дифференцируем по  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\frac{\partial y_z}{\partial x_1} = -0,015 - 0,1475x_2 + 0,216538x_1,$$

$$\frac{\partial y_z}{\partial x_2} = 0,05375 - 0,1475x_1.$$

Приравниваем частные производные нулю, после чего, решая полученную систему уравнений, находим, что  $x_1 = 0,364406$ , а  $x_2 = 0,433267$ . Найденные значения являются координатами центра  $s^z$  фигуры, поэтому обозначаем их через  $x_{1s}$  и  $x_{2s}$  ( $x_{1s} = 0,364406$  и  $x_{2s} = 0,433267$ ).

При параллельном переносе системы координат в центр  $s^z$  фигуры исчезают линейные члены и изменяется свободный член. Коэффициенты при вторых степенях и произведениях факторов инвариантны относительно параллельного переноса. Подставляя в уравнение (137) вместо  $x_1$  и  $x_2$  соответственно координаты центра  $s^z$  фигуры  $x_{1s} = 0,364406$  и  $x_{2s} = 0,433267$ , получим значение припуска  $Y_z^s$  в новом начале координат:

$$Y_z^s = 0,240865 - 0,015(0,364406) + 0,05375(0,433267) - 0,1475(0,364406)(0,433267) + 0,108269(0,364406)^2 = 0,249776.$$

В результате переноса начала координат в центр  $s^z$  фигуры уравнение (137) примет вид

$$Y_z = Y_z^s + 0,108269x_1^2 - 0,1475\tilde{x}_1\tilde{x}_2.$$

Подставляя в последнее выражение  $Y_z^s = 0,249776$ , получим

$$Y_z = 0,249776 + 0,108269\tilde{x}_1^2 - 0,1475\tilde{x}_1\tilde{x}_2, \quad (138)$$

где  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  — значения координат в новой системе, связанные с  $x_1$  и  $x_2$  следующими соотношениями:  $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1s} = x_1 - 0,364406$ ;  $\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2s} = x_2 - 0,433267$ .

Вторым этапом канонического преобразования является поворот осей в новом начале координат. Угол поворота находим по выражению

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b_{12}}{b_{11} - b_{22}} = \frac{0,1475}{0,108269 - 0} = -1,362347;$$

$$2\alpha = -53^\circ 43'; \quad \alpha = -26^\circ 52'.$$

Коэффициенты  $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{kk}$  канонического уравнения находят, решая характеристическое уравнение, которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2} b_{12} & \dots & \frac{1}{2} b_{1k} \\ \frac{1}{2} b_{21} & b_{22} - B & \dots & \frac{1}{2} b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} b_{k1} & \frac{1}{2} b_{k2} & \dots & b_{kk} - B \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае для полинома

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

характеристическое уравнение будет следующим:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2} b_{12} \\ \frac{1}{2} b_{21} & b_{22} - B \end{vmatrix} = 0.$$

В это выражение подставляем значения  $b_{12}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ :

$$\begin{vmatrix} 0,108269 - B & \frac{1}{2} (-0,1475) \\ \frac{1}{2} (-0,1475) & 0 - B \end{vmatrix} = E^2 - 0,108269B - 0,005439 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим  $B_{11} = 0,145622$ ;  $B_{22} = -0,037353$ . Правильность вычислений коэффициентов  $B_{11}$  и  $B_{22}$  проверяем, сравнивая суммы  $\Sigma B_{ii}$  и  $\Sigma b_{ii}$ . Поскольку коэффициенты при вторых степенях инвариантны относительно параллельного переноса осей, значения коэффициентов  $b_{ii}$  можно брать из уравнения (137) или (138):

$$\Sigma b_{ii} = b_{11} + b_{22} = 0,108269 + 0 = 0,108269;$$

$$\Sigma B_{ii} = B_{11} + B_{22} = 0,145622 - 0,037353 = 0,108269.$$

Таким образом, уравнение (137), приведенное к канонической форме, получает вид

$$Y_z - 0,249776 = 0,145622X_1^2 - 0,037353X_2^2. \quad (139)$$

Подставляя в уравнение (139) значение припуска  $Y_z = 0,2$  мм, получаем следующее выражение:

$$\frac{X_2^2}{1,332717} - \frac{X_1^2}{0,341828} = 1. \quad (140)$$

Уравнение (140) — каноническое уравнение гиперболы. По уравнению (140) построена кривая I (рис. 16) в системе координат  $X_1^z$ ;  $X_2^z$ . Эта система получена путем переноса начала  $H$  координат в центр  $s^z$  и последующего поворота координатных осей в точке  $s^z$  на угол  $\alpha = -26^\circ 52'$ . Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  — действительная полуось;  $b$  — мнимая полуось ( $a = 1,154434$ ;  $b = 0,584660$ ).

Значение  $a$  откладываем по оси  $X_2^z$ , а значение  $b$  — по оси  $X_1^z$ . При этом необходимо учитывать, что масштабы для  $a$  и  $b$  и масштабы соответственно факторов  $x_2$  и  $x_1$  должны быть одинаковыми.

По полученным значениям полуосей строим гиперболу известными способами.

Аналогичным образом получали уравнения при  $Y_z = 0,25$ ;  $0,3$ ;  $0,35$ ;  $0,4$  мм. По этим уравнениям строили контурные кривые 2, 3, 4, 5 (см. рис. 16). Подставив в уравнение (136)  $x_3 = -1$ , получили для  $y_a$  следующее выражение:

$$y_a = 2,61611 + 0,74875x_1 - 1,48x_2 + 0,423214x_2^2. \quad (141)$$

Приняв  $y_a = 1,5$ , уравнение (141) приведем к виду

$$x_1 = -0,565227x_2^2 + 1,976628x_2 - 1,490631. \quad (142)$$

По уравнению (142), представляющему собой

уравнение параболы, построена кривая I (см. рис. 16). Последовательно приняв толщину слоя равной 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5 мм,

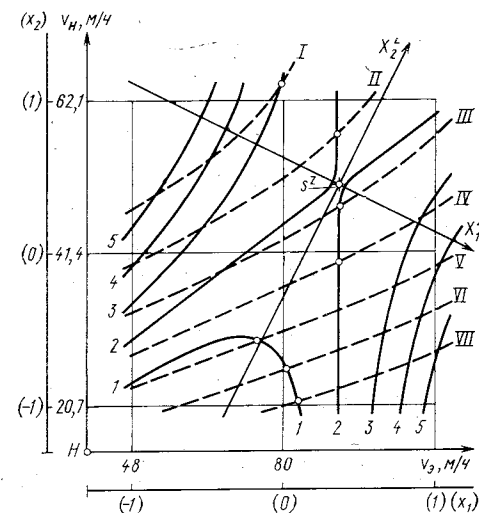


Рис. 16. Двухмерные сечения поверхностей отклывов  $y_z$  и  $y_a$  при  $x_3 = -1$  ( $t = 3$  мм): 1, 2, 3, 4, 5 — припуск на обработку соответственно 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4 мм; 1, II, III, IV, V, VI, VII — толщина наплавленного слоя соответственно 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5 мм;  $d_3 = 2,5$  мм

Таблица 59

Режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку ( $d_3 = 2,5$  мм)

$a'$ , мм	$v_3$	$v_H$	$t$	$z$	$\tau$ , мин	$a'$ , мм	$v_3$	$v_H$	$t$	$z$	$\tau$ , мин
	м/ч						мм				
1,0	64	62,1	3,5	0,50	8,67	2,5	89,6	36,4	4,0	0,25	12,94
1,0	64	52,4	4,0	0,55	8,99	2,5	79,0	27,7	4,5	0,30	15,10
1,0	80	59,6	4,5	0,55	7,03	2,5	101,8	29,4	5,0	0,30	12,82
1,0	89	61,3	5,0	0,60	6,15	3,0	91,8	39,7	3,0	0,25	15,81
1,5	80	64,6	3,0	0,3	9,73	3,0	105,0	40,2	3,5	0,25	13,40
1,5	87,7	64,2	3,5	0,3	8,39	3,0	112,0	36,4	4,0	0,25	12,94
1,5	84,5	53,4	4,0	0,35	8,82	3,0	113,0	31,2	4,5	0,25	13,40
1,5	95,4	55,9	4,5	0,35	7,49	3,0	83,2	18,0	5,0	0,30	20,93
1,5	100,5	48,8	5,0	0,40	7,71	3,5	74,2	29,4	3,0	0,20	21,38
2,0	91,5	57,1	3,0	0,25	11,00	3,5	83,8	27,3	3,5	0,20	19,71
2,0	94,7	53,4	3,5	0,25	10,08	3,5	88,3	23,4	4,0	0,20	20,14
2,0	103,7	52,2	4,0	0,25	9,03	4,0	80,3	25,5	3,0	0,20	24,7
2,0	97,3	42	4,5	0,30	9,97	4,0	88,6	23,6	3,5	0,20	22,82
2,0	115,2	44,7	5,0	0,30	8,43	4,0	95,7	20,1	4,0	0,20	23,5
2,5	91,8	47,6	3,0	0,25	13,20	4,5	82,6	21,1	3,0	0,20	29,76
2,5	77,4	38,1	3,5	0,25	14,14	4,5	91,5	19,2	3,5	0,20	27,98



получим уравнения, по которым построены кривые II, III, IV, V, VI, VII. Эти кривые и кривые 1, 2, 3, 4, 5 представляют собой совмещенные двумерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при шаге наплавки, равном 3 мм. Аналогично построены совмещенные двумерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при шаге наплавки 3,5; 4,0; 4,5; 5,0 мм.

Точкам пересечения кривых на рис. 16 отвечают значения  $v_в$  и  $v_н$ , обеспечивающие минимальный припуск при заданной толщине слоя и принятом шаге наплавки.

Анализ совмещенных двумерных сечений позволил определить режимы, обеспечивающие требуемую толщину слоя при минимальном припуске на обработку (табл. 59). В таблице указано машинное время  $\tau$  наплавки поверхности диаметром 100 мм и длиной 100 мм. По приведенным данным можно выбрать режим, обеспечивающий заданную толщину слоя при наименьшем припуске и максимальной производительности наплавки.

Для проволоки диаметром 2 и 3 мм из стали 12X18H9T проведены аналогичные исследования.

## Глава VI

### МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ОПТИМУМА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОФАКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ

При оптимизации технологических процессов часто возникает необходимость в одновременном рассмотрении нескольких параметров оптимизации. В таких случаях решают компромиссные задачи, т. е. находят условный экстремум для одной поверхности отклика при ограничениях, налагаемых одной или несколькими другими поверхностями откликов. Так, например, режим наплавки необходимо выбрать таким, чтобы обеспечивалась заданная толщина слоя при минимальной высоте неровностей наплавленной поверхности. При обработке резанием примером компромиссной задачи может служить поиск условий, обеспечивающих минимальную шероховатость поверхности при заданной размерной стойкости инструмента. Очень часто при определении условий протекания того или иного процесса накладываются ограничения экономического характера.

Если модели для всех параметров оптимизации — линейные функции, то для решения компромиссной задачи можно пользоваться методами линейного программирования.

Однако при решении задач оптимизации технологических процессов модели для параметров оптимизации часто представлены нелинейными функциями. В этих случаях компромиссные задачи можно решать двумя способами — графоаналитическим и аналитическим. Первый способ, основанный на анализе совмещенных сечений поверхностей откликов, подробно изложен выше. Этот способ прост и отличается большой наглядностью, однако он удобен при малом числе факторов. При числе факторов  $k > 3$  способ совмещенных двумерных сечений оказывается громоздким.

#### 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ПОИСКА УСЛОВНОГО ОПТИМУМА ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

При аналитическом решении компромиссной задачи можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим сущность этого метода. Пусть требуется найти экстремум функции двух переменных

$$u = f(x, y) \quad (143)$$

при условии, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (144)$$



и из  $m+n$  уравнений (150) и (151) определить  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и вспомогательные неизвестные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Так же, как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли при найденных значениях переменных функция иметь максимум или минимум или не будет иметь ни того ни другого, остается открытым. Во многих задачах представляется возможным исходя из вспомогательных соотношений определить, максимум или минимум будет в найденной точке.

**Пример 1.** Из куска жести площадью  $2a$  необходимо изготовить в форме параллелепипеда закрытую коробку, имеющую наибольший объем. Длину, ширину и высоту коробки обозначим соответственно через  $x, y, z$ . Таким образом, задача сводится к отысканию максимума функции  $v=xyz$  при условии, что

$$2xy + 2xz + 2zy = 2a$$

или

$$xy + xz + yz - a = 0, \quad (x > 0; y > 0; z > 0). \quad (152)$$

Составляем вспомогательную функцию

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Найдем частные производные функции  $F(x, y, z, \lambda)$  по  $x, y, z$  и приравняем их нулю:

$$\left. \begin{aligned} yz + \lambda(y + z) &= 0; \\ xz + \lambda(x + z) &= 0; \\ xy + \lambda(x + y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Задача сводится к решению системы четырех уравнений (152) и (153) с четырьмя неизвестными  $x, y, z, \lambda$ . Решая указанную систему, находим, что

$x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$ ;  $\lambda = -\sqrt{\frac{a}{12}}$ . Из условий задачи объем коробки не может быть неограниченно большим, следовательно, при каких-то определенных значениях сторон этот объем будет наибольшим. Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно

$$\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Обычно возникает необходимость поиска условного экстремума в той части факторного пространства, в которой проводились эксперименты. При решении задач такого типа одной из поверхностей, налагающих ограничения, будет сфера  $\sum x_i^2 = \rho^2$  с центром  $0(x_1=0; x_2=0; \dots; x_n=0)$  и радиусом  $\rho$  [7]. Постепенно, шаг за шагом, увеличивая радиус сферы  $\rho$ , находим значения факторов, отвечающих условному экстремуму.

**Пример 2.** При наплавке проволокой диаметром 2,5 мм для толщины  $y_a$  наплавленного слоя и припуска  $y_z$  на обработку получены уравнения (136) и (135):

$$y_a = 1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,423214x_2^2;$$

$$y_z = 0,313846 - 0,1775x_1 + 0,12625x_2 + 0,14875x_3 - 0,1475x_1x_2 - 0,1625x_1x_3 + 0,0725x_2x_3 + 0,108269x_1^2 + 0,075769x_3^2.$$

Необходимо найти режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на механическую обработку. Пусть заданная толщина определяется следующим рядом ее значений:  $y_a = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5$  мм. Каждому из этих значений будет отвечать свое значение минимального припуска на обработку. Режимы, обеспечивающие выполнение изложенного требования, будут являться оптимальными. Они могут быть установлены нахождением условного

минимума функции  $y_z$  при ограничениях, налагаемых функцией  $y_a$ . Эту задачу решаем с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, для чего составляем вспомогательную функцию  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ , которая может быть представлена в следующем виде:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda[\varphi(x_1, x_2, x_3) - y_a],$$

где  $f(x_1, x_2, x_3) = 0,313846 - 0,1775x_1 + 0,12625x_2 + 0,14875x_3 - 0,1475x_1x_2 - 0,1625x_1x_3 + 0,0725x_2x_3 + 0,108269x_1^2 + 0,075769x_3^2$ , а  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,423214x_2^2$ .

Дифференцируя  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$  по  $x_1, x_2, x_3, \lambda$  и приравнявая частные производные нулю, получим систему уравнений. Решая эту систему при заданном значении  $y_a$ , находим точки условных экстремумов. Однако при решении полученной системы найденные значения  $x_1, x_2, x_3$  выходили за область эксперимента, поэтому исследуемое факторное пространство ограничили сферой  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$  и находили условные экстремумы на сферах радиуса  $\rho$ . При этом  $\rho$  увеличивали до тех пор, пока корни системы находились в области эксперимента или незначительно выходили из этой области.

Вспомогательная функция  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$  в данном случае имеет вид  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0,313846 - 0,1775x_1 + 0,12625x_2 + 0,14875x_3 - 0,1475x_1x_2 - 0,1625x_1x_3 + 0,0725x_2x_3 + 0,108269x_1^2 + 0,075769x_3^2 + \lambda_1(1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,423214x_2^2 - y_a) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \rho^2)$ .

Дифференцируя  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$  по  $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$  и приравнявая частные производные нулю, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -0,1775 - 0,1475x_2 - 0,1625x_3 + 0,216538x_1 + 0,74875\lambda_1 + 2x_1\lambda_2 &= 0; \\ 0,12625 - 0,1475x_1 + 0,0725x_3 - 1,2075\lambda_1 + 0,2725x_3\lambda_1 + 0,846428x_2\lambda_1 + 2x_2\lambda_2 &= 0; \\ 0,14875 - 0,1625x_1 + 0,0725x_2 + 0,151538x_3 - 0,66125\lambda_1 + 0,2725x_2\lambda_1 + 2x_3\lambda_2 &= 0; \end{aligned}$$

$$1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,423214x_2^2 - y_a = 0;$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \rho^2 = 0.$$

Эту систему нелинейных уравнений при принятых значениях  $y_a$  и  $\rho$  решали методом Ньютона на ЭЦВМ «Мир-1». При  $y_a = 2$  мм для различных  $\rho$  система имеет следующие корни:

$\rho$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$y_z$
0,2	0,1365	0,1046	-0,1020	0,1227	0,2010	0,2898
0,4	0,2650	0,2371	-0,1831	0,1077	0,0842	0,2751
0,6	0,4019	0,3733	-0,2431	0,0894	0,0486	0,2626
0,8	0,5489	0,5136	-0,2737	0,0708	0,0336	0,2515
1,0	0,6994	0,6589	-0,2768	0,0536	0,0272	0,2407
1,2	0,8425	0,8127	-0,2641	0,0398	0,0250	0,2293
1,3	0,9080	0,8945	-0,2557	0,0350	0,0248	0,2256
1,4	0,9679	0,9807	-0,2477	0,0322	0,0249	0,2172

Наименьший припуск ( $y_z = 0,2172$  мм) получен при  $x_1 = 0,9679$ ;  $x_2 = 0,9807$ ;  $x_3 = -0,2477$ . Переходя от кодированных значений  $x_1, x_2, x_3$  к натуральным, нахо-

дим искомый режим:  $v_a \approx 111$  м/ч;  $v_n = 61,7$  м/ч;  $t = 3,75$  мм, который обеспечивает заданную толщину слоя 2 мм при минимальном припуске  $y_z \approx 0,22$  мм. Аналогично определены режимы наплавки при  $y_a = 1; 1,5; 2,5; 3; 3,5$  мм.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ДЛЯ ПОИСКА УСЛОВНОГО ОПТИМУМА ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

При нахождении условного экстремума методом неопределенных множителей Лагранжа приходится решать систему нелинейных уравнений, что без применения ЭВМ вызывает значительные трудности. Известны другие аналитические способы решения компромиссных задач, однако все они, как правило, достаточно сложны и требуют применения ЭВМ.

Изменяя с определенным шагом каждый из факторов и вычисляя при всех сочетаниях значений факторов значения функции отклика, можно найти оптимальные условия протекания процесса. Однако таким образом можно решать компромиссные задачи только с помощью ЭВМ. С использованием ЭВМ решалась задача по определению режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку наплавленной поверхности. При наплавке проволокой диаметром 2,5 мм были получены уравнения регрессии: (136) — для толщины  $y_a$  слоя и (135) — для припуска  $y_z$  на обработку наплавленной поверхности.

При исследовании зависимостей  $y_a = f(x_1, x_2, x_3)$  и  $y_z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  с помощью ЭВМ была принята следующая расчетная схема:

- 1) фактор  $x_3$  изменяется с шагом 0,25 в пределах от  $-1$  до  $1$ ;
- 2) фактор  $x_2$  изменяется с шагом 0,05 в пределах от  $-1$  до  $1$ ;
- 3) для каждого сочетания  $x_2$  и  $x_3$  и принятого значения  $y_a$  ( $y_a = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5$ ) вычисляется  $x_1$  по выражению (136); если значение  $x_1$  находится в пределах от  $-1$  до  $1$ , то  $y_z$  вычисляются по выражению (135);

4) вычисляются следующие массивы значений  $y_z$ :

- при  $y_a = 1,0$  и  $x_3 = -1$  для различных значений  $x_2$ ;
- при  $y_a = 1,0$  и  $x_3 = -0,75$  для различных значений  $x_2$ ;
- при  $y_a = 1,0$  и  $x_3 = -0,5$  для различных значений  $x_2$ ;
- при  $y_a = 1,0$  и  $x_3 = -0,25$  для различных значений  $x_2$ ;
- при  $y_a = 1,0$  и  $x_3 = 1$  для различных значений  $x_2$ ;
- при  $y_a = 1,5$  и  $x_3 = -1$  для различных значений  $x_2$ ;

при  $y_a = 4,5$  и  $x_3 = 1$  для различных значений  $x_2$ ;

5) из каждого массива машина выбирает минимальное значение  $y_z$ ;

6) выводится на печать  $y_a$ ,  $y_{z \min}$  и значения  $x_1, x_2, x_3$ , обеспечивающие получение заданного значения  $y_a$  при  $y_{z \min}$ .

Для ЭЦВМ «Мир-1» составлена программа, позволяющая реализовать принятую расчетную схему. Эта программа приведена

работе [17]. Часть режимов, найденных в результате реализации указанной программы, приведена в табл. 60. Режимы, определенные с помощью совмещенных двумерных сечений (см. табл. 59), и режимы, полученные при расчетах на ЭЦВМ (см. табл. 60), мало отличаются друг от друга. Однако использование ЭЦВМ позволило значительно сократить время решения компромиссной задачи.

Таблица 60

Режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку ( $d_a = 2,5$  мм)

$a',$ мм	$v_a$	$v_n$	$t$	$z$	$\tau,$ мин	$a',$ мм	$v_a$	$v_n$	$t$	$z$	$\tau,$ мин
	м/ч		мм				м/ч		мм		
1,0	56,1	62,1	3,0	0,48		10,12	2,5	110,6	44,5	4,0	
1,0	64,4	62,1	3,5	0,49	8,67	2,5	110,2	38,3	4,5	0,26	10,94
1,0	72,7	62,1	4,0	0,52	7,59	2,5	109,9	32,1	5,0	0,29	11,75
1,0	79,9	60,0	4,5	0,55	6,98	3,0	64,3	32,1	3,0	0,22	19,58
1,0	87,2	56,9	5,0	0,59	6,62	3,0	77,3	31,0	3,5	0,22	17,34
1,5	77,4	62,1	3,0	0,31	10,12	3,0	87,2	29,0	4,0	0,22	16,26
1,5	85,8	62,1	3,5	0,31	8,67	3,0	97,9	26,9	4,5	0,24	15,56
1,5	94,1	62,1	4,0	0,32	7,59	3,0	109,4	24,8	5,0	0,27	15,18
1,5	102,4	62,1	4,5	0,34	6,74	3,5	55,6	24,8	3,0	0,18	25,29
1,5	110,1	60,0	5,0	0,37	6,28	3,5	65,6	22,9	3,5	0,18	23,65
2,0	98,8	62,1	3,0	0,24	10,12	3,5	76,3	20,7	4,0	0,19	22,76
2,0	107,1	62,1	3,5	0,22	8,67	3,5	96,3	20,7	4,5	0,22	20,23
2,0	111,6	58,0	4,0	0,23	8,13	4,0	57,8	20,7	3,0	0,15	30,35
2,0	111,5	49,7	4,5	0,26	8,43	4,0	77,8	20,7	3,5	0,17	26,02
2,0	110,2	41,4	5,0	0,31	9,11	4,0	97,7	20,7	4,0	0,20	22,76
2,5	108,6	54,8	3,0	0,26	11,45	4,5	79,2	20,7	3,0	0,18	30,35
2,5	94,7	43,5	3,5	0,24	12,39	4,5	99,1	20,7	3,5	0,24	26,02

Совершенство методики вычислений, получили для решения задачи более простой алгоритм. Этот алгоритм иллюстрируется блок-схемой вычислений, приведенной на рис. 17.

На схеме под  $\Delta x_2, \Delta x_3, \Delta y_a$  понимают соответственно шаг изменения факторов  $x_2$  и  $x_3$  и толщины слоя  $y_a$ , а под  $MX1, MX2, MX3$  — значения  $x_1, x_2, x_3$ , обеспечивающие заданную толщину слоя  $MYA$  при минимальном припуске  $MYZ$ .

## 3. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОИСКА УСЛОВНОГО ОПТИМУМА ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

Одна из основных задач оптимизации виброугловой наплавки формулируется следующим образом: установить условия и режимы наплавки, обеспечивающие максимальную производительность процесса при получении слоя заданной толщины. Время  $\tau$  наплавки по винтовой линии цилиндрической поверхности определяется по

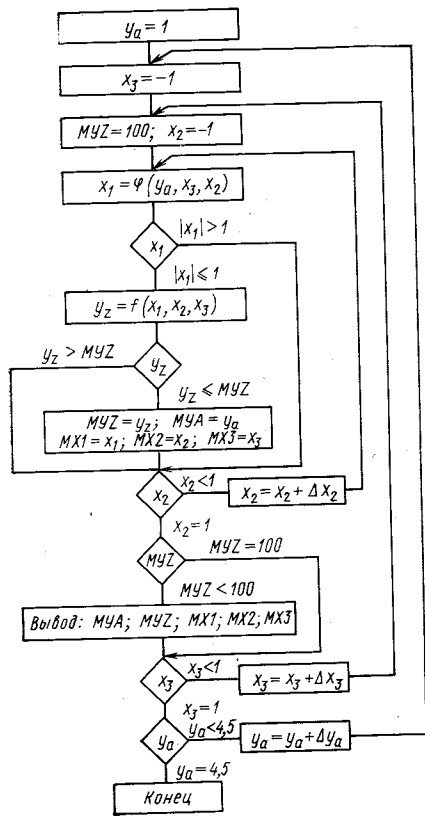


Рис. 17. Блок-схема вычислений

ления и, следовательно, улучшается сплавление основного и наплавленного металлов. Однако при увеличении  $t/b$  уменьшается толщина слоя и увеличивается глубина впадин между смежными валиками, в результате чего увеличивается припуск на обработку. При уменьшении  $t/b$  увеличивается толщина слоя и уменьшается глубина впадин между валиками, но при уменьшении шага снижается производительность наплавки и ухудшается сплавление основного и наплавленного металлов. Обычно шаг наплавки принимают равным  $(0,4 - 0,5)b$ . При таком значении  $t$  обеспечивается хорошее сплавление наплавленного и основного металлов, а глу-

формуле, аналогичной формуле машинного времени при точении этой поверхности на токарном станке (в мин)

$$\tau = \frac{L}{s_m} = \frac{L}{nt}, \quad (154)$$

где  $L$  — длина наплавляемой поверхности, мм;  $s_m$  — минутная подача, мм/мин;  $n$  — частота вращения детали, об/мин;  $t$  — шаг наплавки, мм/об.

Частота вращения детали

$$n = \frac{1000v_n}{60\pi D} = \frac{50v_n}{3\pi D}, \quad (155)$$

где  $v_n$  — скорость наплавки, м/ч;  $D$  — диаметр наплавляемой поверхности, мм.

Подставив значение  $n$  по выражению (155) в формулу (154), получим

$$\tau = \frac{3\pi DL}{50v_n t}. \quad (156)$$

Толщина  $a'$  наплавленного слоя зависит в основном от высоты  $a$  валика и отношения шага  $t$  к ширине  $b$  валика (рис. 18). С увеличением  $t/b$  улучшаются условия проплавления

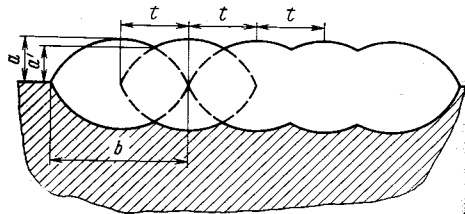


Рис. 18. Схема наплавленного слоя в продольном сечении вала

бина впадин между валиками получается незначительной. При  $t=0,5b$  (см. рис. 18), необходимую толщину слоя можно получить подбором высоты  $a$  валика.

Из выражения (156), заменив  $t$  на  $0,5b$ , получим

$$\tau = \frac{3\pi DL}{25v_n b}. \quad (157)$$

Согласно выражению (157) минимум времени наплавки достигается при максимуме  $v_n b$ . Условия наплавки, обеспечивающие максимальную производительность процесса при заданной толщине слоя, можно установить нахождением условного максимума  $v_n b$  при ограничениях, налагаемых функцией отклика для высоты валика.

Для ширины  $b$  и высоты  $a$  валика при вибродуговой наплавке стали 12X18H9T на среднеуглеродистую конструкционную сталь были получены зависимости (106) и (107). Эти зависимости получены в области изменения факторов  $2 \leq d_s \leq 4$ ;  $48 \leq v_s \leq 80$ ;  $22 \leq v_n \leq 66$ ;  $20 \leq U_p \leq 24$ ;  $0,167 \leq s_0 \leq 0,5$ .

Умножив левую и правую части уравнения (106) на  $v_n$ , получим

$$v_n b = 0,12415 d_s^{1,146} v_s^{0,524} v_n^{0,553} U_p^{0,488} (1,97 + s_0). \quad (158)$$

Выражения (107) и (158) при  $s_0 = \text{const}$  после логарифмирования линеаризуются, поэтому задача поиска максимума  $v_n b$  при ограничениях, налагаемых выражением (107) и областью эксперимента, может быть решена методами линейного программирования.

Основная задача линейного программирования состоит в следующем. Заданы называемая целевой линейная функция

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (159)$$

и система ограничений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{10} \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{20} \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= a_{m0} \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

состоящая из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В задачах линейного программирования неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называют переменными. Требуется из всех неотрицательных решений системы (160) выбрать такое, при котором функция  $Z$  имела бы экстремальное значение. Любое неотрицательное решение системы ограничений (160) называют допустимым. Допустимое решение, при котором целевая функция  $Z$  получает экстремальное значение, называют оптимальным. Для решения любых задач линейного программирования можно использовать симплексный метод. Он является одним из наиболее распространенных вычислительных методов, реализующих идею последовательного улучшения решения. Название метода произошло от термина «симплекс», что означает простейший многогранник  $n$ -мерного пространства, имеющий  $n+1$  вершину.

В основу метода положен алгоритм симплексных преобразований системы, дополненной правилом, обеспечивающим переход не к любому, а к «лучшему» опорному решению.

Для использования симплексного метода систему ограничений (160) приводят к единичному базису, т. е. к виду, в котором в  $m$  линейно независимых уравнениях  $m$  переменных выражены через остальные  $n-m$  переменные, при этом свободные члены уравнений должны быть неотрицательны. Предположим, что переменными, выраженными через остальные, являются  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . В этом случае система (160), приведенная к единичному базису, будет иметь вид

$$\begin{aligned} x_1 &+ h_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + h_{1k}x_k + \dots + h_{1n}x_n = h_{10} \\ x_2 &+ h_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + h_{2k}x_k + \dots + h_{2n}x_n = h_{20} \\ &\dots \\ x_i &+ h_{i,m+1}x_{m+1} + \dots + h_{ik}x_k + \dots + h_{in}x_n = h_{i0} \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ x_m &+ h_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + h_{mk}x_k + \dots + h_{mn}x_n = h_{m0}, \\ \text{где} & \quad h_{10} \geq 0; \dots; h_{i0} \geq 0; \dots; h_{m0} \geq 0. \end{aligned} \quad (162)$$

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называют базисными, а весь набор  $\{x_1, \dots, x_m\}$  обозначают буквой  $B$  и называют базисом. Остальные переменные ( $x_{m+1}, \dots, x_n$ ) называют небазисными или свободными. Подставляя в выражение (159) вместо базисных переменных их значения из системы (161), можно целевую функцию записать через небазисные переменные:

$$\begin{aligned} Z &= c_0 + c_1(h_{10} - h_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - h_{1n}x_n) + \dots \\ &\dots + c_m(h_{m0} - h_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - h_{mn}x_n) + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_nx_n \end{aligned}$$

или

$$Z + h_{0,m+1}x_{m+1} + \dots + h_{0k}x_k + \dots + h_{0n}x_n = h_{00}, \quad (163)$$

где

$$h_{0k} = \sum_{i=1}^m c_i h_{ik} - c_k \quad (\text{для } k = m+1, m+2, \dots, n, 0). \quad (164)$$

Равенство (163) называют приведенным (к свободным переменным) выражением для функции  $Z$ , а коэффициенты  $h_{0k}$  оценками (индексами) соответствующих свободных переменных  $x_k$ . Положим все небазисные переменные равными нулю:

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0.$$

В этом случае из (161) следует, что базисные переменные примут значения  $x_1 = h_{10}; x_2 = h_{20}; \dots; x_m = h_{m0}$ . Решение  $(h_{10}; h_{20}; \dots; h_{m0}; 0; \dots; 0)$  системы (161), полученное таким образом, вследствие условия (162) будет допустимым. Его называют исходным опорным решением, отвечающим базису  $x_1, \dots, x_m$ . Для этого решения функция  $Z$ , обозначаемая в этом случае через  $Z_B$ , будет иметь значение  $Z_B = h_{00}$ .

Симплексный метод решения задачи предусматривает выполнение ряда шагов (итераций). Каждый шаг состоит из операций пе

Таблица 61

Исходная симплексная таблица

	$c_n$	$x_n$	$h_{1n}$	$h_{2n}$	$\dots$	$h_{in}$	$\dots$	$h_{qn}$	$\dots$	$h_{mn}$	$h_{0n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_p$	$x_p$	$h_{1p}$	$h_{2p}$	$\dots$	$\dots$	$h_{ip}$	$\dots$	$h_{qp}$	$\dots$	$h_{mp}$	$h_{0p}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_k$	$x_k$	$h_{1k}$	$h_{2k}$	$\dots$	$\dots$	$h_{ik}$	$\dots$	$h_{qk}$	$\dots$	$h_{mk}$	$h_{0k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_{m+1}$	$x_{m+1}$	$h_{1,m+1}$	$h_{2,m+1}$	$\dots$	$\dots$	$h_{i,m+1}$	$\dots$	$h_{q,m+1}$	$\dots$	$h_{m,m+1}$	$h_{0,m+1}$
$c_m$	$x_m$	0	0	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_q$	$x_q$	0	0	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_i$	$x_i$	0	0	$\dots$	$\dots$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_2$	$x_2$	0	1	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$c_1$	$x_1$	1	0	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
$-\dots$	$h_{i0}$	$h_{10}$	$h_{20}$	$\dots$	$\dots$	$h_{i0}$	$\dots$	$h_{q0}$	$\dots$	$h_{m0}$	$h_{00}$
	$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$\dots$	$x_i$	$\dots$	$x_q$	$\dots$	$x_m$	$Z$
$c_l$		$c_1$	$c_2$	$\dots$	$\dots$	$c_l$	$\dots$	$c_q$	$\dots$	$c_m$	

перехода от данного базиса к последующему. Например, от исходного базиса  $B$  переходят к базису  $B_1$ , а от него — к базису  $B_2$  и т. д. Переход от очередного базиса к последующему производят так, чтобы  $Z_B \ll Z_{B_1} \ll Z_{B_2} \ll \dots \ll Z_{B_k}$ . Очередной базис, например  $B_1$ , получают удалением из базиса  $B$  одной из переменных и введением взамен ее другой, из числа имеющихся небазисных переменных. После некоторого числа таких действий приходят к базису  $B_k$ , при котором  $Z_{B_k}$  — искомый максимум функции  $Z$ , при этом соответствующее базисное решение является оптимальным.

Процесс отыскания экстремума оформляют в виде ряда однотипных таблиц, причем каждый шаг расчета завершается переходом к следующей таблице. Исходную симплексную таблицу (табл. 61) заполняют следующим образом [5]. Рабочая часть таблицы (начиная с 3-го столбца и с 3-й строки) содержит свободные члены и коэффициенты системы уравнений (161). Во 2-м столбце таблицы против строки коэффициентов каждого из уравнений указана соответствующая базисная переменная, относительно которой разрешено данное уравнение. В 1-м столбце располагают коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным. Во 2-й строке записывают переменные, а в 1-й строке — коэффициенты целевой функции, соответствующие указанным во 2-й строке переменным. В последней строке, называемой индексной, помещают оценки, вычисляемые по формуле (164). Для вычисления элемента  $h_{0k}$  индексной строки находят сумму произведений чисел 1-го столбца на соответствующие числа столбца переменной  $x_k$ , т. е.  $\sum_{i=1}^m c_i \cdot h_{ik}$ , и вычитают из этой суммы число, расположенное в 1-й строке столбца переменной  $x_k$ , т. е.  $c_k$ .

Заполнив исходную таблицу, выполняют первую итерацию согласно следующему алгоритму.

1. Выбирают разрешающий столбец (исключая 3-й) из условия: оценка  $h_{0p} < 0$  и один элемент  $h_{ip} > 0$ . Если несколько столбцов отвечают этому условию, то за разрешающий принимают тот, в котором содержится наибольшая по модулю отрицательная оценка.

2. Выбирают разрешающую строку из условия (для  $h_{ip} > 0$ )

$$\frac{h_{q0}}{h_{qp}} = \min \left\{ \frac{h_{i0}}{h_{ip}} \right\}, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (165)$$

3. Производят пересчет элементов разрешающей строки по формуле

$$h'_{qk} = \frac{h_{qk}}{h_{qp}}, \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (166)$$

4. Вычисляют элементы всех остальных строк (при  $k \neq p$ ) по выражению

$$h'_{ik} = h_{ik} - h'_{qk} h_{ip} \begin{cases} i=0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, m \\ k=0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (167)$$

Выполнив 1-й и 2-й пункты алгоритма, заполняют согласно 3-му и 4-му пунктам новую таблицу. Выполнив четыре пункта алгоритма, получают систему уравнений, приведенную к новому базису, который устанавливают следующим образом: вместо базисной переменной, находящейся в разрешающей строке, вводят новую переменную из числа небазисных, расположенную в разрешающей строке. На этом заканчивается одна итерация, после чего расчет повторяется в той же последовательности до исчезновения отрицательных чисел в индексной строке. Отсутствие отрицательных чисел в индексной строке (исключая 3-й столбец) означает получение оптимального решения. Приняв  $s_0 = 0,5$ , получим вместо (158) и (107) следующие выражения:

$$v_n b = 0,30665 d_3^{1,146} v_3^{0,524} v_n^{0,553} U_p^{0,488}; \quad (168)$$

$$a = 2,66161 \frac{a_3^{0,481} v_3^{0,47}}{U_p^{0,418} v_n^{0,406}}. \quad (169)$$

Логарифмируя выражения (168) и (169), находим

$$\lg(v_n b) = \lg 0,30665 + 1,146 \lg d_3 + 0,524 \lg v_3 + 0,553 \lg v_n + 0,488 \lg U_p; \quad (170)$$

$$\lg(a) = \lg 2,66161 + 0,481 \lg d_3 + 0,47 \lg v_3 - 0,418 \lg U_p - 0,406 \lg v_n. \quad (171)$$

Вводим обозначения:  $\lg(v_n b) = Z$ ;  $\lg d_3 = x_1$ ;

$$\lg v_3 = x_2; \quad \lg v_n = x_3; \quad \lg U_p = x_4; \quad \lg(a) = A.$$

С учетом этих обозначений выражения (170) и (171) примут вид

$$Z = -0,51336 + 1,146x_1 + 0,524x_2 + 0,553x_3 + 0,488x_4, \quad (172)$$

$$A = 0,42514 + 0,481x_1 + 0,47x_2 - 0,406x_3 - 0,418x_4. \quad (173)$$

Переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  имеют область изменения

$$\left. \begin{aligned} \lg 2 \leq x_1 \leq \lg 4 & \text{ или } 0,30103 \leq x_1 \leq 0,60206; \\ \lg 48 \leq x_2 \leq \lg 80 & \text{ „ } 1,68124 \leq x_2 \leq 1,90309; \\ \lg 22 \leq x_3 \leq \lg 66 & \text{ „ } 1,34242 \leq x_3 \leq 1,81954; \\ \lg 20 \leq x_4 \leq \lg 24 & \text{ „ } 1,30103 \leq x_4 \leq 1,38021. \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

В рассматриваемом случае задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти удовлетворяющую системе ограничений

$$\left. \begin{aligned} 0,481x_1 + 0,47x_2 - 0,406x_3 - 0,418x_4 &= A - 0,42514; \\ 0,30103 \leq x_1 \leq 0,60206; & 1,68124 \leq x_2 \leq 1,90309; \\ 1,34242 \leq x_3 \leq 1,81954; & 1,30103 \leq x_4 \leq 1,38021 \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

совокупность значений  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , при которых целевая функция (172) достигает максимума. Для использования симплекс-метода систему ограничений (175) приводят к системе вида (161),

выполнив для этого следующие операции: 1) неравенства системы (175) заменяют равенствами; 2) полученную систему уравнений приводят к единичному базису. Неравенства (174) записываем в виде

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0,30103; \quad x_1 \leq 0,60206; \quad x_2 \geq 1,68124; \quad x_2 \leq 1,90309; \\ x_3 \geq 1,34242; \quad x_3 \leq 1,81954; \quad x_4 \geq 1,30103; \quad x_4 \leq 1,38021. \end{aligned} \quad (176)$$

Неравенства типа  $x_i \geq b_i$  заменой переменных можно исключить из ограничений. Запишем указанное неравенство в виде  $x_i - b_i \geq 0$ . Заменяя  $x_i - b_i$  новой переменной  $x_i'$ , получим  $x_i' \geq 0$ . Новая переменная  $x_i'$  отвечает условию неотрицательности. Используя равенство  $x_i' = x_i - b_i$  и систему неравенств (176), введем новые переменные  $x_1', x_2', x_3', x_4'$

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 - 0,30103; \quad x_2' = x_2 - 1,68124; \\ x_3' &= x_3 - 1,34242; \quad x_4' = x_4 - 1,30103. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Из равенства (177) находим  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1' + 0,30103; \quad x_2 = x_2' + 1,68124; \\ x_3 &= x_3' + 1,34242; \quad x_4 = x_4' + 1,30103. \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

В целевую функцию (172), в уравнение (173) и в неравенства (176) подставляем вместо  $x_1, x_2, x_3, x_4$  их значения, выраженные через  $x_1', x_2', x_3', x_4'$ :

$$\begin{aligned} Z = -0,51336 + 1,146(x_1' + 0,30103) + 0,524(x_2' + 1,68124) + \\ + 0,553(x_3' + 1,34242) + 0,488(x_4' + 1,30103) = 2,08985 + \\ + 1,146x_1' + 0,524x_2' + 0,553x_3' + 0,488x_4'; \end{aligned} \quad (179)$$

$$0,481x_1' + 0,47x_2' - 0,406x_3' - 0,418x_4' = A - 0,27126; \quad (180)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1' + 0,30103 &\leq 0,60206; \quad x_1' \leq 0,30103; \\ x_2' + 1,68124 &\leq 1,90309; \quad x_2' \leq 0,22185; \\ x_3' + 1,34242 &\leq 1,81954; \quad x_3' \leq 0,47712; \\ x_4' + 1,30103 &\leq 1,38021; \quad x_4' \leq 0,07918. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Система ограничений (175) после замены переменных оказалась представленной уравнением (180) и неравенствами (181). Неравенства (181) превращаем в равенства, добавляя к каждому из неравенств соответствующую неотрицательную величину. Эти неотрицательные величины называют балансowymi переменными. Добавив к первому неравенству  $x_5 \geq 0$ , ко второму неравенству  $x_6 \geq 0$ , к третьему  $x_7 \geq 0$  и к четвертому  $x_8 \geq 0$ , получим

$$\begin{aligned} x_1 + x_5 = 0,30103; \quad x_2 + x_6 = 0,22185; \\ x_3 + x_7 = 0,47712; \quad x_4 + x_8 = 0,07918. \end{aligned}$$

В целевую функцию балансowymi переменные вводят с нулевыми коэффициентами. После замены переменных и введения балансowych переменных целевая функция и система ограничений (175) получают вид

$$\begin{aligned} Z = 2,08985 + 1,146x_1' + 0,524x_2' + 0,553x_3' + 0,488x_4' + \\ + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8. \\ \left. \begin{aligned} 0,481x_1' + 0,47x_2' - 0,406x_3' - 0,418x_4' &= A - 0,27126; \\ x_1' + x_5 &= 0,30103; \quad x_2' + x_6 = 0,22185; \\ x_3' + x_7 &= 0,47712; \quad x_4' + x_8 = 0,07918. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Приняв высоту валика  $a = 2$  мм, подставляем вместо  $A$  в первое уравнение системы (182)  $lga = l g 2 = 0,30103$ , после чего система (182) получает вид

$$\left. \begin{aligned} 0,481x_1' + 0,47x_2' - 0,406x_3' - 0,418x_4' &= 0,02977; \\ x_1' + x_5 &= 0,30103; \quad x_2' + x_6 = 0,22185; \\ x_3' + x_7 &= 0,47712; \quad x_4' + x_8 = 0,07918. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Приведем систему (183) к единичному базису, для чего используем метод последовательных исключений. Поделив все члены первого уравнения системы (183) на коэффициент при  $x_1'$ , получим

$$x_1' + 0,97713x_2' - 0,84407x_3' - 0,86902x_4' = 0,06189. \quad (184)$$

После этого умножаем все члены уравнения (184) на коэффициент при  $x_1'$  во втором уравнении системы (183). Этот коэффициент равен единице, поэтому уравнение (184) остается неизменным. Из второго уравнения системы (183) вычитаем уравнение (184) и получаем

$$-0,97713x_2' + 0,84407x_3' + 0,86902x_4' + x_5 = 0,23914.$$

В третьем, четвертом и пятом уравнениях системы (183) коэффициент при  $x_1'$  равен нулю, поэтому указанные уравнения остаются неизменными. Система (183) после выполненных преобразований получает вид

$$\left. \begin{aligned} x_1' + 0,97713x_2' - 0,84407x_3' - 0,86902x_4' &= 0,06189; \\ -0,97713x_2' + 0,84407x_3' + 0,86902x_4' + x_5 &= 0,23914; \\ x_2' + x_6 &= 0,22185; \quad x_3' + x_7 = 0,47712; \\ x_4' + x_8 &= 0,07918. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Система уравнений (185) приведена к единичному базису, так как первое уравнение системы разрешено относительно  $x_1'$ , второе — относительно  $x_5$ , третье — относительно  $x_6$ , четвертое — относительно  $x_7$  и пятое — относительно  $x_8$ . Переменные  $x_1', x_5, x_6, x_7, x_8$



Симплексная таблица ( $a=2$  мм;  $s_0=0,5$ )

$c_i$	$x_i$	$b_{i0}$	0,524	0,553	0,488	1,146	0	$x_6$	$x_7$	0
1,146	$x'_1$	0,06189	0,97713	-0,84407	-0,86902	1	0	0	0	0
0	$x_5$	0,23914	-0,97713	0,84407	-0,86902	0	1	0	0	0
0	$x_6$	0,22185	1	0	0,86902	0	0	1	0	0
0	$x_7$	0,47712	0	1	0	0	0	0	1	0
0	$x_8$	0,07918	0	0	1	0	0	0	0	1
	Z	2,16078	0,59579	-1,52030	-1,48390	0	0	0	0	0

## I итерация

	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
1,146	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
0,553	$x'_3$	0,28332	-1,15764	1	1,02956	0	1,18474	0	0	0
0	$x_6$	0,22185	1	0	0	0	0	1	0	0
0	$x_7$	0,1938	1,15764	0	-1,02956	0	-1,18474	0	1	0
0	$x_8$	0,07918	0	0	1	0	0	0	0	1
	Z	2,5915	-1,16417	0	0,08134	0	1,80115	0	0	0

## II итерация

	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
1,146	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
0,553	$x'_3$	0,47712	0	1	0	0	0	0	0	0
0	$x_6$	0,05444	0	0	0,88936	0	1,02341	1	-0,86383	0
0,524	$x'_2$	0,16741	1	0	-0,88936	0	-1,02341	0	0,86383	0
0	$x_8$	0,07918	0	0	1	0	0	0	0	1
	Z	2,78639	0	0	-0,95403	0	0,60973	0	1,00564	0

## III итерация

	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
1,146	$x'_1$	0,30103	0	0	0	1	1	0	0	0
0,553	$x'_3$	0,47712	0	1	0	0	0	0	1	0
0,488	$x'_4$	0,06121	0	0	1	0	1,15073	1,12440	-0,97129	0
0,524	$x'_2$	0,22185	1	0	0	0	0	1	0	0
0	$x_8$	0,01797	0	0	0	0	-1,15073	-1,12440	0,97129	1
	Z	2,84479	0	0	0	0	1,70756	1,07272	0,07900	0

являются базисными. Этому базису соответствует следующее решение системы (185):

$$x_1 = 0,06189; x_5 = 0,23914; x_6 = 0,22185; \\ x_7 = 0,47712; x_8 = 0,07918; x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Решение является допустимым, так как все значения переменных неотрицательны. Указанному решению соответствует значение целевой функции:  $Z = 2,08985 + 1,146 \cdot 0,06189 = 2,16078$ . Для нахождения оптимального решения составляем исходную симплексную таблицу (верхняя часть табл. 62), заполняя ее аналогично табл. 61, а именно: в первом столбце исходной таблицы указываем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным, приведенным во втором столбце; в первой строке записываем коэффициенты этой функции, соответствующие переменным, расположенным во второй строке.

Находим элементы  $h_{0k}$  индексной строки. Для нахождения индекса столбца необходимо: 1) умножить элементы первого столбца на соответствующие элементы столбца, для которого вычисляется индекс; 2) сложить полученные произведения; 3) из найденной суммы вычесть значение элемента первой строки, соответствующего данному столбцу. Например, индекс третьего столбца равен  $[1,146 \cdot 0,06189 + 0 \cdot 0,23914 + 0 \cdot 0,22185 + 0 \cdot 0,47712 + 0 \cdot 0,07918] - (-2,08985) = 2,16078$ . Аналогично вычисляют индексы других столбцов таблицы. Переход к новому базису производим по алгоритму симплексных преобразований. Согласно 1-му пункту алгоритма выбираем разрешающий столбец. В индексной строке наибольшее по модулю отрицательное число равно  $-1,52030$  (5-й столбец). В этом столбце имеются элементы больше нуля. Пятый столбец, отвечающий всем условиям первого пункта алгоритма, принимаем в качестве разрешающего. Согласно 2-му пункту алгоритма делим соответствующие числа столбца констант (3-й столбец) на положительные числа разрешающего столбца и получаем  $\frac{0,23914}{0,84407} = 0,28332 <$

$< \frac{0,47712}{1} = 0,47712$ . Разрешающей является строка, содержащая наименьшее частное. В данном случае разрешающей будет строка базисной переменной  $x_5$ . Выполнив 1-й и 2-й пункты алгоритма, заполняем согласно 3-му и 4-му пунктам I итерацию. Вместо находящейся в разрешающей строке переменной  $x_5$  вводим расположенную в разрешающем столбце переменную  $x_3'$ . Согласно 3-му пункту алгоритма по формуле (166) пересчитываем элементы разрешающей строки исходной таблицы. Пересчитанные элементы будут являться элементами строки, соответствующей новой базисной переменной  $x_3'$  в таблице I итерации. Для вычисления элементов этой строки необходимо элементы 4-й строки исходной таблицы поделить на величину  $h_{qp} = 0,84407$ , расположенную на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца. Выполнив указанную операцию, получим следующие значения элементов второй строки таблицы I итерации:

$$\frac{0,23914}{0,84407} = 0,28332; \frac{-0,97713}{0,84407} = -1,15764; \frac{0,84407}{0,84407} = 1; \\ \frac{0,86902}{0,84407} = 1,02956; \frac{0}{0,84407} = 0; \frac{1}{0,84407} = 1,18474; \\ \frac{0}{0,84407} = 0; \frac{0}{0,84407} = 0; \frac{0}{0,84407} = 0.$$

Согласно 4-му пункту алгоритма по формуле (167) рассчитываем остальные элементы таблицы I итерации. Например, элементы 3-го столбца будут иметь следующие значения:

$$0,06189 - 0,28332 \cdot (-0,84407) = 0,30103; \\ 0,22185 - 0,28332 \cdot 0 = 0,22185; 0,47712 - 0,28332 \cdot 1 = 0,1938; \\ 0,07918 - 0,28332 \cdot 0 = 0,07918.$$

В результате I итерации получили таблицу, которой соответствует допустимое решение:  $x_1' = 0,30103$ ;  $x_3' = 0,28332$ ;  $x_6 = 0,22185$ ;  $x_7 = 0,1938$ ;  $x_8 = 0,07918$ ;  $x_2' = x_4' = x_5 = 0$  и значение целевой функции  $Z = 2,5915$ . Полученное решение не является оптимальным, так как в индексной строке имеется отрицательное число ( $-1,16417$ ). После II итерации получено допустимое решение:  $x_1' = 0,30103$ ;  $x_2' = 0,16741$ ;  $x_3' = 0,47712$ ;  $x_6 = 0,05444$ ;  $x_8 = 0,07918$ ;  $x_4' = x_5 = x_7 = 0$ , которое также не является оптимальным, так как в индексной строке содержится отрицательное число ( $-0,95403$ ).

Итерация III приводит к допустимому решению:  $x_1' = 0,30103$ ;  $x_2' = 0,22185$ ;  $x_3' = 0,47712$ ;  $x_4' = 0,06121$ ;  $x_5 = x_6 = x_7 = 0$ ;  $x_8 = 0,01797$ , которое является оптимальным, так как в индексной строке отрицательные числа отсутствуют. Используя соотношения (178), переходим от  $x_1', x_2', x_3', x_4'$  к переменным  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$x_1 = x_1' + 0,30103 = 0,60206; \\ x_2 = x_2' + 1,68124 = 1,90309; \\ x_3 = x_3' + 1,34242 = 1,81954; \\ x_4 = x_4' + 1,30103 = 1,36224.$$

Найденное решение определяет оптимальные условия вибродуговой наплавки стали 12X18H9T на среднеуглеродистую конструкционную сталь. Оптимальные условия представляют собой совокупность следующих величин:  $d_a = 4$  мм;  $v_a = 80$  м/ч;  $v_n = 66$  м/ч;  $U_p = 23$  В. Эти условия ведения процесса обеспечивают максимальную производительность наплавки при  $s_0 = 0,5$  и заданной высоте валика  $a = 2$  мм. Аналогично решалась задача при высоте валика  $a = 2,5$  мм. При некоторых значениях  $a$  приведение системы ограничений к единичному базису усложнялось. Например, при  $a = 3$  мм  $\lg 3 = 0,47712$ . В этом случае первое уравнение системы (182) после деления его членов на коэффициент при  $x_1'$ , равный 0,481, получает вид

$$x_1' + 0,97713x_2' - 0,84407x_3' - 0,86902x_4' = 0,42798.$$

Вычитая это выражение из второго уравнения системы (182), получим  $-0,97713x_2' + 0,84407x_3' + 0,86902x_4' + x_5 = -0,12695$ . Пра-

вая часть последнего уравнения отрицательна, что противоречит условию (162). В подобных случаях поиск исходного базисного решения осуществляют симплексным методом с искусственным базисом, т. е. М-методом [5]. Симплексным методом с искусственным базисом производили поиск максимума  $v_n$  при  $a=3$  мм. Найденное решение соответствовало оптимальному режиму наплавки:  $d_0=4$  мм;  $v_0=80$  м/ч;  $v_n=28,11$  м/ч;  $U_p=20$  В. Этот режим обеспечивает максимальную производительность при высоте валика 3 мм и  $s_0=0,5$ . Аналогично определены режимы максимальной производительности при высоте валика  $a=1,25$  мм и  $a=1,5$  мм. Задача поиска режимов, обеспечивающих максимальную производительность наплавки при заданной высоте валика, решена также для  $s_0=0,333$ . Результаты решения задачи были подвергнуты экспериментальной проверке, которая установила близкое соответствие экспериментальных данных расчетным.

Сопоставление полученных с помощью пробных наплавочных режимов с оптимальными показало, что применение оптимальных режимов сокращает машинное время наплавки в 1,5—3 раза.

Изложенная методика может быть применена для оптимизации вибродуговой наплавки при использовании проволоки из сталей других марок и для оптимизации ряда электрофизических процессов обработки металлов.

В заключение следует отметить, что кроме рассмотренных в данной главе методов на практике достаточно распространен многомерный случайный поиск. Метод случайного поиска обладает тем преимуществом, что не требует никаких предположений о поверхности отклика. Если, например, поверхность отклика многоэкстремальная, то этим методом, выбирая достаточно малые ячейки, можно обнаружить все локальные экстремумы и выбрать из них наилучший.

## Глава VII

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА В ТЕХНОЛОГИИ МАШИНОСТРОЕНИЯ И ПРИ ОБРАБОТКЕ МАТЕРИАЛОВ РЕЗАНИЕМ

Процессы обработки материалов резанием являются сложными многофакторными процессами. В этих процессах исследуемая величина часто является случайной величиной, зависящей от большого числа контролируемых и неконтролируемых факторов. Поэтому процессы резания все чаще стали рассматривать с вероятностно-статистических позиций, а при экспериментальных исследованиях применять методы планирования эксперимента, базирующиеся на идеях математической статистики.

#### 1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БОКСА—УИЛСОНА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

При поиске оптимальных условий протекания различных процессов обработки материалов резанием может быть с успехом использован метод крутого восхождения. Этот метод позволяет резко сократить число опытов, получить количественные оценки влияния отдельных факторов и их взаимодействий на изучаемый параметр, установить оптимальные значения параметров процесса или оптимальные значения параметров инструмента. Так, например, в одной из задач требовалось установить влияние заднего угла  $\alpha$ , переднего угла  $\gamma$ , главного угла в плане  $\phi$ , вспомогательного угла в плане  $\phi_1$ , радиуса при вершине  $r$  на стойкость  $T$  токарного резца и определить значения этих геометрических параметров, обеспечивающие максимальную стойкость резца при обработке аустенитной стали на заданном режиме. На основании априорной информации были выбраны основные уровни и интер-

Таблица 63

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы, град	Кодовое обозначение	Интервалы варьирования	Уровни факторов		
			верхний +1	основной 0	нижний -1
$\gamma$ — передний угол	$x_1$	2	-3	-5	-7
$\alpha$ — задний угол	$x_2$	2	14	12	10
$\phi_1$ — вспомогательный угол в плане	$x_3$	4	20	16	12
$\phi$ — главный угол в плане	$x_4$	10	45	35	25
$r$ — радиус при вершине, мм	$x_5$	0,5	1,5	1,0	0,5

Таблица 64

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$ (T), мин
1	+	-	-	-	+	-	34,7
2	+	+	-	-	-	+	29,8
3	+	-	+	-	-	+	42,5
4	+	+	+	-	+	-	39,2
5	+	-	-	+	+	+	35,5
6	+	+	-	+	-	-	16,7
7	+	-	+	+	-	-	31,0
8	+	+	+	+	+	+	39,6

валы варьирования факторов (табл. 63). Приняв в качестве параметра оптимизации стойкость  $T$  резца и обозначив ее через  $y$ , использовали для крутого восхождения линейную модель

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5.$$

На первом этапе исследования в качестве плана эксперимента приняли 1/4-реплику ( $2^{5-2}$ ) от полного факторного эксперимента  $2^5$ . Реплика задана генерирующими соотношениями  $x_4 = x_1x_2$ ;  $x_5 = x_1x_2x_3$ . Матрица планирования и результаты опытов приведены в табл. 64. Значения коэффициентов находили по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij}y_j}{N},$$

где  $x_{ij}$  — кодированное значение ( $\pm 1$ )  $i$ -го фактора в  $j$ -м опыте;  $y_j$  — значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;  $N$  — число опытов в матрице планирования.

$$\text{Например } b_0 = \frac{\sum_{j=1}^8 x_{0j}y_j}{8} = 33,625; \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^8 x_{1j}y_j}{8} = -2,3 \text{ и т. д.}$$

Для остальных коэффициентов получили следующие значения:  $b_2 = 4,45$ ;  $b_3 = -2,925$ ;  $b_4 = 3,625$ ;  $b_5 = 3,225$ .

Дисперсию  $s_y^2$  параметра оптимизации вычисляли по результатам четырех опытов в центре плана, т. е. при  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ . Расчет дисперсии  $s_y^2$  приведен в табл. 65. Дисперсии коэффициентов регрессии

$$s^2\{b_i\} = \frac{s_y^2}{N} = \frac{0,153}{8} = 0,0191.$$

Доверительный интервал коэффициентов

$$\Delta b_i = \pm t s\{b_i\} = \pm 3,18 \sqrt{0,0191} = \pm 0,44,$$

где  $t$  — табличное значение критерия Стьюдента, равное 3,18 при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы  $f = 3$ .

Вспомогательная таблица для расчета  $s_y^2$ 

Таблица 65

Номер опыта в центре плана	$y_u$	$\bar{y}$	$y_u - \bar{y}$	$(y_u - \bar{y})^2$	$s_y^2$
1	33,1	$\frac{\sum_{u=1}^4 y_u}{4} = \frac{134,4}{4} = 33,6$	-0,5	0,25	$\frac{\sum_{u=1}^4 (y_u - \bar{y})^2}{4 - 1} = \frac{0,46}{3} = 0,153$
2	33,5		-0,1	0,01	
3	34,0		0,4	0,16	
4	33,8		0,2	0,04	
$\sum_{u=1}^4 y_u = 134,4$			$\sum_{u=1}^4 (y_u - \bar{y})^2 = 0,46$		

Примечание.  $n_0$  — число опытов в центре плана;  $y_u$  — значение параметра оптимизации в  $u$ -м опыте в центре плана.

Так как абсолютные величины коэффициентов регрессии больше доверительного интервала, то все они являются статистически значимыми.

Уравнение регрессии с кодированными переменными имеет вид

$$y = 33,625 - 2,3x_1 + 4,45x_2 - 2,925x_3 + 3,625x_4 + 3,225x_5. \quad (186)$$

Для проверки гипотезы адекватности модели, представленной уравнением (186), находим дисперсию адекватности

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{f}, \quad (187)$$

где  $y_j$  — экспериментальное значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;  $\hat{y}_j$  — значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте, вычисленное по уравнению (186);  $f$  — число степеней свободы,  $f = N - (k + 1)$ ;  $k$  — число факторов, равное 5.

Для вычисления суммы, входящей в выражение (187), составим вспомогательную таблицу (табл. 66). При вычислении значений  $\hat{y}_i$  в уравнение (186) необходимо подставлять кодированные значения факторов. Например, в первом опыте кодированные значения факторов  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = -1$ ;  $x_4 = +1$ ;  $x_5 = -1$ . Следовательно,  $\hat{y}_1 = 33,625 - 2,3(-1) + 4,45(-1) - 2,925(-1) + 3,625(+1) + 3,225(-1) = 34,8$ . Подставляя полученное значение суммы (см. табл. 66) в выражение (187), находим

Таблица 66

Вспомогательная таблица для расчета  $s_{ад}^2$ 

Номер опыта	$y_j$	$\hat{y}_j$	$y_j - \hat{y}_j$	$(y_j - \hat{y}_j)^2$	Номер опыта	$y_j$	$\hat{y}_j$	$y_j - \hat{y}_j$	$(y_j - \hat{y}_j)^2$
1	34,7	34,8	-0,1	0,01	6	16,7	17,1	-0,4	0,16
2	29,8	29,4	0,4	0,16	7	31,0	30,6	0,4	0,16
3	42,5	42,9	-0,4	0,16	8	39,6	39,7	-0,1	0,01
4	39,2	39,1	0,1	0,01					
5	35,5	35,4	0,1	0,01					
					$\sum_{j=1}^8 (y_j - \hat{y}_j)^2 = 0,68$				

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{f} = \frac{\sum_{j=1}^8 (y_j - \hat{y}_j)^2}{N - (k + 1)} = \frac{0,68}{8 - (5 + 1)} = 0,34.$$

Дисперсию адекватности можно также определить по выражению

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j^2 - N \sum_{i=0}^k b_i^2}{f} = 0,34.$$

Дисперсия  $s_y^2 = 0,153$  (см. табл. 65).

Проверку гипотезы адекватности модели производили по F-критерию Фишера. Для этого находили расчетное значение критерия

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} = 2,22.$$

При 5%-ном уровне значимости и числах степеней свободы для числителя  $f_1 = 2$  и для знаменателя  $f_2 = 3$  табличное значение критерия  $F_T = 9,55$ . Так как  $F_p < F_T$ , то модель, представленная уравнением (186), адекватна.

Убедившись в адекватности уравнения (186), переходим к крутому восхождению. Крутое восхождение начинаем из центра плана, т. е. из точки с координатами  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ , что соответствует  $\gamma = -5^\circ$ ;  $\alpha = 12^\circ$ ;  $\varphi_1 = 16^\circ$ ;  $\varphi = 35^\circ$ ;  $r = 1,0$  мм.

Шаг движения по градиенту для радиуса  $r$  принимаем равным  $\Delta_5 = 0,3$ . Для остальных факторов шаг движения  $\Delta_i$  вычисляем по формуле

$$\Delta_i = \Delta_l \frac{b_i \varepsilon_l}{b_l \varepsilon_i},$$

где  $\Delta_l$  — принятый шаг движения по градиенту для  $l$ -го фактора;  $\varepsilon_i, \varepsilon_l$  — интервалы варьирования  $i$ -го и  $l$ -го факторов.

Например, для первого фактора  $\gamma$  шаг движения по градиенту

$$\Delta_1 = \Delta_5 \frac{b_1 \varepsilon_1}{b_5 \varepsilon_5} = 0,3 \frac{(-2,3)2}{3,225 \cdot 0,5} = -0,86,$$

или округленно  $\Delta_1 \approx -1$ .

Шаг движения по градиенту для остальных факторов указан в табл. 67.

Расчет крутого восхождения

Таблица 67

Наименование	$\gamma$	$\alpha$	$\varphi_1$	$\varphi$	$r$	$T$ , мин
Основной уровень	-5	12	16	35	1,0	—
Коэффициент $b_i$	-2,3	4,45	-2,925	3,625	3,225	—
Интервал варьирования $\varepsilon_i$	2	2	4	10	0,5	—
$b_i \times \varepsilon_i$	-4,6	8,9	-11,7	36,25	1,6125	—
Шаг движения по градиенту	-0,86	1,66	-2,18	6,74	0,3	—
Округленный шаг	-1	2	-2	7	0,3	—
Опыт 9 мысленный	-6	14	14	42	1,3	—
Опыт 10 реализованный	-7	16	12	49	1,6	45,0
Опыт 11 реализованный	-8	18	10	56	1,9	52,9
Опыт 12 реализованный	-9	20	8	63	2,2	50,3

Вычислив шаг движения по градиенту для каждого фактора, приступаем к расчету опытов в направлении градиента. Для расчета условий первого опыта к основному уровню каждого из факторов необходимо прибавить соответствующее значение шага движения по градиенту. Для определения условий каждого последующего опыта к значению каждого из факторов в предыдущем опыте необходимо прибавить соответствующее значение шага. Например, в первом опыте в направлении градиента (опыт 9, табл. 67) значения факторов должны быть следующими:

$$\gamma = -5 - 1 = -6; \alpha = 12 + 2 = 14; \varphi_1 = 16 - 2 = 14;$$

$$\varphi = 35 + 7 = 42; r = 1,0 + 0,3 = 1,03.$$

Опыты 10, 11 и 12 реализованы. В опыте 11 получена максимальная стойкость резца  $T = 52,9$  мин. После определения условий наилучшего опыта можно закончить исследование, если полученное значение параметра оптимизации устраивает исследователя. Если есть основания считать, что область оптимума не достигнута, то необходимо, приняв условия наилучшего опыта за центр плана, провести новую серию опытов, вычислить коэффициенты линейной модели и вновь произвести крутое восхождение.

При решении данной задачи оптимальная геометрия токарного резца  $\gamma = -8^\circ$ ;  $\alpha = 18^\circ$ ;  $\varphi_1 = 10^\circ$ ;  $\varphi = 56^\circ$ ;  $r = 1,9$  мм.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ РОТАТАБЕЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ТОРЦОВОГО ФРЕЗЕРОВАНИЯ

Требовалось установить зависимость максимальной тангенциальной составляющей  $P_T$  силы резания от элементов геометрии зуба торцовой фрезы при фрезеровании высокопрочного чугуна. В качестве влияющих факторов рассматривали следующие элементы геометрии зуба фрезы: главный угол  $\varphi$  в плане, угол наклона  $\lambda$  режущей кромки и передний угол  $\gamma$ .

Зависимость  $P_T = f(\varphi, \lambda, \gamma)$  было решено аппроксимировать полиномом второй степени. Эксперимент проведен по программе центрального композиционного ротатабельного планирования второго порядка. Принятые в исследовании уровни и интервалы варьирования факторов указаны в табл. 68.

Таблица 68

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы, град	Кодовое обозначение	Интервалы варьирования	Натуральные уровни факторов, соответствующие кодированным				
			+1,682	+1	0	-1	-1,682
$\varphi$ — главный угол в плане	$x_1$	15	85	75	60	45	35
$\lambda$ — угол наклона режущей кромки	$x_2$	6	15	11	5	-1	-5
$\gamma$ — передний угол	$x_3$	6	20	16	10	4	0

Матрица планирования и результаты опытов приведены в табл. 69. Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка для трех факторов состоит из плана полного факторного эксперимента типа  $2^3$  (см. табл. 69, опыты 1—8), шести опытов в «звездных точках» (опыты 9—14) и шести опытов в центре плана (опыты 15—20).

По результатам опытов, выполненных в соответствии с принятым планом эксперимента, можно оценить коэффициенты уравнения регрессии вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2. \quad (188)$$

Коэффициенты уравнения (188) определяли по формулам (77)—(80). При  $k=3$  формулы (77)—(80) для вычисления коэффициентов уравнения примут вид

$$b_0 = 0,16666 \sum_{j=1}^{20} y_j - 0,05694 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{20} x_{ij}^2 y_j;$$

$$b_i = 0,07322 \sum_{j=1}^{20} x_{ij} y_j; \quad b_{ii} = 0,125 \sum_{j=1}^{20} x_{ij} x_{ij} y_j;$$

$$b_{ii} = 0,06254 \sum_{j=1}^{20} x_{ij}^2 y_j + 0,00695 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{20} x_{ij}^2 y_j - 0,05694 \sum_{j=1}^{20} y_j.$$

По данным табл. 69, суммы, входящие в формулы для расчета коэффициентов уравнения:

$$\sum_{j=1}^{20} y_j = 24438; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{1j} y_j = -150,92; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{2j} y_j = 491,84;$$

$$\sum_{j=1}^{20} x_{3j} y_j = -973,68;$$

$$\sum_{j=1}^{20} x_{1j} x_{2j} y_j = -20; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{1j} x_{3j} y_j = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{20} x_{2j} x_{3j} y_j = 0; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 y_j = 17601,72;$$

$$\sum_{j=1}^{20} x_{2j}^2 y_j = 16696,44; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{3j}^2 y_j = 16696,44; \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{20} x_{ij}^2 y_j = 50994,6.$$

Используя приведенные выше формулы, находим коэффициенты уравнения регрессии (188):

$$b_0 = 0,16666 \cdot 24438 - 0,05694 \cdot 50994,6 = 1169,204; \quad b_1 = 0,07322 \times (-150,92) = -11,05; \quad b_2 = 0,07322 \cdot 491,84 = 36,012; \quad b_3 = 0,07322 \times (-973,68) = -71,293; \quad b_{12} = 0,125 (-20) = -2,5; \quad b_{13} = 0,125 \cdot 0 = 0; \quad b_{23} = 0,125 \cdot 0 = 0; \quad b_{11} = 0,06254 \cdot 17601,72 + 0,00695 \cdot 50994,6 - 0,05694 \times 24438 = 63,724; \quad b_{22} = 0,06254 \cdot 16696,44 + 0,00695 \cdot 50994,6 - 0,05694 \times 24438 = 7,108; \quad b_{33} = 0,06254 \cdot 16696,44 + 0,00695 \cdot 50994,6 - 0,05694 \times 24438 = 7,108.$$

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости определяем по результатам опытов в центре плана. Для вычисления  $s_y^2$  составили вспомогательную таблицу (табл. 70).

Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии, вычисляли по формулам (81), (82), (83), (84). При  $k=3$  эти формулы примут вид

$$s^2 \{b_0\} = 0,16666 s_y^2; \quad s^2 \{b_i\} = 0,07322 s_y^2;$$

$$s^2 \{b_{ii}\} = 0,125 s_y^2; \quad s^2 \{b_{ij}\} = 0,0695 s_y^2.$$

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии

$$s^2 \{b_0\} = 220,1; \quad s^2 \{b_i\} = 96,7; \quad s^2 \{b_{ii}\} = 165,1; \quad s^2 \{b_{ij}\} = 91,8.$$

Определяем доверительные интервалы для коэффициентов:

$$\Delta b_0 = \pm t s \{b_0\} = \pm 38,128;$$

$$\Delta b_i = \pm t s \{b_i\} = \pm 25,272;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm t s \{b_{ii}\} = \pm 33,02;$$

$$\Delta b_{ij} = \pm t s \{b_{ij}\} = \pm 24,622,$$

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y, H (P_{\text{т}})$
1	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1210
2	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1350
3	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1140
4	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1285
5	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1225
6	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1370
7	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1150
8	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	1290
9	+++++	+1,682 -1,682	0	0	0	0	0	2,829	0	0	1310
10	+++++	0	+1,628 -1,628	0	0	0	0	2,829	0	0	1370
11	+++++	0	0	0	0	0	0	0	2,829	0	1240
12	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	2,829	1120
13	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1060
14	+++++	0	0	0	+1,628 -1,628	0	0	0	0	0	1300
15	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1118
16	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1140
17	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1160
18	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1210
19	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1190
20	+++++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1200

Вспомогательная таблица для расчета  $s_y^2$ 

Номер опыта	$y_u$	$\bar{y}$	$y_u - \bar{y}$	$(y_u - \bar{y})^2$	$S_y^2$
15	1118	$\frac{\sum_{u=1}^{n_0} y_u}{n_0} = \frac{7018}{6} = 1169,7$	-51,7	2672,89	$\frac{\sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = \frac{6603,34}{6 - 1} = 1320,668$
16	1140		-29,7	882,09	
17	1160		-9,7	94,09	
18	1210		40,3	1624,09	
19	1190		20,3	412,09	
20	1200		30,3	918,09	
$\sum_{u=1}^{n_0} y_u = 7018$			$\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2 = 6603,34$		

где  $t=2,57$  — табличное значение критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы  $f=5$ .

Коэффициенты  $b_1, b_{12}, b_{22}, b_{33}$  меньше доверительных интервалов, поэтому их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. После исключения незначимых коэффициентов уравнение (188) принимает вид

$$y_0 = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2. \quad (189)$$

Так как среди незначимых оказались коэффициенты при квадратичных членах, то коэффициенты уравнения (189) были пересчитаны с использованием метода наименьших квадратов. Для пересчета коэффициентов уравнения (189) составили систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 20b_0 + b_2 \sum_{j=1}^{20} x_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^{20} x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{20} y_j; \\ b_0 \sum_{j=1}^{20} x_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^{20} x_{2j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^{20} x_{3j}x_{2j} + b_{11} \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2x_{2j} = \sum_{j=1}^{20} y_jx_{2j}; \\ b_0 \sum_{j=1}^{20} x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^{20} x_{2j}x_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^{20} x_{3j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2x_{3j} = \sum_{j=1}^{20} y_jx_{3j}; \\ b_0 \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^{20} x_{2j}x_{1j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^{20} x_{3j}x_{1j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^4 = \sum_{j=1}^{20} y_jx_{1j}^2. \end{cases}$$

Определили суммы, входящие в систему нормальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{20} x_{2j} = \sum_{j=1}^{20} x_{3j} = \sum_{j=1}^{20} x_{2j}x_{3j} = \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 x_{2j} = \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 x_{3j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{20} x_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{20} x_{2j}^2 = \sum_{j=1}^{20} x_{3j}^2 = 13,658; \quad \sum_{j=1}^{20} x_{1j}^4 = 24,008.$$

Суммы, находящиеся в правых частях уравнений, вычислены раньше. После подстановки значений сумм система нормальных уравнений приняла вид

$$\begin{cases} 20b_0 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 13,658b_{11} = 24438; \\ 0 \cdot b_0 + 13,658 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{11} = 491,84; \\ 0 \cdot b_0 + 0 \cdot b_2 + 13,658 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{11} = -973,68; \\ 13,658b_0 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 24,008b_{11} = 17601,72. \end{cases}$$

Решив систему нормальных уравнений, определим значения коэффициентов  $b_0 = 1179,43$ ;  $b_2 = 36,011$ ;  $b_3 = -71,29$ ;  $b_{11} = 62,19$ .

В результате использования ротатабельного планирования второго порядка получили следующее уравнение регрессии:

$$y = 1179,43 + 36,011x_2 - 71,29x_3 + 62,19x_1^2. \quad (190)$$

Проверка гипотезы адекватности модели (190) показала, что модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, так как расчетное значение F-критерия меньше табличного. Вычисленные по уравнению (190) значения  $y$  отличаются от экспериментальных на величины, не превышающие ошибку опыта.

Кодированные значения факторов связаны с натуральными следующими зависимостями:

$$x_1 = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varepsilon_1} = \frac{\varphi - 60}{15}; \quad x_2 = \frac{\lambda - \lambda_0}{\varepsilon_2} = \frac{\lambda - 5}{6}; \quad x_3 = \frac{\gamma - \gamma_0}{\varepsilon_3} = \frac{\gamma - 10}{6},$$

где  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\gamma_0$  — основные уровни факторов в натуральных выражениях;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  — интервалы варьирования факторов.

Переходя от кодированных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  значений факторов к натуральным  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ , получим зависимость максимальной тангенциальной составляющей силы резания от элементов геометрии зуба торцевой фрезы:

$$P_T = 1179,43 + 36,011 \left( \frac{\lambda - 5}{6} \right) - 71,29 \left( \frac{\gamma - 10}{6} \right) + 62,19 \left( \frac{\varphi - 60}{15} \right)^2.$$

После преобразования

$$P_T = 2263,29 - 33,17\varphi + 6\lambda - 11,88\gamma + 0,2764\varphi^2 \text{ Н.} \quad (191)$$

Уравнение (191) адекватно, поэтому его можно использовать как интерполяционную формулу для вычисления величины  $P_T$ . При конструировании торцевых фрез для обработки высокопрочного чугуна уравнение (191) может быть использовано для установления рациональных значений элементов геометрии зуба.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ ПРОЦЕССА ХОНИНГОВАНИЯ НА ШЕРОХОВАТОСТЬ ОБРАБОТАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При исследовании процессов резания многие зависимости традиционно представляют уравнениями степенного вида. Например, зависимость стойкости режущего инструмента от элементов режима резания часто выражают уравнением

$$T = cv^\alpha s^\beta t^\gamma, \quad (192)$$

где  $v$  — скорость резания;  $s$  — подача;  $t$  — глубина резания;  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — постоянные величины.

Уравнение (192) в результате логарифмирования линеаризуется:

$$\ln T = \ln c + \alpha \ln v + \beta \ln s + \gamma \ln t. \quad (193)$$

Уравнение (193) можно выразить следующим образом:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad (194)$$

где  $y = \ln T$ ;  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  — кодированные значения  $v$ ,  $s$ ,  $t$ .

Кодированное значение  $x_i$  фактора

$$x_i = \frac{2(\ln \tilde{x}_i - \ln \tilde{x}_{iB})}{\ln \tilde{x}_{iB} - \ln \tilde{x}_{iH}} + 1, \quad (195)$$

где  $\tilde{x}_i$  — натуральное значение;  $\tilde{x}_{iB}$ ,  $\tilde{x}_{iH}$  — натуральные значения верхнего и нижнего уровней соответственно.

Для оценки коэффициентов уравнения (194) удобно использовать результаты многофакторного эксперимента. При этом результаты опытов обычно представляют полиномом вида

$$x = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 \quad (196)$$

или полиномом вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2. \quad (197)$$

После определения коэффициентов уравнения (196) или уравнения (197) необходимо проверить гипотезу адекватности линейной части этих полиномов. Если гипотеза подтверждается, т. е. уравнение  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$  адекватно, то, подставляя в это уравнение значения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , определяемые соотношением (195), получим выражение (193). Если гипотеза адекватности уравнения  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$  не подтверждается, то необходимо проверить гипотезу адекватности уравнения (196) или (197). В случае, если уравнения (196) или (197) окажутся адекватными, можно будет предложить другую модель, характеризующую зависимость стойкости инструмента от исследуемых факторов.

Рассмотрим одну из задач, в которой математическая модель процесса была представлена уравнением степенного вида. Исследовался процесс хонингования отверстий. Требовалось установить влияние окружной скорости  $v_0$  хона, скорости  $v_n$  его возвратно-



поступательного движения и давления  $p_y$  на шероховатость поверхности.

Было сделано предположение, что зависимость шероховатости  $Ra$  поверхности от исследуемых факторов можно представить уравнением регрессии степенного вида

$$Ra = c v_0^\alpha v_n^\beta p_y^\gamma \quad (198)$$

Уравнение (198) после логарифмирования получит вид

$$\ln Ra = \ln c + \alpha \ln v_0 + \beta \ln v_n + \gamma \ln p_y \quad (199)$$

Если результаты эксперимента выразить полиномом вида

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (200)$$

где  $y = \ln Ra$ , а  $x_1, x_2, x_3$  — кодированные значения факторов  $v_0, v_n, p_y$ , то справедливость зависимости (198) можно установить проверкой адекватности линейной части полинома (200).

Таблица 71

Уровни факторов

Факторы	Кодированное обозначение	Натуральные уровни факторов, соответствующие кодированным		
		верхний +1	основной 0	нижний -1
Окружная скорость $v_0$ , м/мин	$x_1$	137,5	98,5	70,7
Скорость $v_n$ возвратно-поступательно-го движения, м/мин	$x_2$	16	10,6	7
Давление $p_y$ , Па	$x_3$	980665	617819	392266

Принятые в исследовании уровни факторов и их кодовые обозначения указаны в табл. 71. Кодированные значения факторов  $x_1, x_2, x_3$  будут равны единице на верхнем уровне, нулю на основном уровне и минус единице на нижнем уровне, при натуральных значениях факторов, указанных в табл. 71. Изложенное обусловлено формулой (195), которая для каждого из факторов получит соответственно следующий вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{2(\ln v_0 - \ln 137,5)}{\ln 137,5 - \ln 70,7} + 1; \\ x_2 &= \frac{2(\ln v_n - \ln 16)}{\ln 16 - \ln 7} + 1; \\ x_3 &= \frac{2(\ln p_y - \ln 980665)}{\ln 980665 - \ln 392266} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Для оценки коэффициентов уравнения (200) проведен полный факторный эксперимент типа  $2^3$ . Матрица планирования и результаты опытов указаны в табл. 72.

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$y$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$y$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	0,449	5	+	-	-	+	+	-	-	+	0,688
2	+	+	-	-	-	-	-	+	0,228	6	+	+	-	+	-	+	-	-	0,515
3	+	-	+	-	-	+	-	+	0,233	7	+	-	+	+	-	+	+	-	0,445
4	+	+	+	-	+	-	-	-	-0,347	8	+	+	+	+	+	+	+	+	0,129

В результате обработки экспериментальных данных получено уравнение

$$y = 0,2925 - 0,16125x_1 - 0,1775x_2 + 0,15175x_3 - 0,06275x_1x_2 + 0,039x_1x_3 + 0,02025x_2x_3 + 0,027x_1x_2x_3 \quad (202)$$

Дисперсия воспроизводимости, вычисленная по результатам четырех опытов в центре плана,  $s_y^2 = 0,007522$ . Дисперсия коэффициентов уравнения регрессии  $s^2\{b_i\} = \frac{s_y^2}{N} = 0,00094$ . Доверительный интервал  $\Delta b_i$  коэффициентов

$$\Delta b_i = \pm t_r s\{b_i\} = \pm 3,18 \cdot 0,030659 = \pm 0,097495,$$

где  $t_r = 3,18$  при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы  $f = 3$ .

Коэффициенты  $b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}$  по абсолютной величине меньше доверительного интервала, поэтому их можно считать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. После исключения незначимых коэффициентов уравнение (202) приняло вид

$$y = 0,2925 - 0,16125x_1 - 0,1775x_2 + 0,15175x_3 \quad (203)$$

Для проверки адекватности уравнения (203) вычисляем дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности:

$$s_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N y_j^2 - N \sum_{i=1}^k b_i^2}{N - (k + 1)} = \frac{1,381518 - 1,328728}{8 - (3 + 1)} = 0,013197.$$

Адекватность уравнения (203) проверяем по F-критерию. Находим расчетное значение F-критерия:

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} = 1,75.$$

Табличное значение  $F_T$ -критерия при 5%-ном уровне значимости и числах степеней свободы  $f_1 = 4$  и  $f_2 = 3$  равно 9,1. Так как  $F_p < F_T$ , то линейная модель адекватна. Следовательно, зависимость шероховатости поверхности от исследуемых факторов про-

цесса хонингования с достаточной точностью можно представить уравнением (198).

Для перехода от кодированных значений факторов к натуральным в уравнение (203) подставляем значения факторов  $x_1, x_2, x_3$  по выражениям (201):

$$\ln Ra = 0,2925 - 0,16125 \left[ \frac{2(\ln v_0 - \ln 137,5)}{\ln 137,5 - \ln 70,7} + 1 \right] - 0,1775 \left[ \frac{2(\ln v_n - \ln 16)}{\ln 16 - \ln 7} + 1 \right] + 0,15175 \left[ \frac{2(\ln p_y - \ln 980665)}{\ln 980665 - \ln 392266} + 1 \right].$$

После преобразования получим

$$\ln Ra = 4,2 - 0,4848 \ln v_0 - 0,4294 \ln v_n + 0,3312 \ln p_y. \quad (204)$$

Потенцируя выражение (204), находим зависимость шероховатости поверхности от исследуемых факторов процесса хонингования:

$$Ra = 66,68 \frac{p_y^{0,3312}}{v_0^{0,4848} v_n^{0,4294}}.$$

#### 4. ПОЛУЧЕНИЕ МОДЕЛИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ РЕЗАНИЯ ОТ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ

Рассмотрим методику получения зависимости температуры  $\theta$  резания от скорости  $v$ , подачи  $s$  и глубины  $t$  резания при обработке точением стали 20 цельными проходными резцами из быстрорежущей стали P18. Эмпирические температурные зависимости часто представляют уравнениями регрессии вида

$$\theta = c v^\alpha s^\beta t^\gamma. \quad (205)$$

Уравнение (205) после логарифмирования получит вид

$$\ln \theta = \ln c + \alpha \ln v + \beta \ln s + \gamma \ln t. \quad (206)$$

Решено представить результаты эксперимента полиномом второй степени:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2, \quad (207)$$

где  $y = \ln \theta$ ;  $\theta$  — температура резания в миллиметрах диаграммной ленты потенциометра;  $x_1, x_2, x_3$  — кодированные значения факторов  $v, s, t$ .

В качестве плана эксперимента использовали центральный композиционный ротатабельный план второго порядка. Кодирование независимых переменных производили с помощью соотношения (195). Принятые в исследовании уровни факторов указаны в табл. 73.

Таблица 73

Уровни факторов

Уровни факторов	$v, \text{ м/с}$	$x_1$	$s, \text{ мм/об}$	$x_2$	$t, \text{ мм}$	$x_3$
Верхнее «звездное плечо»:	0,725	1,682	0,463	1,682	1,49	1,682
верхний	0,454	1	0,26	1	1,04	1
основной	0,229	0	0,17	0	0,61	0
нижний	0,115	-1	0,11	-1	0,36	-1
Нижнее «звездное плечо»	0,072	-1,682	0,082	-1,682	0,25	-1,682

Формулы преобразования натуральных значений факторов в кодированные в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2(\ln v - \ln 0,454)}{\ln 0,454 - \ln 0,115} + 1; \\ x_2 &= \frac{2(\ln s - \ln 0,26)}{\ln 0,26 - \ln 0,11} + 1; \\ x_3 &= \frac{2(\ln t - \ln 1,04)}{\ln 1,04 - \ln 0,36} + 1. \end{aligned} \quad (208)$$

Матрица планирования и результаты опытов представлены в табл. 74. Коэффициенты уравнения (207) вычисляли по формулам (77), (78), (79) и (80). Получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 2,0677 + 0,2049x_1 + 0,0935x_2 + 0,0466x_3 + 0,0104x_1x_2 - 0,0003x_1x_3 + 0,0017x_2x_3 - 0,0292x_1^2 - 0,0083x_2^2 - 0,0084x_3^2. \quad (209)$$

Дисперсию воспроизводимости вычисляли по результатам шести опытов в центре плана  $s_y^2 = 0,00014576$ . Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии, полученные по формулам (81) — (84):  $s^2\{b_0\} = 0,000024$ ;  $s^2\{b_i\} = 0,00001064$ ;  $s^2\{b_{ii}\} = 0,00001822$ ;  $s^2\{b_{ij}\} = 0,00000966$ .

Доверительные интервалы коэффициентов при 5%-ном уровне значимости:

$$\Delta b_0 = \pm 0,01264; \Delta b_i = \pm 0,008383; \Delta b_{ii} = \pm 0,01097; \Delta b_{ij} = 0,00811.$$

Коэффициенты  $b_{12}, b_{13}, b_{23}$  по абсолютной величине меньше доверительного интервала, поэтому их можно считать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. После исключения незначимых коэффициентов уравнение (209) получило вид

$$y = 2,0667 + 0,2049x_1 + 0,0935x_2 + 0,0466x_3 - 0,0292x_1^2 - 0,0083x_2^2 - 0,0084x_3^2. \quad (210)$$

Проверка гипотезы адекватности модели, представленной уравнением (210), показала, что модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, так как  $F_p < F_T$ . Коэффициенты при квадратичных чле-

Таблица 74

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$
1	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	1,6879
2	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	2,0777
3	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	1,8499
4	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	2,2837
5	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	1,7787
6	+	+	-	+	-	+	-	+	+	+	2,1677
7	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	1,9479
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	2,3801
9	+	-1,682	0	0	0	0	0	2,829	0	0	1,6391
10	+	+1,682	0	0	0	0	0	2,829	0	0	2,3311
11	+	0	-1,682	0	0	0	0	0	2,829	0	1,8868
12	+	0	+1,682	0	0	0	0	0	2,829	0	2,2016
13	+	0	0	-1,682	0	0	0	0	0	2,829	1,9652
14	+	0	0	+1,682	0	0	0	0	0	2,829	2,1226
15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0551
16	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0734
17	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0743
18	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0568
19	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0608
20	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,0858

нах значимы. Это свидетельствует о том, что исследуемый процесс не может быть описан уравнением (205). Уравнение (210) для рассматриваемой области изменения факторов дает возможность предложить другую модель процесса. Эту модель получим, подставив в уравнение (210) вместо кодированных натуральные значения факторов, используя для этого соотношения (208)

$$y = 2,0667 + 0,2049 \left[ \frac{2(\ln v - \ln 0,454)}{\ln 0,454 - \ln 0,115} + 1 \right] + \\ + 0,0935 \left[ \frac{2(\ln s - \ln 0,26)}{\ln 0,26 - \ln 0,11} + 1 \right] + 0,0466 \left[ \frac{2(\ln t - \ln 1,04)}{\ln 1,04 - \ln 0,36} + 1 \right] - \\ - 0,0292 \left[ \frac{2(\ln v - \ln 0,454)}{\ln 0,454 - \ln 0,115} + 1 \right]^2 - 0,0083 \left[ \frac{2(\ln s - \ln 0,26)}{\ln 0,26 - \ln 0,11} + 1 \right]^2 - \\ - 0,0084 \left[ \frac{2(\ln t - \ln 1,04)}{\ln 1,04 - \ln 0,36} + 1 \right]^2.$$

После преобразования получена зависимость

$$\theta = 26,8v^{(1,58-0,34 \ln v)} s^{(0,46-0,23 \ln s)} t^{(0,44-0,15 \ln t)}, \quad (211)$$

которая позволяет определять температуру резания в достаточно

широком диапазоне изменения режимов резания при обработке точением стали 20. По уравнению (211) может быть построена номограмма, которая позволит в практических условиях определять температуру резания при выбранных значениях элементов режима резания.

## 5 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ШПИНДЕЛЬ — ДЕТАЛЬ ТОКАРНОГО СТАНКА

В Уральском политехническом институте С. И. Солониным исследовано влияние факторов процесса резания на упругую характеристику системы шпиндель — деталь токарного станка. При точении деталей, консольно закрепленных в патроне, положение оси вращения в зоне обработки определяется положениями звеньев системы шпиндель — деталь. К этим звеньям относятся опоры шпинделя, шпиндель, патрон и деталь. В процессе точения система шпиндель — деталь упруго деформируется под действием силы резания. Если рассматривать обработку деталей большой жесткости, упругими деформациями которых можно пренебречь, то схема деформации системы под действием силы  $P$ , эквивалентной силе резания, будет иметь вид, изображенный на рис. 19.

Упругие деформации системы шпиндель — деталь будут определяться главным образом упругими деформациями стыков между звеньями стыков шпинделя с опорами, шпинделя с патроном и стыка патрон — кулачки — деталь. Деформации стыков приводят к повороту звеньев друг относительно друга на углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ . В результате ось системы шпиндель — деталь получает форму ломаной линии, а ось системы в зоне обработки, будучи повернутой и смещенной, располагается так, как это показано на рис. 19.

Для создания системы автоматического управления размером детали необходимо обеспечить измерение отклонений  $y_z$  оси вращающейся детали в зоне обработки. Непосредственное измерение этих отклонений практически трудно осуществимо. Поэтому вместо  $y_z$  измеряли упругое перемещение  $y_m$  шпинделя в месте его соединения с патроном, а затем измеренную величину преобразовывали в оценку упругого перемещения оси шпинделя в зоне резания. В рассматриваемом случае указанное преобразование заключалось в умножении перемещения  $y_m$  оси шпинделя на упругую характеристику  $f(z)$  системы шпиндель — деталь. Измерение  $y_m$  выполнялось с помощью индуктивного датчика  $D$ . Упругая характеристика  $f(z)$  системы шпиндель — деталь представляет собой отношение  $y_z$  к  $y_m$ . Получена математическая модель, описывающая это отношение:

$$f(z) = \frac{y_z}{y_m} = \frac{l_2 + z}{l_2} \left[ 1 + k_2 \left( \frac{z}{l_2 + z} \right)^2 + k_3 \left( \frac{z - l_2 - l_3}{l_2 + z} \right)^2 \right], \quad (212)$$

где  $z$  — координата, равная расстоянию от вершины резца до точки измерения  $y_m$ ;  $l_2$  — расстояние от задней опоры шпинделя до стыка шпинделя с патроном;  $l_3$  — расстояние от задней опоры шпинделя

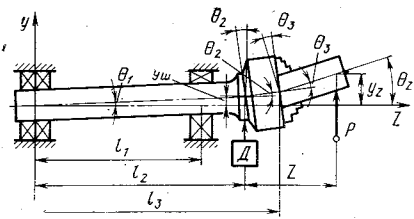


Рис. 19. Схема деформации системы шпиндель — деталь

до стыка патрон — кулачки — деталь;  $k_2, k_3$  — коэффициенты, зависящие от упругих свойств стыков системы.

Величины упругих перемещений  $y_z$  и  $y_{ш}$  определяются величиной и направлением силы резания.

При выводе уравнения (212) сделано допущение о наличии прямой пропорциональной связи между силой нормального давления

в стыке, деформацией стыка и углом  $\theta_i$  его поворота. Так как силы нормального давления пропорциональны силе резания, то пропорциональны ей и упругие перемещения  $y_z$  и  $y_{ш}$ . Имеются основания полагать, что при изменении силы  $P$  отношение  $y_z/y_{ш}$  будет оставаться постоянным, т. е. величина и направление силы резания не будут оказывать существенного влияния на упругую характеристику  $f(z)$ . Ее величина будет определяться только координатой  $z$  и упругими свойствами стыков, которые характеризуются коэффициентами  $k_2$  и  $k_3$ . Для данного станка величины  $k_2$  и  $k_3$  можно считать постоянными.

Изложенное предположение подвергалось экспериментальной проверке, которая производилась с помощью дробного факторного эксперимента и аппарата регрессионного анализа.

Были выбраны четыре фактора процесса резания, которые могли бы оказать влияние на величину упругой характеристики  $f(z)$ :  $t$  — глубина резания, мм;  $s$  — подача, мм/об;  $\varphi$  — главный угол в плане, град;  $n$  — угловая скорость вращения детали, об/мин. Первые три фактора определяют величину и направление силы резания.

Для описания возможной связи  $f(z)$  с  $t, s, \varphi$  и  $n$  была принята простейшая математическая модель в виде полинома первой степени. Если обозначить  $f(z)$  в точке с фиксированным значением  $z$  через  $u$ , а  $t = \tilde{x}_1, s = \tilde{x}_2, \varphi = \tilde{x}_3, n = \tilde{x}_4$ , то согласно принятой модели можно записать

$$u = B_0 + B_1\tilde{x}_1 + B_2\tilde{x}_2 + B_3\tilde{x}_3 + B_4\tilde{x}_4, \quad (213)$$

где  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  — коэффициенты полинома. Взаимодействиями факторов пренебрегаем. Если величина  $u$  не зависит от  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  и  $\tilde{x}_4$ , то модель  $f(z)$  для фиксированного значения  $z$  сведется к выражению  $u = B_0 = \text{const}$ . Таким образом, задачей эксперимента было определение коэффициентов полинома, оценка значимости коэффициентов  $B_1, B_2, B_3, B_4$  и проверка адекватности модели. Величина  $u$  характеризует функцию  $f(z)$  в точке с фиксированной величиной  $z$ , поэтому для оценки влияния  $t, s, \varphi, n$  на  $f(z)$  были проведены исследования с различными значениями  $z$ . Величина  $z$  варьировалась от 200 до 320 мм с шагом 20 мм, при этом вылет детали из патрона соответственно изменялся от 40 до 160 мм.

При проведении эксперимента каждый фактор варьировали на двух уровнях. Принятые в исследовании уровни факторов приведены в табл. 75.

Для упрощения вычислений независимые переменные кодировались по выражению (7):

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^0}{\varepsilon_i}$$

Коэффициенты полинома при кодированных переменных обозначим через  $b_i$ . Полином (213) после кодирования получил вид

$$u = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4. \quad (214)$$

Таблица 75

Уровни факторов

Факторы	Интервалы варьирования	Уровни факторов		
		верхний +1	основной 0	нижний -1
$t$ , мм	0,5	2	1,5	1
$s$ , мм/об	0,1	0,3	0,2	0,1
$\varphi$ , град	22,5	90	67,5	45
$n$ , об/мин	75	400	325	250

При выбранной модели использование дробного факторного эксперимента типа  $2^{4-1}$ , предусматривающего проведение восьми опытов, позволит получить эмпирические данные, необходимые для оценки коэффициентов уравнения регрессии и его статистического анализа. Матрица планирования в этом случае представляет собой полуреплику от плана эксперимента типа  $2^4$ . В качестве генерирующего соотношения приняли  $x_4 = x_1x_2x_3$ . Определяющий контраст равен  $I = x_1x_2x_3x_4$ .

Таблица 76

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$u_{1j}$	$u_{2j}$	$\bar{u}_j$	$s_j^2$
1	+	-	-	-	-	3,75	4,39	4,97	0,2048
2	+	+	-	-	+	4,64	4,15	4,40	0,1201
3	+	-	+	-	+	4,95	4,44	4,70	0,1301
4	+	+	+	-	-	4,83	4,55	4,69	0,0392
5	+	-	-	+	+	4,25	3,94	4,10	0,0481
6	+	+	-	+	-	4,38	4,94	4,66	0,1568
7	+	-	+	+	-	4,00	4,64	4,32	0,2048
8	+	+	+	+	+	4,52	4,94	4,73	0,0882
Коэф-циенты	$b_0 = 4,458$	$b_1 = 0,161$	$b_2 = 0,151$	$b_3 = 0,006$	$b_4 = 0,024$				$\sum_{j=1}^8 s_j^2 = 0,9921$

Матрица планирования и результаты опытов, выполненных при  $z=260$  мм, указаны в табл. 76. Опыты выполнялись в случайной последовательности, причем каждый опыт, предусмотренный матрицей планирования, повторяли 2 раза. Поэтому общее число опытов равно 16, а порядок их выполнения, установленный по таблице случайных чисел, следующий: 2, 15, 9, 5, 12, 14, 8, 13, 16, 1, 3, 7, 4, 6, 11, 10. Номера опытов выше 8-го относятся к повторным, например, условия опытов 1-го и 9-го одинаковы и соответствуют условиям 1-го опыта в матрице планирования и т. д. Для каждой серии опытов вычисляли среднее арифметическое  $\bar{u}_j$  и дисперсию воспроизводимости опыта  $s_j^2$ . Эту дисперсию определяли по выражению

$$s_j^2 = \frac{\sum_{l=1}^{m_j} (u_{jl} - \bar{u}_j)^2}{m_{j-1}},$$

где  $l$  — номер опыта в  $j$ -й серии;  $u_{jl}$  — значение функции отклика в  $l$ -м опыте  $j$ -й серии;  $m_j$  — число опытов в  $j$ -й серии.

Вычисленные средние  $\bar{u}_j$  и дисперсии  $s_j^2$  указаны в табл. 76. Так как число  $m_j$  параллельных опытов в каждой серии одинаково, то однородность ряда дисперсий  $s_j^2$  проверяли по  $G$ -критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{j=1}^N s_j^2} = 0,2064.$$

Табличное значение критерия при 5%-ном уровне значимости для  $N=8$  и  $m=2$   $G_T=0,6798$ . Так как расчетное значение  $G_p=0,2064$  меньше табличного  $G_T=0,6798$ , гипотеза однородности дисперсий принимается. Убедившись в однородности дисперсий  $s_j^2$ , можно вычислить дисперсию  $s^2$  воспроизводимости эксперимента:

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^N s_j^2}{N} = 0,124.$$

Коэффициенты  $b_i$  вычисляли по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} \bar{u}_j}{N},$$

где  $x_{ij}$  — кодированное значение  $i$ -го фактора в  $j$ -м опыте.

Вычисленные значения коэффициентов указаны в табл. 76.

После подстановки в уравнение (214) значений коэффициентов  $b_i$  оно получило вид

$$u = 4,458 + 0,161x_1 + 0,151x_2 - 0,006x_3 + 0,024x_4. \quad (215)$$

Для проверки гипотезы адекватности уравнения (215) находим дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности по формуле  $s_{ад}^2 = \frac{s_R}{f}$ .

Остаточную сумму квадратов  $s_R$  определяли по выражению

$$s_R = \left( \sum_{j=1}^N \bar{u}_j^2 - N \sum_{i=0}^k b_i^2 \right) m = 0,374,$$

где  $k$  — число исследуемых факторов;  $m=2$  — параллельные опыты.

Число степеней свободы

$$f = N - (k + 1) = 3.$$

Вычисляли дисперсию

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R}{f} = 0,125.$$

Гипотезу адекватности проверяли по  $F$ -критерию.

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s^2} \approx 1.$$

Табличное значение критерия при 5%-ном уровне значимости и числа степеней свободы для числителя 3 и знаменателя 8  $F_T=4,07$ . Так как  $F_p < F_T$ , модель, представленную уравнением (215), можно признать адекватной.

Для оценки значимости коэффициентов  $b_i$  находили дисперсию коэффициентов

$$s^2 \{b_i\} = \frac{s^2}{Nm} = 0,00775$$

и определяли доверительный интервал

$$\Delta b_i = \pm t_r s \{b_i\} = \pm 0,2024,$$

где  $t_r=2,3$  — табличное значение критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы  $N(m-1)=8(2-1)=8$ .

Все коэффициенты, кроме  $b_0$ , меньше доверительного интервала, поэтому их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии (215), которое примет вид  $u=b_0$  или  $u=4,458$ .

Для проверки возможности предсказания значений  $u$  по модели  $u=b_0$  была вычислена дисперсия  $s_p^2$  рассеяния результатов  $\bar{u}_j$  относительно их среднего, которым в данном случае и является коэффициент  $b_0$ . Дисперсия  $s_p^2$  определялась по выражению

$$s_p^2 = \frac{m \sum_{j=1}^N (\bar{u}_j - b_0)^2}{N-1} = \frac{2 \sum_{j=1}^8 (\bar{u}_j - b_0)^2}{8-1} = 0,151.$$

Однородность дисперсий  $s_p^2$  и  $s^2$  проверяли по F-критерию:

$$F_p = \frac{s_p^2}{s^2} = 1,22.$$

Табличное значение при 5%-ном уровне значимости и числа степеней свободы для числителя 7 и для знаменателя 8  $F_T = 3,50$ ;  $F_p < F_T$ , поэтому дисперсии  $s_p^2$  и  $s^2$  следует признать однородными, а модель  $u = b_0$  — адекватной. Адекватность модели  $u = b_0$  свидетельствует о несущественном влиянии  $t$ ,  $s$ ,  $\varphi$  и  $n$  на величину упругой характеристики  $f(z)$ , т. е. в области эксперимента при фиксированном значении  $z$  упругая характеристика  $f(z)$  остается постоянной при изменении  $t$ ,  $s$ ,  $\varphi$  и  $n$ .

Аналогичные исследования были проведены при всех других принятых значениях  $z$ , а именно:  $z = 200; 220; 240; 260; 280; 300; 320$  мм. Математическая обработка экспериментальных данных показала, что в области эксперимента при принятых значениях  $z$  факторы  $t$ ,  $s$ ,  $\varphi$  и  $n$  также не оказывают существенного влияния на величину упругой характеристики  $f(z)$ . Опытные данные  $u_j$ , полученные при различных  $z$ , позволили определить коэффициенты  $k_2$  и  $k_3$ , характеризующие упругие свойства стыков системы. Эти коэффициенты, входящие в уравнение (212) упругой характеристики  $f(z)$ , находились с использованием метода наименьших квадратов.

Проведенные исследования позволили получить упругую характеристику  $f(z)$  системы шпиндель — деталь токарного станка мод. 1К62. Используя эту характеристику, С. И. Солонин создал эффективную систему автоматического управления размером детали, обеспечивающую обработку с точностью до 3 кл.

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При создании системы адаптивного управления размерами деталей, обрабатываемых на определенном станке, может возникнуть необходимость в математическом описании объекта управления. В качестве выхода объекта управления часто принимают величину упругого перемещения  $A_d'$  режущего инструмента относительно обрабатываемой детали. Математическое описание объекта адаптивного управления можно получить, используя статистические методы планирования эксперимента.

Методику получения математической модели, характеризующей зависимость упругого перемещения  $A_d'$  от основных технологических факторов процесса резания, рассмотрим на конкретном примере. Известно, что при обработке валов точением на величину упругого перемещения оказывают влияние величина припуска  $z$ , подача  $s$  и скорость резания  $v$ . Полагаем, что математическая модель, характеризующая влияние указанных факторов на величину упругого перемещения, может быть представлена уравнением

$$A_d' = C v^{\alpha_1} s^{\alpha_2} z^{\alpha_3}, \quad (216)$$

где  $C$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  — параметры модели, подлежащие определению.

Выражение (216) после логарифмирования линеаризуется:

$$\lg A_d' = \lg C + \alpha_1 \lg v + \alpha_2 \lg s + \alpha_3 \lg z.$$

Последнее выражение можно записать следующим образом:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad (217)$$

где  $y = \lg A_d'$ ;  $x_0$  — фиктивная переменная ( $x_0 = 1$ );  $x_1, x_2, x_3$  — кодированные значения факторов.

Кодирование переменных осуществляем по соотношениям

$$x_1 = \frac{2(\lg v - \lg v_{\max})}{\lg v_{\max} - \lg v_{\min}} + 1; \quad x_2 = \frac{2(\lg s - \lg s_{\max})}{\lg s_{\max} - \lg s_{\min}} + 1;$$

$$x_3 = \frac{2(\lg z - \lg z_{\max})}{\lg z_{\max} - \lg z_{\min}} + 1.$$

Верхние ( $v_{\max}, s_{\max}, z_{\max}$ ), нижние ( $v_{\min}, s_{\min}, z_{\min}$ ) и основные ( $v_0, s_0, z_0$ ) уровни факторов указаны в табл. 77.

Таблица 77

Факторы и их уровни

Факторы	Кодовое обозначение факторов	Натуральные значения, соответствующие уровням кодированных факторов		
		верхний +1	основной 0	нижний -1
$v$ , м/мин	$x_1$	150	77,46	40
$s$ , мм/об	$x_2$	0,55	0,33	0,2
$z$ , мм	$x_3$	4	2	1

Для определения коэффициентов уравнения (217) поставлен эксперимент, который заключался в обтачивании валов на настроенном токарном станке мод. 163. В качестве заготовок использовали прокат из стали 40, твердостью  $HB 185$ , диаметром 75 мм и длиной 450 мм. Обтачивание производилось резцом с главным углом в плане  $\varphi = 90^\circ$ , оснащенный пластинкой из твердого сплава Т5К10. Условия эксперимента определялись некомпозиционным планом второго порядка, матрица которого и результаты опытов приведены в табл. 78.

Некомпозиционный план второго порядка для трех факторов и результаты эксперимента позволяют оценить коэффициенты полинома вида

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \quad (218)$$

Коэффициенты уравнения (218) находим по выражению (48):

$$B = (X^* X)^{-1} (X^* Y),$$

где  $B$  — вектор-столбец, состоящий из коэффициентов уравнения (218);  $X$  — матрица условий эксперимента;  $X^*$  — матрица, транспонированная к матрице  $X$ ;  $(X^* X)^{-1}$  — матрица, обратная матрице-произведению  $(X^* X)$ ;  $Y$  — вектор-столбец результатов наблюдений.

Таблица 78

Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	Матрица некомпозиционного плана									Значения функции отклика			
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	экспериментальные		расчетные
											$A'_d$ , мм	$y_j = \lg A'_d$	
1	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	0,295	-0,53018	-0,53778
2	+	+	+	0	+	0	0	+	+	0	0,186	-0,73049	-0,72710
3	+	+	+	0	-	0	0	+	+	0	0,368	-0,43415	-0,44811
4	+	-	-	0	+	0	0	+	+	0	0,217	-0,66354	-0,64534
5	+	0	0	0	0	0	0	+	+	0	0,248	-0,60555	-0,59156
6	+	+	0	0	0	0	0	+	0	+	0,334	-0,47625	-0,46372
7	+	+	0	0	0	+	0	+	0	+	0,168	-0,77469	-0,80116
8	+	-	0	0	0	-	0	+	0	+	0,422	-0,37469	-0,38196
9	+	-	0	0	0	+	0	+	0	+	0,194	-0,71220	-0,71940
10	+	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0,256	-0,59346	-0,59156
11	+	0	+	+	0	0	0	+	+	+	0,461	-0,3363	-0,32818
12	+	0	+	-	0	0	0	+	+	+	0,202	-0,69897	-0,66562
13	+	0	-	+	0	0	0	+	+	+	0,312	-0,50585	-0,51750
14	+	0	-	-	0	0	0	+	+	+	0,139	-0,85699	-0,85494
15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,263	-0,55004	-0,59156

Матрицы, входящие в уравнение (48), имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -0,53018 \\ -0,73049 \\ -0,73415 \\ -0,66354 \\ -0,60555 \\ -0,47625 \\ -0,77469 \\ -0,37469 \\ -0,71220 \\ -0,59346 \\ -0,33630 \\ -0,69897 \\ -0,50585 \\ -0,85699 \\ -0,58004 \end{pmatrix}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix};$$

$$X^*X = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}; X^*Y = \begin{pmatrix} -0,87335 \\ -0,32703 \\ 0,75727 \\ 1,34976 \\ -0,02908 \\ -0,03907 \\ 0,01153 \\ -4,69619 \\ -4,75647 \\ -4,73394 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$  вычисляли методом Гаусса на ЭЦВМ «Мир-1» по стандартной программе.

$$(X^*X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$$

Подставляя найденные матрицы в уравнение (48), получаем

$$\begin{array}{l}
 b_{03} \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_{12} \\
 b_{13} \\
 b_{23} \\
 b_{11} \\
 b_{22} \\
 b_{33}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{-1}{6} \ \frac{-1}{6} \ \frac{-1}{6} \\
 0 \ \frac{1}{8} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ \frac{1}{8} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{8} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \frac{-1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{13}{48} \ \frac{1}{48} \ \frac{1}{48} \\
 \frac{-1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{48} \ \frac{13}{48} \ \frac{1}{48} \\
 \frac{-1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{48} \ \frac{1}{48} \ \frac{13}{48}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{l}
 -8,87335 \\
 -0,32703 \\
 -0,75727 \\
 1,34976 \\
 -0,02908 \\
 -0,03907 \\
 0,01153 \\
 -4,69619 \\
 -4,75647 \\
 -4,73594
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 -0,593 \\
 -0,04088 \\
 0,09466 \\
 0,16872 \\
 -0,00727 \\
 -0,00977 \\
 0,00288 \\
 0,00925 \\
 -0,00582 \\
 -0,00068
 \end{array}$$

Матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, следовательно,  $b_0 = -0,593$ ;  $b_1 = -0,04088$ ;  $b_2 = 0,09466$ ;  $b_3 = 0,16872$ ;  $b_{12} = -0,00727$ ;  $b_{13} = -0,00977$ ;  $b_{23} = 0,00288$ ;  $b_{11} = 0,00925$ ;  $b_{22} = -0,00582$ ;  $b_{33} = -0,00068$ .

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента по результатам трех опытов в центре плана (опыты 5, 10, 15, табл. 78) определяем

Таблица 79

Таблица для расчета  $s_y^2$

$y_u$	$\bar{y}$	$(y_u - \bar{y})^2$	$s_y^2$
-0,60355	$\frac{1}{3} \sum_{u=1}^3 y_u =$ $= \frac{-1,77905}{3} =$ $= -0,593016$	0,00015710	$\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2 =$ $= \frac{1}{2} \sum_{u=1}^3 (y_u - \bar{y})^2 =$ $= 0,00016283$
-0,59346		0,00000019	
-0,58004		0,00016837	
$\sum_{u=1}^3 y_u = -1,77905$		$s_E = \sum_{u=1}^3 (y_u - \bar{y})^2 =$ $= 0,00032566$	

с помощью табл. 79. Дисперсии  $s^2\{b_i\}$  коэффициентов регрессии находим по выражению

$$s^2\{b_i\} = c_{ii} s_y^2,$$

где  $c_{ii}$  — диагональные элементы матрицы  $(X^*X)^{-1}$ ;

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{3} s_y^2 = \frac{1}{3} 0,00016283 = 0,00005427;$$

$$s^2\{b_1\} = s^2\{b_2\} = s^2\{b_3\} = \frac{1}{8} s_y^2 = \frac{1}{8} 0,00016283 = 0,00002035;$$

$$s^2\{b_{12}\} = s^2\{b_{13}\} = s^2\{b_{23}\} = \frac{1}{4} s_y^2 = \frac{1}{4} 0,00016283 = 0,0000407;$$

$$s^2\{b_{11}\} = s^2\{b_{22}\} = s^2\{b_{33}\} = \frac{13}{48} s_y^2 = \frac{13}{48} 0,00016283 = 0,00004409.$$

Статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяем по t-критерию Стьюдента, для чего определяем наблюдаемые значения этого критерия:

$$t_1 = \frac{|b_1|}{s\{b_1\}} = 9,062; \quad t_2 = \frac{|b_2|}{s\{b_2\}} = 20,984; \quad t_3 = \frac{|b_3|}{s\{b_3\}} = 37,623;$$

$$t_{12} = \frac{|b_{12}|}{s\{b_{12}\}} = 1,14; \quad t_{13} = \frac{|b_{13}|}{s\{b_{13}\}} = 1,531; \quad t_{23} = \frac{|b_{23}|}{s\{b_{23}\}} = 0,452;$$

$$t_{11} = \frac{|b_{11}|}{s\{b_{11}\}} = 1,393; \quad t_{22} = \frac{|b_{22}|}{s\{b_{22}\}} = 0,876; \quad t_{33} = \frac{|b_{33}|}{s\{b_{33}\}} = 0,102.$$

При 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы 2 табличное значение критерия  $t_T = 4,3$ . Оно больше наблюдаемых значений критерия  $t$  для коэффициентов  $b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{33}$ , следовательно, указанные коэффициенты можно признать статистически незначимыми и исключить их из уравнения регрессии.

Среди незначимых оказались коэффициенты при квадратичных членах, поэтому оставшиеся коэффициенты были пересчитаны по формуле (48). В результате получили следующее уравнение регрессии:

$$y = -0,59156 - 0,04088x_1 + 0,09466x_2 + 0,16872x_3. \quad (219)$$

Для проверки адекватности модели (219) вычислили дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности по выражению  $s_{ад}^2 = \frac{s_R - s_E}{f}$ , где  $s_R$  — сумма квадратов отклонений расчетных  $\hat{y}_j$  от экспериментальных  $y_j$  значений функции отклика во всех точках плана. Расчетные значения  $\hat{y}_j$  функции отклика, найденные по выражению (219), приведены в табл. 79.  $s_E$  — сумма квадратов, использованная для определения дисперсии  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента по результатам опытов в центре плана,  $s_E = 0,00032566$ ;  $f$  — число степеней свободы;  $f = N - k' - (n_0 - 1)$ , где  $N$  — число опытов в матрице планирования;  $k'$  — число коэффициентов уравнения (219);  $n_0$  — число параллельных опытов в центре плана.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	3
<b>Глава I. Планирование экстремальных экспериментов. Планы первого порядка</b>	5
1. Основные понятия и определения	5
2. Полный факторный эксперимент	10
3. Дробный факторный эксперимент	14
4. Свойства матриц полного и дробного факторных экспериментов	20
5. Проведение эксперимента и обработка результатов опытов	21
6. Крутое восхождение по поверхности отклика	32
<b>Глава II. Регрессионный анализ</b>	38
1. Линейный регрессионный анализ с $k$ независимыми переменными	40
2. Примеры регрессионного анализа при равномерном и неравномерном дублировании опытов	57
3. Применение ЭВМ для регрессионного анализа	61
<b>Глава III. Планирование экстремальных экспериментов. Планы второго порядка</b>	63
1. Центральные композиционные планы	63
2. Ортогональные планы второго порядка	65
3. Ротatableное планирование второго порядка	69
4. Исследование области оптимума, представленной полиномом второй степени	72
5. Применение ротatableного планирования второго порядка для минимизации шероховатости поверхности при обработке материалов резанием	78
<b>Глава IV. Моделирование и оптимизация многофакторного процесса</b>	83
1. Модели процесса	83
2. Оптимизация многофакторного процесса	93
<b>Глава V. Некомпозиционные планы</b>	114
1. Некоторые некомпозиционные планы второго порядка	114
2. Применение некомпозиционных планов второго порядка при исследовании вибродуговой наплавки	123
<b>Глава VI. Методы поиска условного оптимума при исследовании многофакторных процессов</b>	135
1. Использование метода неопределенных множителей Лагранжа для поиска условного оптимума функции отклика	135
2. Применение ЭВМ для поиска условного оптимума функции отклика	140
3. Применение линейного программирования для поиска условного оптимума функции отклика	141
<b>Глава VII. Применение методов планирования эксперимента в технологии машиностроения и при обработке металлов резанием</b>	155
1. Применение метода Бокса — Уилсона для нахождения оптимальных параметров режущего инструмента	155
2. Применение ротatableного планирования второго порядка для исследования процесса торцового фрезерования	160
3. Исследование влияния основных факторов процесса хонингования на шероховатость обработанной поверхности	165
4. Получение модели, характеризующей зависимость температуры резания от основных факторов процесса резания	168
5. Исследование упругой характеристики системы шпиндель — деталь токарного станка	171
6. Применение некомпозиционных планов второго порядка для получения модели объекта адаптивного управления	176
Список литературы	183

Сумму  $s_R$  находим по формуле

$$s_R = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{15} (y_j - \hat{y}_j)^2 = 0,00320783.$$

Тогда

$$s_{ад}^2 = \frac{s_R - s_E}{N - k' - (n_0 - 1)} = 0,00032024.$$

Дисперсия  $s_{ад}^2$  определена с числом степеней свободы  $f=9$ . Определяем расчетное значение F-критерия

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2} = 1,97.$$

При 5%-ном уровне значимости и числах степеней свободы  $f_1=9$  и  $f_2=2$   $F_T=19,35$ . Линейное уравнение регрессии (219) адекватно, так как  $F_p=1,97 < F_T=19,35$ . Заменяя в уравнении (219) кодированные значения факторов натуральными, получаем

$$\begin{aligned} \lg A'_d = & -0,59156 - 0,04088 \left[ \frac{2(\lg v - \lg 150)}{\lg 150 - \lg 40} + 1 \right] + \\ & + 0,09466 \left[ \frac{2(\lg s - \lg 0,55)}{\lg 0,55 - \lg 0,2} + 1 \right] + 0,16872 \times \\ & \times \left[ \frac{2(\lg z - \lg 4)}{\lg 4 - \lg 1} + 1 \right] = -0,28467 - 0,14243 \lg v + \\ & + 0,43093 \lg s + 0,56047 \lg z. \end{aligned}$$

Потенцируя последнее выражение, находим искомую модель в виде уравнения

$$A'_d = 0,5192 \frac{z^{0,56047} s^{0,43093}}{v^{0,14243}}. \quad (220)$$

Уравнение (220) представляет собой математическое описание объекта управления. Оно необходимо для создания системы адаптивного управления размерами деталей типа валов, предназначенных для обработки на данном станке. Согласно уравнению (220) на величину упругого перемещения существенное влияние оказывают припуск и подача, причем степень влияния припуска на эту величину больше степени влияния подачи. Можно считать, что скорость резания не оказывает существенного влияния на величину упругого перемещения.

Такова методика получения с помощью статистического планирования эксперимента математических моделей, характеризующих зависимости объектов управления от основных технологических факторов процесса. Применяя изложенную методику и некомпозиционный план второго порядка для четырех факторов, можно получить модель, характеризующую зависимость упругого перемещения от припуска, подачи, скорости резания и твердости обрабатываемого материала. Методика может быть использована для станков различных типов с учетом всех влияющих факторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адаптивное управление станками/Под ред. Б. С. Балакшина, М.: Машиностроение, 1973. 688 с.
2. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 279 с.
3. Влияние режимов резания на шероховатость обработанной поверхности капролона при точении/Г. А. Бобровников, П. П. Ананов, Н. И. Житник и др. — В кн.: Технология и автоматизация машиностроения, вып. 7, Киев: Техника, 1971, 127—148 с.
4. Вознесенский В. А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. М.: Статистика, 1974. 192 с.
5. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование. М.: Высшая школа, 1967. 427 с.
6. Кацев П. Г. Статистические методы исследования режущего инструмента. М.: Машиностроение, 1974. 239 с.
7. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 398 с.
8. Налимов В. В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 207 с.
9. Новик Ф. С. Математические методы планирования экспериментов в металлостроении. Разд. 1. М.: МИСиС, 1972. 106 с.
10. Окерблом Н. О., Демянцевич В. П., Байкова И. Н. Проектирование технологии изготовления сварных конструкций. Л.: Судпромгиз, 1963. 602 с.
11. Пацкевич И. Р., Пирогова В. Д. Влияние режимов вибродуговой наплавки на размеры наплавленного валика и зоны термического влияния. В кн.: Исследование и применение вибродуговой наплавки. М.: Машиностроение, 1964, 87—99 с.
12. Пономарев В. А. Программирование для ЭЦВМ «Мир-1». М.: Советское радио, 1975. 216 с.
13. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике. М.: Статистика, 1974. 374 с.
14. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1969. 511 с.
15. Солонин И. С. Математическая статистика в технологии машиностроения. М.: Машиностроение, 1972. 215 с.
16. Спиридонов А. А., Васильев Н. Г. Планирование эксперимента. Свердловск: УПИ им. С. М. Кирова, 1975. 149 с.
17. Спиридонов А. А., Васильев Н. Г. Планирование эксперимента при исследовании и оптимизации технологических процессов. Свердловск: УПИ им. С. М. Кирова, 1975. 140 с.
18. Технология электрической сварки плавлением/Под ред. Б. Е. Патона. М.—Киев: Mashgiz, 1962. 663 с.
19. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М.: ИЛ, 1956. 382 с.
20. Box G. E. P., Behnken D. W. Some Uew Three Level for the Study of Quantitative Variables — Technometrics, 1960, V. 2, N 4.