МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Book · November 2012

Vasyl Teslyuk
Lviv Polytechnic National University

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

В.М. Теслюк, Р.В.Загарюк

МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(Частина 1)

з курсу “ Методи багатокритеріальної оптимізації”
для студентів
спеціальності 8.05010103 “Системне проектування ”

Затверджено
на засіданні кафедри
Системи автоматизованого проектування
Протокол № 1 від 22.09.2012.

Львів –2012

Теслюк В.М., Загарюк Р.В. Методи багатокритеріальної оптимізації: Ч.1. Конспект лекцій з курсу “Методи багатокритеріальної оптимізації” для студентів спеціальності 8.05010103 “Системне проектування”. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2012. – 64 с.

У конспекті лекцій висвітлено основні поняття теорії задач багатокритеріальної оптимізації, етапи побудови таких задач та їх розв’язання з використанням методів, які передбачають зведення до задач однокритеріальної оптимізації і методів, які ґрунтуються на адитивній, мультиплікативній та максимінній (мінімаксній) згортці. Наведено алгоритми застосування вищезазначених методів, їх переваги та недоліки та специфіка застосування до розв’язання задач, що виникають в процесі автоматизованого проектування складних об’єктів та систем.

Призначено для студентів, що навчаються за спеціальністю 8.05010103 “Системне проектування”.

Відповідальний за випуск Ткаченко С.П., канд. техн. наук., доц.

Рецензенти: Верес О.М., канд. техн. наук., доц.

Каркульовський В.І. канд. техн. наук., доц.

ЗМІСТ

Вступ

В процесі автоматизованого проектування складних об’єктів та систем необхідно розв’язувати типові задачі аналізу та синтезу. Найскладнішими є задачі синтезу, які, в багатьох випадках, зводяться до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації. Саме вивченню методів розв’язання таких задач і призначений цей конспект лекцій.

Конспект лекцій містить три розділи. В першому розділі розглянуто питання пов’язані з основними складовими та алгоритмом постановки оптимізаційної задачі, поняттям багатокритеріальної оптимізаційної задачі та основні причини багатокритеріальності в проектуванні складних об’єктів і систем та наведено приклад постановки задачі багатокритеріальної оптимізації.

У другому розділі розглянуті методи, які зводяться до розв’язання задач однокритеріальної оптимізації, а саме: метод головної компоненти; метод комплексного критерію; лексикографічний метод; метод поступок; метод ідеальної точки та метод умовного центра мас.

В третьому розділі описано підходи до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації на основі побудови комплексного критерію. Зокрема особливості оптимізації з використанням адитивної, мультиплікативної, мінімаксної (максимінної) згорток та методи визначення вагових коефіцієнтів: мтод ранжування і метод приписування балів.

В процесі розгляду кожного методу описано його ідею, наведено алгоритм та приклад застосування його до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації і наведено їх переваги та недоліки.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

ЗБО	– Задача багатокритеріальної оптимізації
МГК	– Метод головної компоненти
КО	– Критерій оптимізації
МДР	– Множина допустимих рішень.
НП	– Нелінійне програмування
ОЗ	– Оптимізаційна задача
ОП	– Об’єкт проектування
САПР	– Система автоматизованого проектування.
ЛМ	– Лексикографічний метод
МП	– Метод поступок.
ЛП	– Лінійне програмування
ЗЛП	– Задача лінійного програмування
ЗЦЛП	– Задача цілочисельного лінійного програмування
ЦФ	– Цільова функція
МІТ	– Метод ідеальної точки
МУЦМ	– Метод умовного центра мас
ОПР	– Особа примаюча рішення

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ КУРСУ

1.1. Основні елементи теорії оптимізації

Під терміном “оптимізація”, як правило, в техніці розуміють процес, який дає можливість отримати найкраще рішення в заданих умовах. Слід зазначити що “найкраще рішення” деякої задачі з точки зору певної особи, яка визначає, що це є саме “найкраще рішення”, чи по іншому його називають оптимальне. З точки зору іншої особи, це рішення може бути вже не “найкраще”, а близьке до оптимального. Тому у визначенні “найкращого рішення” присутній певний суб’єктивізм, який, зрозуміло, що по можливості в процесі розв’язання оптимізаційних задач бажано усунути.

Відповідно, в процесі розв’язання складних технічних оптимізаційних задач, оцінку “найкращого рішення” має приймати проектувальник (інженер), яка має значний досвід в цій області чи колектив досвідчених науковців.

Наступним моментом вище наведеного визначення є те, що це отримане оптимальне рішення “в заданих умовах”. В інших умовах отриманий результат вже може і не бути найкращим, оптимальним.

Загалом існує багато визначень терміну “оптимізації”, але усі вони містять вищезазначені елементи, і можуть відрізнятися врахуванням лише специфіки та особливості області застосування.

Зокрема, деякі з них:

Оптимiза́ція — *1. процес вибору найкращого варіанта з можливих. 2. Процес приведення системи до найкращого (оптимального)стану* [1].

Оптимізацією *(від латів. optimum - найкраще) називається процес знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) певної функції або вибору найкращого (оптимального) варіанту з множини можливих*.

Оптимiза́ція *(від латів. optimus - найкращий) — процес надання будь-чому найвигідніших характеристик, співвідношень (наприклад, оптимізація виробничих процесів і виробництва)*[2].

З досвіду відомо що, в більшості випадків в процесі розв’язання практичних оптимізаційних задач вдається лише покращити вже існуюче рішення, а не знайти "найкраще". Відповідно, необхідно ставитися до цього з розумінням, і це пов'язано з тим, що процес оптимізації є надзвичайно складним на який впливають різні за природою параметри і кількість яких є надзвичайно велика. Більше того, досить часто, ми не знаємо чи існує те "найкраще рішення" взагалі в даній області зміни проектних параметрів (задані умови) і де його шукати.

Перш ніж приступити до обговорення питань оптимізації, введемо ряд визначень.

Проектні параметри (шукані змінні). Цим терміном позначають незалежні змінні параметри, які повністю і однозначно визначають вирішувану задачу проектування.

Проектні параметри - невідомі величини, значення яких обчислюються в процесі оптимізації. Як проектні параметри можуть бути будь-які основні або похідні величини, які призначені для кількісного опису об'єкта проектування. Так, це можуть бути невідомі значення об'єму оперативної пам'яті, тактова частота мікропроцесора, довжини мікродавача, маса чутливого елемента мікродавача, температура, тощо. Число проектних параметрів характеризує ступінь складності даного завдання проектування деякого технічного процесу чи об'єкту. Звичайне число проектних параметрів позначають через n, а самі проектні параметри через x з відповідними індексами. Таким чином n проектних параметрів певного завдання позначатимемо через

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,x_n.$$

Додаткову інформацію про класифікація та особливості проектних параметрів можна знайти в роботах [3, 4].

В процесі вивчення та формалізації оптимізаційних задач оперують такими складовими, як критерій оптимізації (КО) та цільова функція (ЦФ).

Критерій оптимізації [4] – це є певна властивість об'єкта проектування. (**Критерій оптимальності** – показник чи система показників якості роботи деякої системи, значення якої має бути мінімізовано (максимізовано) [5]) Для прикладу: вартість виготовлення мікродавача, максимальна швидкість автомобіля, максимальна потужність підсилювача низької частоти, швидкодія мікроконтролера та ін. Визначає критерій оптимізації, як правило, інженер чи науковець, який володіє знаннями в певній галузі та має досвід. В кожній оптимізаційній задачі необхідно знайти найбільше чи найменше значення КО.

Для того, щоб оперувати критерієм оптимізації в процесі розв’язання оптимізаційної задачі, необхідно мати справу з його кількісною оцінкою, а не з якісною. Тому можна сказати так, що формалізують КО, тобто записують в математичній формі залежність КО від проектних параметрів. Відповідно, даний запис називається **цільовою функцією.**

(Цільова функція, **функція цілі –** функція, найбільше чи найменше значення якої шукається в задачах математичного програмування з врахуванням наявних обмежень [5]).

В процесі розв’язання оптимізаційної задачі цільова функція дає змогу кількісно порівняти два чи більше альтернативних рішення. З математичної точки зору цільова функція описує деяку $(n+1)$ - вимірну поверхню. Її значення визначається проектними параметрами

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Більше інформації про критерії оптимальності та цільові функції можна почерпнути з робіт [6 - 9].

Прикладами цільових функцій, які часто зустрічаються в інженерній практиці, можуть бути математичний вираз для визначення вартості виробу, його ваги, міцності, ККД та інші. У випадку, коли цільова функція містить тільки один проектний параметр, то цільову функцію можна представити з допомогою кривої на площині. Якщо проектних параметрів два, то цільова функція зображуватиметься поверхнею в просторі трьох змінних. При трьох і більше проектних параметрах поверхні, що задаються цільовою функцією, називаються *гіперповерхнями* і не піддаються зображенню звичайними засобами. Топологічні властивості поверхні цільової функції відіграють велику роль в процесі оптимізації, оскільки від них залежить вибір найбільш ефективного методу пошуку оптимальних рішень.

Цільова функція в ряді випадків може приймати найнесподіваніші форми. Наприклад, її не завжди вдається виразити в математичній формі, в інших випадках вона може бути кусково-гладкою функцією. Для задання цільової функції іноді може знадобитися таблиця технічних даних (наприклад таблиця стану водяної пари) або може знадобитися провести експеримент. В ряді випадків проектні параметри приймають тільки цілі значення. Прикладом може бути комірок пам’яті персонального комп’ютера чи кількість мікропроцесорів. Іноді проектні параметри мають тільки два значення - так чи ні. Якісні параметри, такі як задоволення, яке випробовує покупець, що придбав виріб, надійність, естетичність, теж можливо враховувати в процесі оптимізації, хоча їх складно охарактеризувати кількісно. Проте в якому б вигляді не була представлена цільова функція, вона має бути однозначною функцією проектних параметрів.

В ряді оптимізаційних задач потрібне введення більше однієї цільової функції. Іноді одна з них може виявитися несумісною з іншою. Прикладом служить проектування ноутбуків, коли одночасно потрібно забезпечити максимальну потужність, мінімальну вагу та мінімальну вартість. В таких випадках розробник має ввести систему пріоритетів і поставити у відповідність кожній цільовій функції деякий безрозмірний множник. В результаті з'являється так звана “функція компромісу”, що дає змогу в процесі оптимізації користуватися однією складною цільовою функцією (в даному випадку розробник має справу з задачею багатокритеріальної оптимізації оскільки присутні декілька критеріїв оптимізації).

Якщо порівняти між собою КО і ЦФ, то можна стверджувати, що критерій оптимальності визначає якісну оцінку якоїсь властивості об’єкта проектування, або його властивість чи властивості, а цільова функція кількісну оцінку критерію чи групи критеріїв оптимізації.

Пошук мінімуму і максимуму. Одні алгоритми оптимізації пристосовані для пошуку максимуму, інші - для пошуку мінімуму. Проте незалежно від типу розв’язуваної задачі на екстремум можна користуватися одним і тим же алгоритмом, оскільки задачу мінімізації можна легко перетворити на задачу пошуку максимуму, помінявши знак цільової функції на зворотний. Чим, на практиці, досить часто користуються проектувальники в процесі побудови технічних пристроїв.

Множина допустимих рішень. Так називається область, визначена всіма *n* проектними параметрами. Простір рішення не такий великий, як може здаватися на перший погляд, оскільки він зазвичай обмежений рядом умов, пов'язаних з фізичною суттю завдання. Обмеження можуть бути такими сильними, що задача не матиме жодного задовільного розв’язання. Слід зазначити, що дуже часто у зв'язку з обмеженнями оптимальне значення цільової функції досягається на одній з меж області множини допустимих розв’язань задачі.

Локальний оптимум. Так називається точка простору рішень, в якій цільова функція має найбільше значення в порівнянні з її значеннями в усіх інших точках її околу.

Досить часто простір проектування містить багато локальних оптимумів і слід дотримуватися обережності, щоб не прийняти перший з них за оптимальне розв’язання задачі.

Глобальний оптимум. Глобальний оптимум - це оптимальне рішення для всієї множини допустимих рішень. Воно краще за всі інші рішення, відповідні локальному оптимуму, і саме його шукає розробник. Можливий випадок декількох рівних глобальних оптимумів, розташованих в різних частинах простору проектування.

1.2. Особливості об’єкта оптимізації

Для більш повного уявлення про оптимізаційні задачі, зупинимося докладніше на характеристиках об'єкта оптимізації і сукупності даних, необхідних для оптимізації об'єкта.

Об'єкти оптимізації можна класифікувати по ряду ознак. До таких ознак відносяться:

- число оптимізованих параметрів об'єкта;

- число екстремумів характеристики об'єкта, використаної як показник якості;
- обсяг апріорної інформації про об'єкт;
- спосіб математичного опису об'єкта.

По числу змінних параметрів розрізняють одно- і багатопараметричні об'єкти. В залежності від кількості екстремумів об'єкти поділяються на одноекстремальні і багатоекстремальні, причому в останньому випадку оптимізаційна задача зводиться до пошуку глобального екстремуму, тобто мінімального мінімуму і максимального максимуму.

В залежності від обсягу апріорної інформації, можуть бути екстремальні об'єкти, для яких існує математичний опис, і залежність показника якості Q від параметрів оптимізації X відома. Для таких об'єктів є достатній обсяг апріорної інформації. Існує також великий клас об'єктів, для яких немає ніякого математичного опису. Малий обсяг апріорної інформації про подібні об'єкти послужив приводом називати їх об'єктами типу "чорний ящик".

Сукупність параметрів, які оптимізуються, утворює вектор параметрів об'єкта оптимізації і характеризує вид оптимізаційної задачі. Якщо число параметрів, які оптимізуються, більше одиниці ($n>1$), то задача відноситься до багатопараметричних, а при $n=1$ вона переходить в одно параметричну оптимізаційну задачу.

Сукупність показників якості утворить вектор показників якості об'єкта $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$.

При необхідності характеризувати об'єкт групою показників якості, задача класифікується як багатокритеріальна чи векторна, якщо ж для оптимізації обраний лише один показник якості, то задача переходить в однокритеріальну чи скалярну.

1.3. Постановка оптимізаційної задачі

В процесі побудови оптимізаційної задачі (ОЗ) необхідно інженерові чи науковцеві вирішити такі завдання:

1) Вибір та визначення критерію оптимізації;

2) Визначити проектні параметри;

3) Побудувати цільову функцію (модель залежності між КО та проектними параметрами);

4) Визначити обмеження;

5) Вибір методу розв'язання оптимізаційної задачі.

Надалі будемо вважати, що ОЗ сформульована, якщо вона містить усі вище перераховані елементи. В ряді випадків у процесі автоматизованого проектування деякого технічного об'єкта КО можна отримати з технічного завдання, де записані вимоги до приладу чи технологічного процесу його виготовлення. Проблеми виникають в тих випадках, коли КО є багато і необхідно вибрати з них один, або декілька.

Не менш важливим питанням є визначення переліку множини проектних параметрів. Кількість проектних параметрів є необмеженою. В даному випадку йде мова про параметри, які мають суттєвий вплив на критерій оптимальності (тобто якусь властивість об'єкта проектування). Тобто, на практиці необхідно відкинути ті проектні параметри, вплив яких виражається значеннями на рівні похибки вихідного параметра.

Дане питання детально розглядається в теорії побудови математичних моделей об'єкта проектування. Лишень з тою відмінністю, що замість вихідних параметрів ми оперуємо критерієм оптимальності [4].

Дещо інша ситуація з етапом побудови цільової функції. Все дуже красиво виглядає на лекціях, коли в якості прикладу береться стандартна задача і без проблем будується ЦФ. На практиці під час проектування технічного пристрою ще невідомо остаточно його структуру, параметри елементів структури, тощо. Тому побудувати ЦФ надзвичайно складно. Тим більше побудувати адекватну модель залежності вихідного параметра від вхідних, а на основі моделі – ЦФ. Інколи взагалі така залежність невідома, або побудувати математичну залежність КО від проектних параметрів неможливо. Тому, необхідно володіти певним досвідом у цій галузі і ставитись до цього етапу надзвичайно серйозно. Оскільки від адекватності розробленої математичної моделі залежності між критерієм оптимальності та проектними параметрами залежить точність отриманих результатів оптимізації.

Сукупність обмежень відіграє дуже важливу роль при постановці і розв'язання оптимізаційної задачі. Найбільш часто зустрічаються обмеження виду рівності ($x_i = x_{i0}$) чи нерівності ($x_{imin} \leq x_i \leq x_{imax}$). Обмеження накладаються на змінні проектні параметри, а також на показники якості. Зміст цього етапу полягає в тому, що часто якість системи характеризується не одним, а групою показників якості, тому якщо система оптимізується по одному показнику якості, то інші можуть досягти такої величини. Отже, якщо обраний якийсь параметр системи як критерій якості, то на інші показники якості і змінні параметри накладаються обмеження. Якщо в задачі багатокритеріальної (векторної) оптимізації перевести частину показників якості в розряд обмежень, то можна її звести до однокритеріальної (скалярної) задачі.

Четвертий етап, в більшості випадків не представляє складності, оскільки обмеження визначаються вимогами технічного завдання на проектування.

Завершальними етапами розв'язання оптимізаційної задачі є вибір методу оптимізації і сама оптимізація, тобто знаходження оптимальних значень проектних параметрів (вхідних змінних), при яких цільова функція (якості) досягає мінімуму чи максимуму.

Вибір методу оптимізації залежить, в основному, від виду цільової функції, що у свою чергу визначається особливостями об'єкта оптимізації: його складністю, структурою, математичним описом об'єкта, наявністю апріорних даних про об'єкт проектування.

Найбільш повно розроблені методи оптимізації, які отримали назву "методи математичного програмування". До них відносяться методи лінійного, геометричного, випуклого, нелінійного, стохастичного програмування.

Для застосування того чи іншого методу необхідно, щоб цільова функція відповідала певним вимогам, а саме: її аналітичне вираз повинен бути певного виду.

Варто мати на увазі, що структура вираження цільової функції цілком залежить від особливостей математичного опису об'єкта оптимізації, тому що функція якості знаходиться із математичного опису об'єкта (його математичної моделі).

Як раніше вказувалося, опис об'єкта може бути представлено або у вигляді аналітичних співвідношень, або у вигляді алгоритмів. Остання форма опису практикується при описі складних об'єктів, коли доцільне застосування методів машинного моделювання. Тому не завжди вдається отримати цільову функцію у формі явної аналітичної залежності.

Усе це ускладнює в багатьох випадках застосування добре розроблених методів математичного програмування.

Для розв’язання багатопараметричних оптимізаційних задач при алгоритмічному методі опису об'єктів проектування можуть бути використані пошукові методи оптимізації.

Отже, в якості прикладу наведемо формулювання однокритеріальної оптимізаційної задачі.

Необхідно знайти такі значення проектних параметрів x_1, x_2, x_3, x_4 та x_5 об’єкта дослідження, для яких цільова функція досягає максимального значення

$$\max f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

при цьому виконуються такі обмеження нерівності та рівності:

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 10,$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \leq 8,$$
$$h_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 12,$$
$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

В наведеному прикладі кількість проектних параметрів рівна п’яти. При чому їхні значення можуть бути більшими, або рівними нулю. Для обмеження у формі рівностей і два обмеження у формі нерівностей.

1.4. Причини багатокритеріальності в задачах оптимального проектування

Майже будь-яке складне технічне завдання прийняття рішення є багатокритерійним, оскільки при виборі найкращого варіанту доводиться враховувати багато різних вимог, і серед цих критеріїв зустрічаються такі, що суперечать один одному. Проте, майже всі математичні методи оптимізації призначені для знаходження екстремуму однієї функції – тобто для знаходження оптимального розв’язання за одним критерієм. Тому найчастіше намагаються звести багатоцільове завдання до одноцільового. Ця процедура в більшості випадків призводить до серйозного спотворення сутності проблеми і, отже, до невиправданої заміни одного завдання іншим.

Якщо при розв’язанні одноцільових задач методологічних проблем не виникає, а можливі тільки обчислювальні труднощі, то інакше йде справа з багатокритерійними задачамиТут основні нюанси пов'язані з наступною проблемою: що слід вважати якнайкращою альтернативою в завданні з декількома цільовими функціями, які суперечливі між собою, і досягають максимуму в різних точках множини альтернатив?

Цілі, багатокритеріальної задачі, можуть знаходитися одна з одною в наступних відносинах:

1. Цілі взаємно нейтральні. В такій ситуації система може стосовно окремих цілей характеризуватися і розглядатися незалежно.

2. Цілі кооперуються. Тут, як правило, систему вдається розглянути стосовно однієї мети, а інші досягаються одночасно.

3. Цілі конкурують. В цьому випадку одну з цілей можна досягти лише за рахунок іншої.

Якщо цілі частково нейтральні, частково кооперовані і частково конкурують між собою, то завдання формулюється таким чином, що потрібно брати до уваги тільки конкуруючі цілі. Розгляд нейтральних або кооперативних цілей не представляє особливих труднощів, так що проблеми, орієнтовані на множину цілей, перш за все повинні бути розглянуті в частині конкуруючих цілей, якщо всі вони разом не можуть бути виражені одновимірним параметром.

Найбільш загальною математичною моделлю прийняття оптимального рішення є завдання багатопараметричної оптимізації. Наведемо декілька причин, які приводять до багатокритеріальних завдань.

1. Однією з причин, що приводить до багатакритеріальності, є *множина технічних вимог*, які пред'являються до характеристик проектованого пристрою.

2. Наступною причиною багатакритеріальності є *необхідність забезпечення оптимальності проектованого пристрою за різних умов його функціонування,* тобто забезпечення екстремальних значень критерію оптимальності при невизначеності умов, в яких доводиться працювати пристрою.

3. В тих випадках, *коли проектований пристрій складається з декількох взаємозв'язаних вузлів і блоків, оптимальність* всього *пристрою визначається ефективністю і якістю його окремих частин, кожна з яких може бути охарактеризована, принаймні, хоч би одним власним критерієм оптимальності* $f_i(\vec{x})$.

В цьому випадку функціонування всього пристрою можна вважати якнайкращим, якщо за рахунок вибору керованих параметрів $\vec{x}$ забезпечуються екстремальні значення всіх приватних критеріїв оптимальності як основних підцілей однієї загальної мети проектування.

1.5. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації

В загальному випадку задачами багатокритеріальної оптимізації прийнято вважати такі задачі, де існує декілька критеріїв оптимізації.

Одне з можливих визначень наведено наступне [6, 7]:

Багатокритеріальна оптимізація або програмування (англ. Multi-objective optimization) — це процес одночасної оптимізації двох або більше конфліктуючих цільових функцій в заданій області визначення.

Багатокритеріальності проблема – задача вибору рішення при наявності декількох функцій цілі [5].

Задача багатокритеріальної оптимізації зустрічаються в багатьох галузях науки та техніки.

Постановка багатокритеріальної оптимізації вже оперує з такими елементами, як цільові функції, а не критерії.

В загальному випадку задачу багатокритеріальної оптимізації можна сформулювати наступним чином [8,9].

Знайти такі значення проектних параметрів, для яких забезпечуються екстремальні значення цільових функцій:

$$\min(\max) f_i(\vec{x}),\ (i = \overline{1,n}),\ j = \overline{1,m}, \tag{1.1}$$

при виконанні наступної системи обмежень

$$g_k(\overline{X}) \le \alpha_k,\ (k = \overline{1,l}), \tag{1.2}$$

$$h_m(\overline{X}) = \beta_m,\ (m = \overline{1,j}),$$

$$b_1 \le x_j \le b_m\ .$$

де вектор розв'язків $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ належать до не порожньої області визначення D.

Отже задача багатокритеріальної оптимізації полягає у пошуку вектора цільових змінних, який задовільняє накладеним обмеженням та оптимізує векторну функцію, елементи якої відповідають цільовим функціям. Ці функції утворюють математичне описання критерію задовільності та, зазвичай, взаємно конфліктують. Звідси, «оптимізувати» означає знайти такий розв'язок, за якого значення цільових функцій були б прийнятними для постановника задачі [9].

1.6. Контрольні запитання до розділу 1

1. Що таке критерій оптимізації?
2. Що Ви розумієте під цільовою функцією?
3. Яка задача називається задачею багатокритеріальної оптимізації?

4. Які види критеріїв оптимізації Ви знаєте?
5. Який критерій оптимізації називається векторним?
6. Який критерій оптимізації називається скалярним?
7. Що таке проектні параметри?
8. Що таке локальний оптимум?
9. Що таке глобальний оптимум?
10. Які причини багатокритеріальності Ви знаєте?
11. Наведіть приклад багатокритеріальної оптимізаційної задачі?
12. Які методи розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації Ви знаєте?
13. На основі якої інформації визначаються проектні параметри?
14. На основі якої інформації визначаються критерії оптимізації?
15. Яка різниця між критерієм оптимізації та цільовою функцією?
16. Які основні кроки включає процес розв’язання оптимізаційних задач?
17. Які види обмежень Ви знаєте?
18. Наведіть приклад багатокритеріальної оптимізаційної задачі?
19. Наведіть приклад взаємно нейтральних критеріїв оптимальності?
20. Наведіть приклад критеріїв оптимальності, які кооперуються в процесі рішення деякої задачі?
21. Наведіть приклад критеріїв оптимальності, які взаємнонейтральні в процесі рішення задачі проектування?

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ОДНОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

В першому розділі цієї роботи було зазначено, що задачі багатокритеріальної оптимізації (ЗБО) - це такі задачі оптимізації, в яких використовується не один, а кілька критеріїв оптимальності. На практиці такі задачі виникають, коли проектований об'єкт (чи вихідний параметр об'єкта розроблення) не може бути описаний однокритеріальною залежністю, або в тій ситуації, коли об'єднати окремі критерії в єдиний узагальнений критерій не представляється можливим. В ряді випадків таке об'єднання критеріїв у єдиний узагальнений критерій застосовується і воно буде розглянуто в третьому розділі даної роботи. Але це об'єднання, як правило, буває формальним, або по іншому його називають штучним, яке не несе ніякого фізичного навантаження.

З математичної точки зору не існує ідеального методу або способу розв'язання таких задач. Кожний з них має свої певні переваги та недоліки і область застосування. В цьому розділі розглянемо методи, які можна звести до одного критерія та методи, які дають змогу попередньо розв'язати задачі оптимізації як однокритеріальні з наступними перетвореннями, що дають змогу вважати отримані результати, як результати розв'язання ЗБО. Отже розглянемо більш детально такі методи розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації, а саме:

- метод головної компоненти (МГК);
- метод комплексного критерію;
- лексикографічний метод (ЛМ);
- метод поступок (МП);
- метод ідеальної точки (МІТ);
- метод умовного центра мас (МУЦМ).

2.1. Метод головної компоненти

Ідея методу головної компоненти полягає в тому, що узагальнений критерій (часом його називають критерій якості) зв'язується з одним із критеріїв, що вибраний в ролі основного (головного), а на основі інших критеріїв будують обмеження. В такому випадку отримують задачу однокритеріальної оптимізації для розв'язання якої використовують відповідні методи на основі виду та особливостей цільової функції обмеження. Блок-схема алгоритму роботи цього методу наведена на рис.2.1. Наведена блок схема включає такі основні кроки, як вибір основного критерію оптимальності, побудова обмежень на основі інших критеріїв та, відповідно, розв'язання отриманої однокритеріальної задачі.

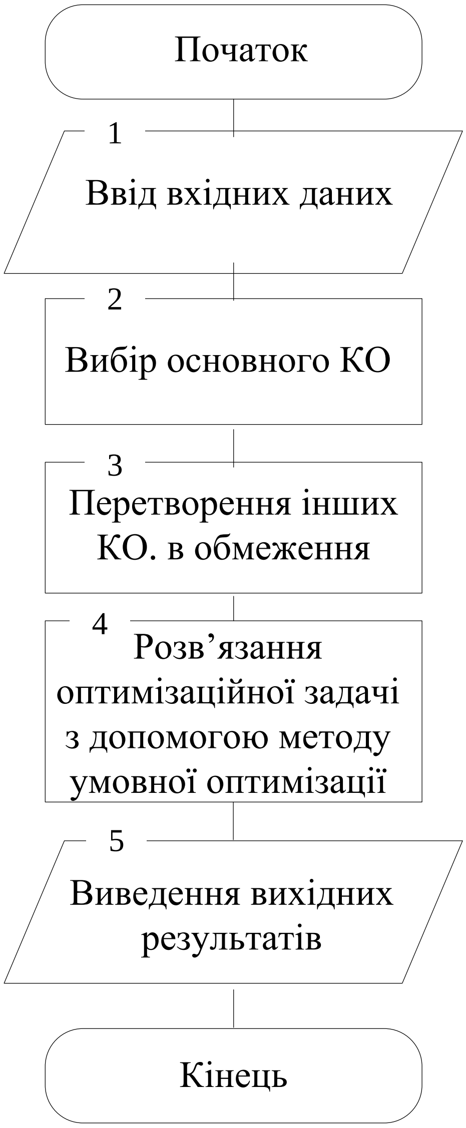

Рис.2.1. Блок-схема алгоритму застосування методу головної компоненти

В загальному випадку припустимо, що нам необхідно в процесі автоматизованого проектування деякого складного об'єкта розв'язати ЗБО, яка має n критеріїв оптимальності:

$$F = \{\max f_1(\overline{X}), \max f_2(\overline{X}), \ldots, \min f_{n-1}(\overline{X}), \min f_n(\overline{X})\}, \qquad (2.1)$$

де $f_1(\overline{X})$ - перша цільова функція, яка описує, для прикладу, продуктивність деякого об'єкту, $f_2(\overline{X})$ - друга цільова функція, яка описує надійність цього технічного пристрою, … , $f_n(\overline{X})$ - n-а цільова функція, яка описує його собівартість.

З обмеженнями наступного виду

$$g_k(\overline{X}) \le \alpha_k, \ (k = \overline{1,l}), \qquad (2.2)$$

$$h_m(\overline{X}) = \beta_m, \ (m = \overline{1,j}),$$

де $g_k(\overline{X}) \le \alpha_k$ - k-те обмеження нерівності, $h_m(\overline{X}) = \beta_m$ - m-те обмеження рівність, α_k .та β_m - деякі константи, l - кількість обмежень нерівностей, j - кількість обмежень рівностей.

Припустимо, що на основі деякого методу розробник визначив, що головним критерієм оптимальності є собівартість його виготовлення ($f_n(\overline{X})$). Відповідно, задача багатокритеріальної оптимізації, яку необхідно розв'язати з допомогою методу головної компоненти, буде сформульована наступним чином:

знайти

$$\min f_n(\overline{X}), \qquad (2.3)$$

при виконанні таких обмежень:

$$f_1(\overline{X}) \ge A_1, \ f_2(\overline{X}) \ge A_2, \ \ldots, \ f_{n-1}(\overline{X}) \le A_{n-1}, \qquad (2.4)$$

$$g_k(\overline{X}) \le \alpha_k, \ (k = \overline{1,l}),$$

$$h_m(\overline{X}) = \beta_m, \ (m = \overline{1,j}),$$

$$A_{<i>} = < A_1, A_2, \ldots, A_n >,$$

де $A_i \, (i = 1,2,\ldots,n)$ - граничні значення критеріїв оптимальності (константи).

Отже метод головної компоненти полягає в довільному виборі одного із критеріїв в якості головного, по якому проводиться оптимізація і вибирається рішення. При цьому інші компоненти переводяться в розряд обмежень.

Цей метод простий, наочний і часто застосовується при проектуванні, в машинобудівній практиці, однак принциповим його недоліком є довільність у виборі головного критерію. Можна навести багато прикладів із історії науки і техніки, коли довільний і невірний вибір цього критерію призводив до трагічних наслідків чи, щонайменше, до малоефективних результатів.

В літературі, присвяченій питанню оптимізації програм, в якості головного показника вибирають, наприклад, їх собівартість чи термін експлуатації. При оптимізації металоконструкцій - металоємність. Коли вирішуються технологічні задачі прийнято використовувати в якості головного критерію продуктивність праці, продуктивність обладнання.

Для кращого розуміння особливостей застосування цього методу, наведемо приклад ЗБО, яка включає три цільові функції та три обмеження. Отже необхідно знайти такі значення проектних параметрів x_1, x_2, x_3, x_4 та x_5, для яких цільові функції приймають максимально можливі значення:

$$\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \tag{2.1}$$

$$\max f_2(\bar{x}) = 3x_1 - x_2,$$

$$\max f_3(\bar{x}) = x_1 - 4x_2,$$

при виконанні таких умов:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Припустимо, що головним критерієм є перший, а другий та третій, відповідно, необхідно ввести в список обмежень. Оскільки, в другому та третьому КО шукаємо максимум, то цільові функції мають бути не менше деякої уявної величини (що в процесі проектування може визначатися технічним завданням на виріб).

Для прикладу, в процесі проектування автомобілів, це може бути його максимальна швидкість (тобто більшою може бути, але не меншою деякого значення) у випадку проектування підсилювача звукової частоти – вихідна потужність у випадку розроблення комп’ютера – об’єм пам’яті , та ін.

Повертаючись до нашого прикладу приймемо, що значення другого КО, має бути більше-рівне чотирьох, а третього – шести. Тоді два додаткові обмеження можна записати у наступній формі:

$$3x_1 - x_2 \ge 4,$$

$$x_1 + 4x_2 \ge 6.$$

Задача, яку в кінцевому випадку необхідно розв’язати, буде включати цільову функцію $\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$ та обмеження з задачі (2.1) плюс обмеження (2.2).

Неозброєним оком видно, що ця задача є задачею лінійного програмування і для розв’язання якої використаємо метод великих чисел.

В процесі застосування М-методу, модифікуємо обмеження, тобто перетворимо 4-е та 5-е обмеження нерівності в рівності, при цьому віднімаючи змінні x_6 та x_7:

$$3x_1 - x_2 - x_6 = 4, \qquad (2.3)$$

$$x_1 + 4x_2 - x_7 = 6.$$

До цих обмежень додамо штрафи R_1 та R_2.

$$3x_1 - x_2 - x_6 + R_1 = 4, \qquad (2.4)$$

$$x_1 + 4x_2 - x_7 + R_2 = 6.$$

Після врахування штрафів у цільовій функції, отримаємо таку оптимізаційну задачу:

$$\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - MR_1 - MR_2,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \qquad (2.5)$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

і додаткові обмеження з введеними штрафами

$$3x_1 - x_2 - x_6 + R_1 = 4,$$

$$x_1 + 4x_2 - x_7 + R_2 = 6,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, R_1, R_2 \geq 0.$$

Слід зауважити, що штрафи перемножені на велике число і введені у ЦФ зі знаком мінус, бо маємо задачу максимізації.

Надалі модифікуємо ЦФ з (2.5) шляхом введення замість штрафів R_1 та R_2, вирази, які визначимо з виразів (2.4). Тоді отримаємо:

$$R_1 = 4 - 3x_1 + x_2 + x_6, \qquad (2.6)$$

$$R_2 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_7.$$

Модифікуємо ЦФ з (2.5) і будемо мати такий вираз:

$$\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - M(4 - 3x_1 + x_2 + x_6) - M(6 - x_1 - 4x_2 + x_7) =$$

$$= 2x_1 + 3Mx_1 + Mx_1 + 3x_2 - Mx_2 + 4Mx_2 + x_3 + 2x_4 - Mx_6 - Mx_7 - 4M - 6M =$$

$$= (2 + 4M)x_1 + (3 + 3M)x_2 + x_3 + 2x_4 - Mx_6 - Mx_7 - 10M.$$

Приймемо, що $M = 1000$, тоді ЦФ прийме такий вид:

$$\max f_1(\bar{x}) = (2 + 4M)x_1 + (3 + 3M)x_2 + x_3 + 2x_4 - Mx_6 - Mx_7 - 10M =$$

$$= 4002x_1 + 3003x_2 + x_3 + 2x_4 - 1000x_6 - 1000x_7 - 10000.$$

Надалі необхідно розв'язати симплекс-методом задачу ЛП (2.5), де необхідно замінити ЦФ на модифіковану (2.8).

В кінцевому випадку отримуємо такі значення змінних та ЦФ:

$x_1 = 1{,}69$, $x_2 = 1{,}08$, $x_3 = 2{,}15$, $x_4 = 3{,}54$, $x_5 = 4{,}6$,

$f_1(\bar{x}) = -6{,}15$

$$f_1(\bar{x}) = 1{,}69 * 2 + 1{,}08 * 3 + 2{,}15 + 2 * 3{,}54 = 3{,}38 + 3{,}24 + 2{,}15 + 7{,}08 = 15{,}85$$

Отже, метод головного критерію застосовується в таких задачах, як мінімізація затрат при умові виконання плану по виробництву різних видів продукції, максимізація випуску комплектних наборів при обмеженні на використовувані ресурси та ряд інших.

До переваг МГК можна віднести такі характеристики як простоту та наглядність, а його недоліком є певна присутність суб'єктивності в процесі вибору головного критерія (свавілля).

2.2. Лексикографічний метод

Ідея методу ґрунтується на тому, що спершу часткові критерії оптимізації ранжують по їх відносній важливості і поступово розв'язують задачі однокритеріальної оптимізації, починаючи з найважливішого критерія оптимізації.

В загальному випадку алгоритм (рис.2.2) розв'язання ЗБО з використанням лексикографічного методу включає такі кроки:

Крок 0. На попередньому кроці розв'язання ЗБО ранжуємо часткові критерії в порядку спадання їхньої важливості. Пронумерувавши після цього критерії, можна вважати, що перший критерій – найважливіший.

Крок 1. Розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації (знайти такі значення проектних параметрів $\bar{x}$, для яких):

$$\max f_1(\bar{x}),$$

$$g_i(\bar{x}) \ge B_i,$$
$$h_j(\bar{x}) = A_j.$$

і знаходиться максимальне значення критерію $f_1^*(\bar{x}_1^*)$.

Крок 2. Розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації

$$\max f_2(\bar{x})$$

$$g_i(\bar{x}) \ge B_i,$$
$$h_j(\bar{x}) = A_j.$$

$$f_1(\bar{x}) = f_1^*(\bar{x}_1^*)$$

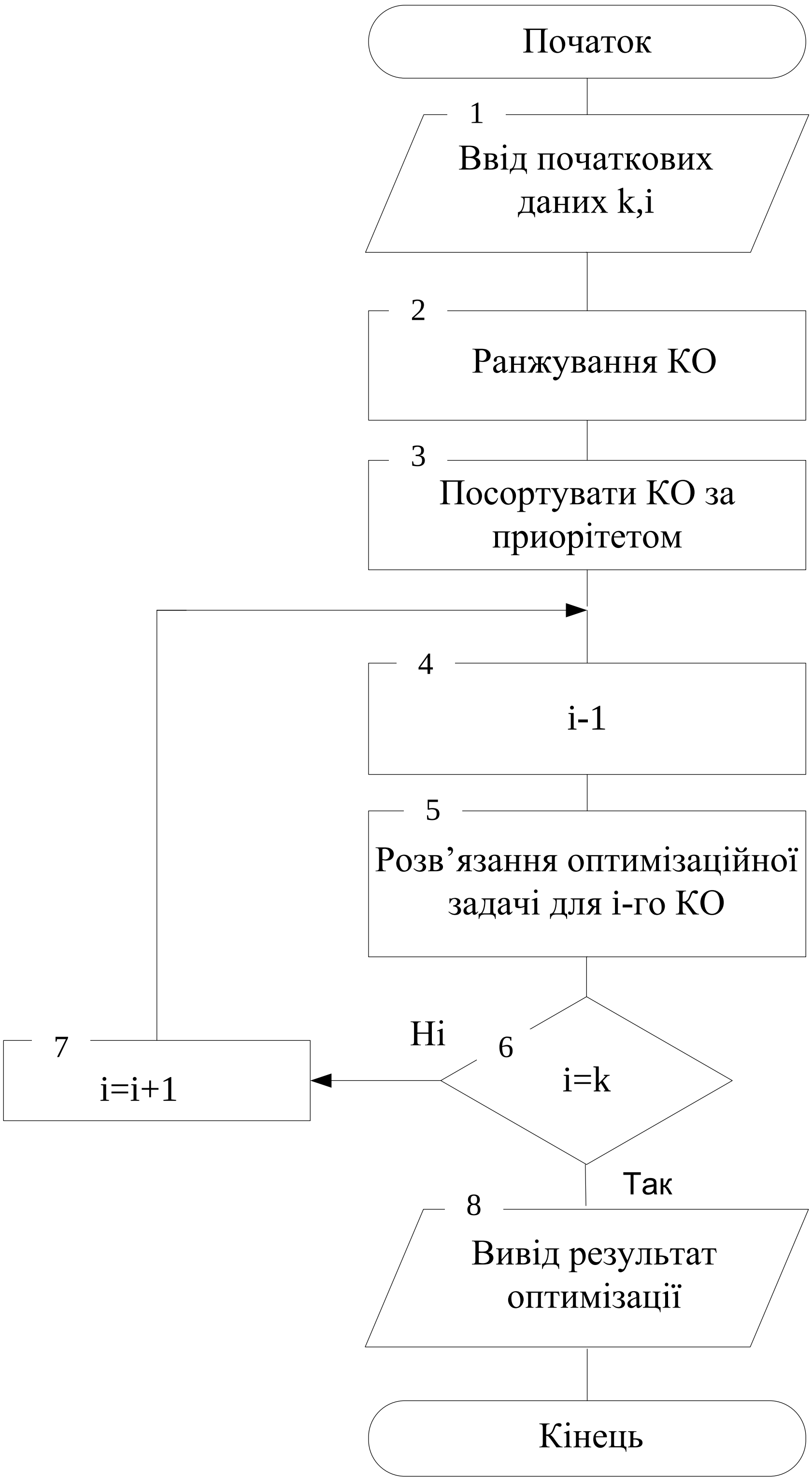

Рис.2.2 Блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням лексикографічного методу

Знайдене розв’язання $\bar{x}_2^*$ максимізує другий критерій, який задовольняє при цьому додатковому обмеженню, при виконанні якого досягається максимум по першому критерію.

Крок k**.** Розв'язати задачу багатокритеріальної умовної оптимізації

$$\max f_k(\bar{x})$$

$$g_i(\bar{x}) \geq B_i,$$
$$h_j(\bar{x}) = A_j,$$

$$f_1(\bar{x}) = f_1^*(\bar{x}_1^*),\ f_2(\bar{x}) = f_2^*(\bar{x}_2^*),\ \ldots,\ f_{k-1}(\bar{x}) = f_{k-1}^*(\bar{x}_{k-1}^*).$$

Розв'язання $\bar{x}_k^*$ максимізує k - й критерій оптимальності, одночасно задовольняючи обмеження на значеннях попередніх критеріїв оптимальності.

Ця процедура продовжується до тих пір, поки не буде максимізоване значення останнього із часткових критеріїв, після чого процедура завершується.

В процесі застосування вищенаведеного алгоритму після 1-го, 2-го, …, $k-1$-го кроків необхідно цільову функцію перевести в список обмежень, що наведено нижче:

$$f_1(\bar{x}) \geq f_1^* \text{ – після 1-го кроку,} \tag{2.10}$$

$$f_2(\bar{x}) \geq f_2^* \text{ – після 2-го кроку,}$$

. . .

$$f_{k-1}(\bar{x}) \geq f_{k-1}^* \text{ – після } k-1\text{-го кроку,}$$

де f_1^*, f_2^*, …, f_{k-1}^* - отримане значення цільової функції після розв'язання задачі на першому, другому, …, $k-1$-му кроці.

Звернемо увагу на те, що лексикографічний метод не призводить до нескінченної ітераційної процедури, яка зупиняється, коли одержаний результат задовольняє розробника. Навпаки, описана процедура має наперед відоме обмежене число кроків, яке не більше числа кількості часткових критеріїв.

Слід зауважити, що в лексикографічному методі часто можливості вибору не залишається вже після оптимізації по першому критерію, так що процес зразу ж зупиняється. В цьому випадку, задача багатокритеріальної оптимізації виявляється зведеною до однокритеріальної задачі з найбільш важливим критерієм, причому, значеннями інших критеріїв практично нехтують. Якщо ж після оптимізації першого критерію і залишається якась свобода дій, то її може виявитися недостатньо для одержання задовільних значень інших критеріїв оптимальності.

Необхідно додати, що задача ранжування критеріїв оптимальності, за важливістю зовсім не проста. Окрім того, лексикографічна процедура, загалом, некоректна з обчислювальної точки зору, так як малі збурення параметрів початкової задачі можуть призвести до серйозної помилки в результатах. Хоча і були розроблені стійкі обчислювальні методи розв'язку цієї задачі, використання лексографічної процедури у випадку нестійкості до початкових даних вимагає особливої уваги інженера чи розробника. Теоретичною основою лексографічного методу є лексографічний порядок, який задається на множині векторів. Будучи повним, він тим не менше, не володіє властивістю неперервності, що може привести до несподіваних наслідків.

Для кращого розуміння особливостей та ідеї методу наведемо приклад, а саме: необхідно розв'язати таку задачу багатокритеріальної оптимізації (задача лінійного програмування) з трьома цільовими функціями, трьома обмеженнями у вигляді рівностей і п'ятьма змінними (Див.формули 2.1):

Після проведення операції ранжування, для прикладу, маємо таку ситуацію:

1. $\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$ – найважливіший КО;

2. $\max f_2(\bar{x}) = 3x_1 - x_2$ – менш важливий КО;

3. $\max f_3(\bar{x}) = x_1 - 4x_2$ – найменш важливий КО.

Згідно з вищенаведеним алгоритмом на першому кроці необхідно розв'язати таку задачу однокритеріальної оптимізації:

$$\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \tag{2.10}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Застосувавши симплекс – метод до розв’язання задачі (2.10) отримаємо такі результати:

$$f_1^{\max} = f_1^* = 22, \qquad (2.11)$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8,\ x_5 = 4.$$

Наступний крок алгоритму передбачає введення першого критерія оптимізації в список обмежень (справу ми маємо з цільовою функцією, яка описує цей критерій і дає змогу отримати числове значення оцінки цього критерію) і розв’язання однокритеріальної оптимізаційної задачі з другим критерієм. Тобто, оптимізаційну задачу наступного виду:

$$\max f_2(\bar{x}) = 3x_1 - x_2, \qquad (2.12)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 22$ – додаткове обмеження на основі $f_1(\bar{x})$,

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

В результаті розв’язання задачі (2.12) отримаємо такі значення:

$$f_2^* = 0,\ f_1^* = 22,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8,\ x_5 = 4.$$

Останній етап розв’язання задачі (2.1) з використанням лексикографічного методу передбачає введення другої цільової функції в список обмежень і розв’язання нижченаведеної оптимізаційної однокритеріальної задачі лінійного програмування:

$$\max f_3(\bar{x}) = x_1 - 4x_2, \qquad (2.13)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 22$ – 1-ше додаткове обмеження на основі $f_1(\bar{x})$,

$3x_1 - x_2 \geq 0$ – 2-ге додаткове обмеження на основі $f_2(\bar{x})$,

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Отримані кінцеві результати розв’язання задачі (2.1) наступні:

$$f_3^* = 0,\; f_2^* = 0,\; f_1^* = 22, \tag{2.14}$$

$$x_1 = 0,\; x_2 = 0,\; x_3 = 6,\; x_4 = 8,\; x_5 = 4.$$

Необхідно зауважити, що (підтверджено наведеним прикладом) в лексикографічному методі часто можливості вибору не залишається вже після оптимізації по першому критерію, так що процес зразу же зупиняється, як наслідок використовується цей метод, на практиці, дуже рідко.

Розвитком лексографічного методу є метод поступок.

2.3. Метод поступок

Для задач, у яких критерії не рівнозначні, застосовують інший метод розв’язання, а саме: метод *поступок.* Перш ніж розв’язувати поставлену задачу за методом поступок, необхідно:

Крок 1. Розмістити критерії оптимальності за їхньою значимістю (найважливіший необхідно розмістити першим, потім менш важливий і т.д.).

Крок 2. Відшукати оптимальне значення f_1^* для цільової функції f_1.

Крок 3. Зробити поступку по першому показнику ефективності, тобто погіршити величину f_1^* до значення $f_1^{**} = k_1 f_1^*$.

Крок 4. Ввести в задачу додаткове обмеження $f_{1i} f_1^{**}$.

Крок 5. Відшукати оптимальне значення f_2^* цільової функції f_2.

Крок 6. Зробити поступку по другому показнику ефективності, тобто погіршити величину f_2^* до значення $f_2^{**} = k_2 f_2^*$.

Крок 7. Ввести в оптимізаційну задачу додаткове обмеження $f_{2i} = f_2^{**}$.

Крок 8. Нову задачу з двома додатковими обмеженнями розв’язати по третьому показнику ефективності і т.д.

Крок 9. Процес розв’язання задачі закінчується, коли рішення буде отримано по всім показникам. Кінцевий результат і буде найбільш раціональним - отримано оптимальне значення найменш важливого критерію при умові гарантованих значень попередніх показників ефективності.

Приклад блок-схеми алгоритму застосування методу поступок до розв’язання ЗБО наведено на рис.2.3. Особливістю якого є те, що важливість критеріїв оптимальності також визначається на основі знань та досвіду інженера, що також є суб’єктивним фактором.

Необхідно додати основні математичні співвідношення для процесу введення додаткових обмежень після виконання поступки.

$f_1(\bar{x}) \geq f_1^* - \Delta_1 = f_1^{**}$ – додаткове обмеження після 1-ї поступки;

$f_2(\bar{x}) \geq f_2^* - \Delta_2 = f_2^{**}$ – додаткове обмеження після 2-ї поступки;

. . .

$f_{n-1}(\bar{x}) \geq f_{n-1}^* - \Delta_{n-1} = f_{n-1}^{**}$ – додаткове обмеження після $n-1$-ї поступки.

Застосуємо метод поступок до розв’язання задачі багатокритеріальної оптимізації (2.1). Будемо вважати, що критерії оптимізації уже розміщені по їх важливості. Найбільш важливий розміщений першим, тобто перший крок алгоритму уже виконали. Розв’язання однокритеріальної оптимізаційної задачі (2.10) ми також вже виконали з першим КО (Крок 2 алгоритму) і розв’язання наведено вище (Див. вирази 2.11). Ці два кроки ми вже виконали в процесі застосування лексикографічного методу до розв’язання ЗБО (2.1). Третій крок передбачає операцію виконання поступки. Для розглядуваної задачі зробимо поступку в розмірі 33%, а саме ($k_1 = 0{,}33$):

$$f_1^{**} = f_1^* - \Delta_1 = f_1^* - 0{,}33 * f_1^* = 22 - 0{,}33 * 22 = 22 - 7{,}27 = 14{,}7 . \quad (2.15)$$

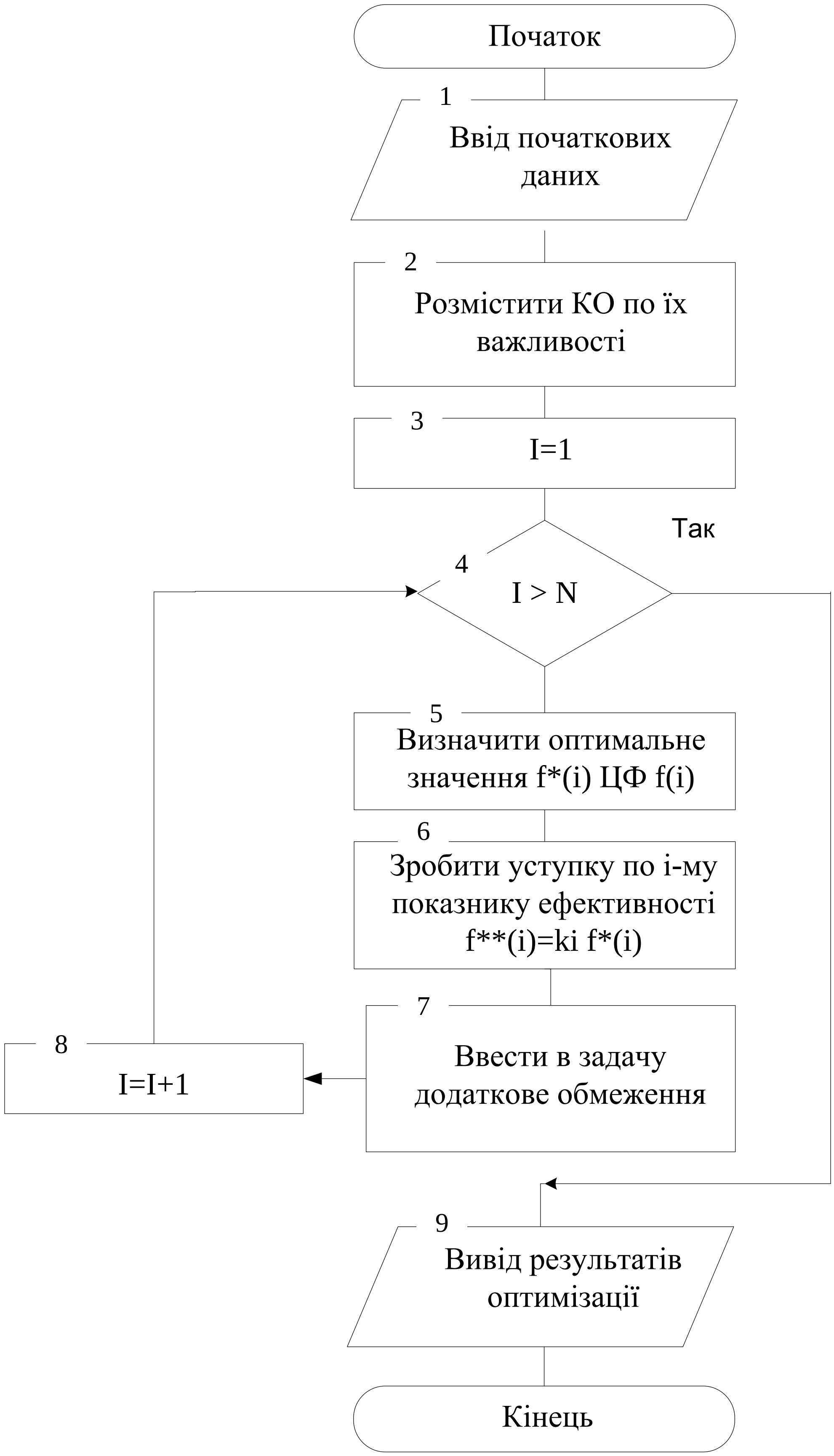

Рис.2.3 Блок-схема алгоритму застосування методу поступок

Введемо в задачу відповідно наступне додаткове обмеження (Крок 4), а саме будемо мати таку форму:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 14{,}7$ – 1-ше додаткове обмеження на основі $f_1(\bar{x})$.

В даному випадку ми погіршили значення першого критерію на 33%, зменшили значення цільової функції тобто з 22 до 14,7.

П'ятий крок алгоритму передбачає розв'язання однокритеріальної оптимізаційної задачі з другим КО та модифікованою системою обмежень, що наведено нижче:

$$\max f_2(\bar{x}) = 3x_1 - x_2, \tag{2.11}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 14{,}7$ – додаткове обмеження на основі $f_1(\bar{x})$,

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Слід зауважити, що задача (2.16) аналогічна до (2.12) лишень з відмінністю в додатковому обмеженні, де змінено максимальне значення цільової функції 22 на 14,7.

Результати розв'язання задачі (2.16) наведено нижче:

$$f_3^* = 2{,}42,\; f_2^* = 7{,}26,\; f_1^* = 14{,}7, \tag{2.17}$$

$$x_1 = 2{,}42,\; x_2 = 0,\; x_3 = 3{,}58,\; x_4 = 3{,}16,\; x_5 = 6{,}42.$$

Надалі, знову необхідно зробити поступку, але вже для другого критерію оптимальності. Для прикладу, виберемо величину поступки для другого критерію оптимальності в 40 %:

$$f_2^{**} = f_2^* - \Delta_2 = f_2^* - 0{,}4 * f_2^* = 7{,}26 - 0{,}4 * 7{,}26 = 7{,}26 - 2{,}9 = 4{,}36. \tag{2.18}$$

Тоді додаткове обмеження набуде наступного вигляду:

$3x_1 - x_2 \geq 4{,}36$ – 2-ше додаткове обмеження на основі $f_2(\bar{x})$.

Наступний крок алгоритму передбачає розв'язання вже такої задачі (з третім КО і двома додатковими обмеженнями):

$$\max f_3(\bar{x}) = x_1 - 4x_2, \tag{2.20}$$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 8,$

$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 14{,}7$ – 1-ше додаткове обмеження на основі $f_1(\bar{x})$,

$3x_1 - x_2 \geq 4{,}36$ – 2-ге додаткове обмеження на основі $f_2(\bar{x})$,

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

Отримані кінцеві результати розв'язання задачі (2.20) подані нижче :

$$f_1^* = 14{,}7,\ f_2^* = 4{,}36,\ f_3^* = 7{,}74, \tag{2.21}$$

$x_1 = 1{,}94,\ x_2 = 1{,}45,\ x_3 = 1{,}16,\ x_4 = 2{,}68,\ x_5 = 4{,}48.$

Отже, метод послідовних поступок доцільно застосовувати для розв'язання тих багатокритеріальних задач, в яких усі часткові критерії природнім чином впорядковані за ступенем важливості, причому кожний критерій настільки істотно більш важливий, ніж наступний, що можна обмежитися врахуванням тільки попарного зв'язку критеріїв і вибирати допустиме зниження чергового критерію з врахуванням поведінки тільки одного наступного критерію.

Особливо зручним є випадок, коли вже в результаті попереднього аналізу багатокритеріальної задачі виявляється, що можна допустити поступки тільки в межах "інженерної" точності (5-10% від найбільшої величини критерію).

2.4. Методи цільового програмування

Основна ідея методів цієї групи полягає в припущенні, що існує певна точка, де значення усіх критеріїв $f_i(\bar{x})$, $i = \overline{1,n}$ досягають найоптимальнішого (цільового, найбільшого $f_i^{\max}(\bar{x})$) значення (тобто досягається певна ціль).

Відповідно, в самому загальному випадку задача цільового програмування (ЦП) може бути сформульована як мінімум сум відхилень цільових функцій (критеріїв) від цільових значень (оптимальних) з нормованими коефіцієнтами $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$:

$$\Delta\left(F(\bar{x}), F^{\max}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| f_i(\bar{x}) - f_i^{\max} \right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \to \min, \qquad (2.22)$$

де $F^{\max} = \left(f_1^{\max}, f_2^{\max}, ..., f_n^{\max}\right)$ - вектор цільових значень КО; $\Delta\left(F(\bar{x}), F^{\max}\right)$ - відхилення між $f(\bar{x})$ та $f^{\max}$, $1 \le p < \infty$.

Досить часто в літературі точку $F^{\max}$ називають ідеальною чи утопічною.

Наведемо приклад розв'язання ЗБО з використанням виразу (2.22).

$$f_1 = (x_1 + 2x_2)\exp(-x_2) \to \max, \qquad (2.23)$$

$$f_2 = (3x_1 + 2x_2)\exp(-(3x_1 + x_2)) \to \max,$$

$$f_3 = x_1 + x_2,$$

$$2x_1 + x_2 \le 2,$$

$$x_2 - x_1 \le 3,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Приймемо, що $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}3$ та $\alpha_3 = 0{,}2$.

Визначити

$$F(\bar{x}) = \{f_1, f_2, f_3\} \to \max.$$

В процесі розв'язання задачі отримали наступні значення ЦФ

$$f_1^{\max} = 1{,}0748,$$

$$f_2^{\max} = 0{,}7357,$$

$$f_3^{\max} = 2.$$

При визначенні $\Delta\left(F(\bar{x}), F^{\max}\right)$ отримали наступне значення:

$$\Delta\left(F(\bar{x}), F^{\max}\right) = 0{,}32534.$$

Значення компонент вектора, відповідно:

$f_1^{\max}$	$f_1(\bar{x})$	$f_2^{\max}$	$f_2(\bar{x})$	$f_3^{\max}$	$f_3(\bar{x})$
1,0748	0,7815	0,7358	0,3609	2	1,16784

2.4.1. Метод умовного центра мас

Метод умовного центра мас знайшов досить широке розповсюдження в процесі автоматизованого проектування. На основі цього методу розв’язані задачі забезпечення ефективності лісогосподарських машин для рубки, догляду, лісомеліоративних агрегатів, гідроманіпуляторів трельовочних машин.

Нехай послідовно знайдені значення екстремумів для кожної цільової функції $f_j(\bar{x})$, що відповідає точкам у просторі проектних параметрів з координатами $\{x_1^{i*}, x_2^{i*}, \ldots, x_n^{i*}\}$.

Введемо поняття “умовної маси” точки [3]:

$$m_i = \frac{\sum_i f_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \ldots, x_n^{i*})}{f_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \ldots, x_n^{i*})},$$

де $f_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \ldots, x_n^{i*})$ - значення i-ї цільової функції при сукупності керованих параметрів, що забезпечують екстремальне його значення. Будемо вважати, що компромісному розв’язанню буде задовольняти набір параметрів, які відповідають точці з координатами “умовного центра мас”:

$$x_j^{**} = \frac{\sum m_i x_j^{i*}}{\sum m_i}.$$

Знайдені з використанням цього методу середньозважені значення параметрів x_j^{**} враховують не тільки інтереси всіх показників якості, але і чутливість кожного по відношенню до даного проектного параметра.

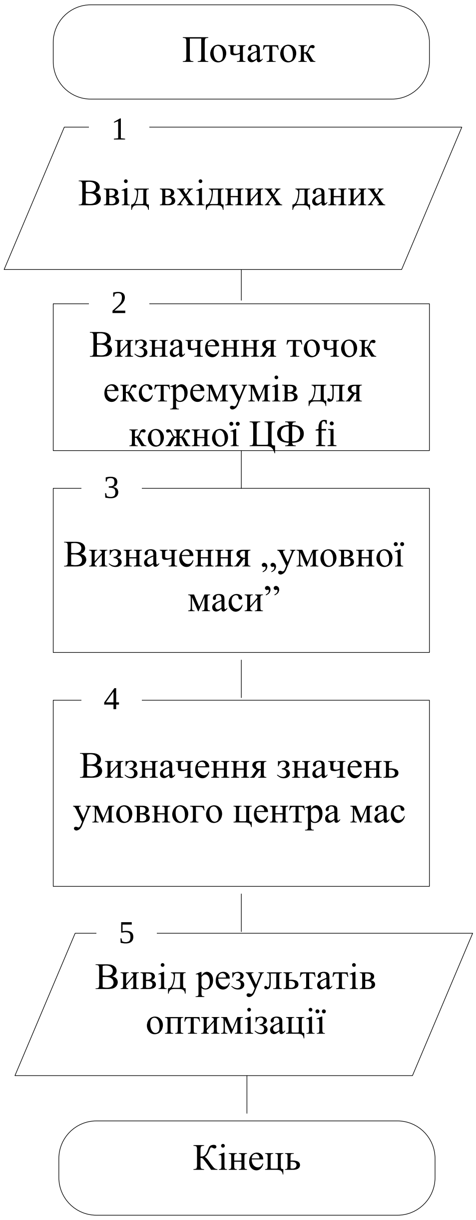

Рис.2.4 Блок-схема алгоритму застосування методу умовного центра мас

Наведемо приклад розв’язання ЗБО з використанням методу умовного центра мас. Отже, в якості прикладу, візьмемо задачу, де є три цільові функції, три обмеження та п’ять змінних і якщо формулюється таким чином, що необхідно знайти такі значення проектних параметрів, щоб забезпечити максимум ЦФ- й.

$$\max f_1(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5, \quad (2.24а)$$

$$\max f_2(\bar{x}) = x_1 + 3x_2, \quad (2.24б)$$

$$\max f_3(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2, \quad (2.24в)$$

і виконувалися такі обмеження:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \tag{2.25}$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Розв’яжемо послідовно три оптимізаційні задачі з одним критерієм оптимальності. Перша задача включає ЦФ (2.24а) та обмеження (2.25), дуга – (2.24б) і (2.25), а третя (2.24в) і (2.25).

В результаті застосування симплекс-методу отримали наступні розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації:

для першої:

$$f_1^* = 47, \tag{2.26}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ x_4 = 3,\ x_5 = 5.$$

для другої:

$$f_2^* = 3, \tag{2.27}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 7,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3.$$

для третьої:

$$f_3^* = 6, \tag{2.28}$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 2.$$

Визначимо параметри “умовного центра мас”, зокрема для нашого випадку:

$$m_i = \frac{\sum_i f_i\left(x_1^{i*}, x_2^{i*}, x_3^{i*}, x_4^{i*}, x_5^{i*}\right)}{f_i\left(x_1^{i*}, x_2^{i*}, x_3^{i*}, x_4^{i*}, x_5^{i*}\right)},$$

$$m_1 = \frac{56}{47} \approx 1.19,\ m_2 = \frac{56}{3} \approx 18.67,\ m_3 = \frac{56}{6} \approx 9.33. \tag{2.29}$$

Значення проектних параметрів “умовного центра мас”:

$$x_1^{**} = \frac{0*1{,}19 + 0*18{,}67 + 9{,}33*3}{1{,}19 + 18{,}67 + 9{,}33} = \frac{27{,}99}{29{,}19} \approx 0{,}96, \tag{2.30}$$

$$x_2^{**} = \frac{0*1{,}19 + 1*18{,}67 + 0*9{,}33}{1{,}19 + 18{,}67 + 9{,}33} = \frac{18{,}67}{29{,}19} \approx 0{,}64,$$

$$x_3^{**} = \frac{8*1{,}19 + 7*18{,}67 + 2*9{,}33}{1{,}19 + 18{,}67 + 9{,}33} = \frac{158{,}87}{29{,}19} \approx 5{,}44,$$

$$x_4^{**} = \frac{3*1{,}19 + 0*18{,}67 + 0*9{,}33}{1{,}19 + 18{,}67 + 9{,}33} = \frac{3{,}57}{29{,}19} \approx 0{,}12,$$

$$x_5^{**} = \frac{5*1{,}19 + 4*18{,}67 + 2*9{,}33}{1{,}19 + 18{,}67 + 9{,}33} = \frac{99{,}29}{29{,}19} \approx 3{,}4.$$

Відповідно значення цільових функцій:

$$f_1^* = 2*0{,}96 + 1*0{,}64 + 3*5{,}44 + 1*0{,}12 + 4*3{,}4 = \tag{2.31}$$

$$= 1{,}92 + 1{,}28 + 16{,}32 + 0{,}12 + 13{,}6 = 33{,}24,$$

$$f_2^* = 1*0{,}96 + 3*0{,}64 = 0{,}96 + 1{,}92 = 2{,}88,$$

$$f_3^* = 2*0{,}96 + 2*0{,}64 = 1{,}92 + 1{,}28 = 3{,}2.$$

Метод умовного центра мас широко використовується в процесі розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації, в процесі автоматизованого проектування складних об’єктів і систем.

2.4.2. Метод ідеальної точки

Ідея методу “ідеальної точки” ґрунтується на тому, що постулюється існування “ідеальної точки” для розв’язку задачі, у якій досягається екстремум всіх критеріїв (принцип Джофріона). Оскільки ідеальна точка, в абсолютній більшості випадків не знаходиться серед припустимих, виникає проблема знаходження точки, що „найближча” до ідеальної, і належить до множини припустимих рішень. Все було б добре, якщо б існувало єдине об’єктивне поняття “віддалі”, однак це не так – якщо на площині ми можемо з тим чи іншим обґрунтуванням застосовувати Евклідову метрику, то, наприклад, на поверхні кулі найкоротшою віддаллю буде дуга, а не пряма.

Таким чином, для розв’язання задачі багатокритеріальної оптимізації за допомогою методу “ідеальної точки” необхідно насамперед визначити її координати, і надалі визначити метрику, за допомогою якої можна було б виміряти віддаль до оптимальної точки. Для визначення координат "ідеальної точки" розв'язуємо n однокритеріальних задач за кожним з критеріїв оптимізації $\max f_1(a,x) \quad x \in X$, $i = \overline{1,n}$. Сукупність оптимальних значень критеріїв кожної з однокритерійних задач $f_i = \max f_i(a,x)$, $x \in X$ і визначаємо координати ідеальної точки $f = (f_1,...,f_n)$ в просторі критеріїв. Якщо "ідеальна точка" належить до множини припустимих (що зустрічається вкрай рідко), то розв'язок отриманий.

В іншому випадку визначаємо "віддаль" до ідеальної точки, вводячи метрику, і розв'язуємо однокритерійну задачу знаходження точки з числа припустимих, яка найменш віддалена від ідеальної. Таким чином задача матиме вигляд $f(x) = \rho(f(a,x) - f^*) \Rightarrow \min$, $x \in X$. Якщо обрана Евклідова метрика, то критерій буде мати вигляд $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x) - f_i^*\right)^2} \Rightarrow \min$.

Застосуємо метод ідеальної точки до розв'язання ЗБО (2.20), (2.21). Результати розв'язання однокритеріальних задач наведено на рис.2.7 та на рис.2.8.

В завершення можна додати ти, що метод ідеальної точки теж широко використовується в процесі розв'язання ЗБО.

Початок роботи програми

f_1=47	f_2=3	f_3=6
x_1=0	x_1=0	x_1=3
x_2=0	x_2=1	x_2=0
x_3=8	x_3=7	x_3=2
x_4=3	x_4=0	x_4=0
x_5=5	x_5=4	x_5=2

Рис.2.7. Результати розв'язання однокритеріальних задач

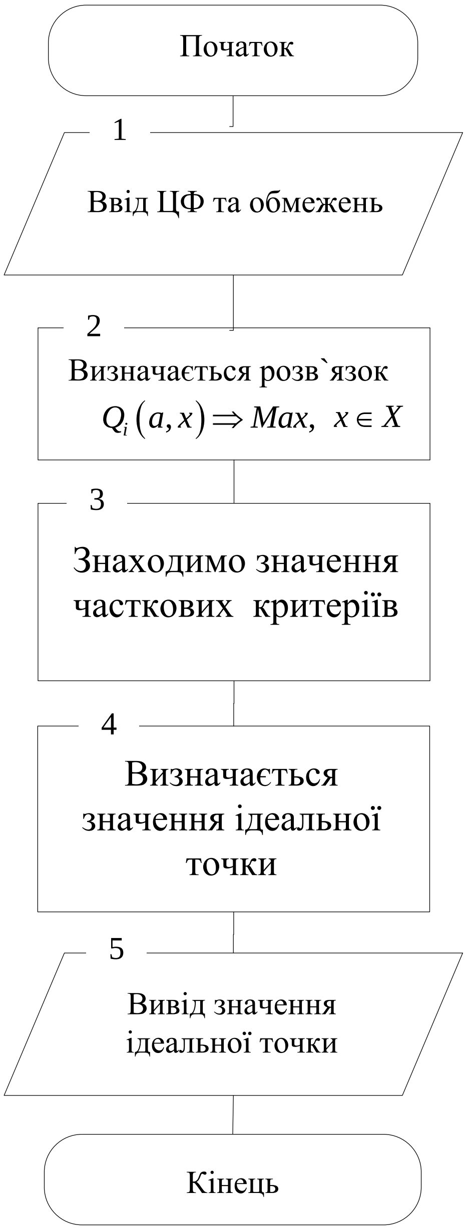

Рис. 2.5. Алгоритм розв’язку задачі багатокритеріальної оптимізації за допомогою методу ідеальної точки

Розрахунок проведено

x_1=1

x_2=0,333333333333333

x_3=5,66666666666667

x_4=1

x_5=3,66666666666667

f_1=35

f_2=2

$f3$=2,66666666666667

Рис. 2.6. Результати розв’язання ЗБО з використанням методу ідеальної точки.

2.5. Метод комплексного критерію

Метод комплексного критерію, на відміну від методу головної компоненти, застосовується досить рідко. Він полягає в переході від векторного критерію до скалярного шляхом утворення сумарного монопоказника. При цьому основна ідея методу полягає в складанні однієї функції, аргументами якої служать компоненти вектора корисного ефекту. Особливо частим випадком є представлення такої функції у вигляді дробу, де в чисельнику стоять всі величини, збільшення яких бажано (наприклад, ефект), а в знаменнику ті, які хотілося б зменшити.

2.6. Контрольні запитання до розділу 2

1. Яка ідея методу головної компоненти?
2. Яка ідея лексикографічного методу?
3. Яка ідея методу поступок?
4. Яка ідея методу ідеальної точки?
5. Яка ідея методу умовного центра мас?
6. Які переваги та недоліки МГК?
7. Які переваги та недоліки лексикографічного методу?
8. Які переваги та недоліки методу поступок?
9. Які переваги та недоліки методу ідеальної точки?
10. Які переваги та недоліки методу умовного центра мас?
11. Які основні кроки включає алгоритм застосування МГК при розв’язанні ЗБО?
12. Які основні кроки включає алгоритм застосування лексикографічного методу при розв’язанні ЗБО?
13. Які основні кроки включає алгоритм застосування методу поступок при розв’язанні ЗБО?
14. Які основні кроки включає алгоритм застосування методу поступок при розв’язанні ЗБО?
15. Які основні кроки включає алгоритм застосування методу умовного центра мас при розв’язанні ЗБО?
16. Яка ідея методу комплексного критерію?
17. Які переваги та недоліки методу комплексного критерію?

РОЗДІЛ 3.
МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ УЗАГАЛЬНЕНОГО (ІНТЕГРАЛЬНОГО) КРИТЕРІЮ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Суть цього методу полягає в тому, що власні критерії $f_i(\vec{x}), i=\overline{1,n}$ будь-яким чином поєднуються в один інтегральний критерій $F(x)=\Phi(f_1(x), f_2(x),...,f_n(x))$, а потім знаходиться максимум чи мінімум цієї цільової функції.

Якщо об'єднання власних критеріїв будується, виходячи з об'єктного взаємозв'язку власних критеріїв і критерію узагальненого, то тоді оптимальне рішення оптимізаційної задачі буде коректне. Але таке об'єднання здійснити вкрай складно чи неможливо, тому, як правило, узагальнений критерій є результатом чисто формального об'єднання власних (часткових) критеріїв оптимальності.

В залежності від того, яким чином власні критерії поєднуються в узагальнений критерій оптимальності розрізняють наступні види узагальнених критеріїв:

1. Адитивний критерій;
2. Мультиплікативний критерій;
3. Максимінний (мінімаксний) критерій.

Маючи декілька рішень, кожне з яких отримано на основі врахування багатьох критеріїв оптимізації, необхідно їх порівняти між собою, або надати перевагу одному з них. Для розв’язання цієї задачі будується функція корисності, яка дає змогу визначити показник ефективності рішення і процес надання переваги зводиться до порівняння чисел-значень.

При цьому особа, що приймає рішення (ОПР), враховує, що один набір значень локальних критеріїв володіє перевагою над іншими, якщо йому відповідає більше значення функції переваги.

3.1. Нормалізація узагальненого критерію

В процесі порівняння значень критеріїв оптимальності їх необхідно звести до однієї розмірності, або до безрозмірного виду.

В якості стандарту вибрано перетворення в шкалу зі значеннями в діапазоні від 0 до 1.

1. Якщо відомо деяке еталонне значення ($f^{еталон}$), то

$$f_{H,i} = \frac{f_i^0}{f_i^{еталон}}, \qquad \text{де } i = 1,2,\ldots,m. \tag{3.1}$$

2. Якщо відомо максимально можливе значення $f^{\max}$, то

$$f_{H,i} = \frac{f_i^0}{f_i^{\max}}, \qquad \text{де } i = 1,2,\ldots,m. \tag{3.2}$$

3. Якщо відомо діапазон зміни від $f^{\min}$ до $f^{\max}$, то

$$f_{H,i} = \frac{f_i^0}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad \text{де } i = 1,2,\ldots,m, \tag{3.3}$$

чи $$f_{H,i} = \frac{f_i^0 - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \qquad \text{де } i = 1,2,\ldots,m. \tag{3.4}$$

Вирази для зведення безрозмірного виду наведені на (3.1 - 3.4) найчастіше зустрічаються в задачах проектування, а більшість еталонних значень, максимально можливих та діапазон змін беруться з технічного завдання на виріб.

3.2. Адитивний критерій

Цільову функцію будують шляхом додавання нормованих значень власних критеріїв. В загальному випадку узагальнена цільова функція має наступний вид:

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i(\bar{x})}{f^o i(\bar{x})} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{H,i}(\bar{x}) \to \max(\min), \tag{3.5}$$

де n – кількість обєднаних часткових критеріїв; C_i – ваговий коефіцієнт i – го часткового критерію; $f_i(\bar{x})$ – числове значення i – го часткового критерію;

$f^{o}i(\overline{x})$ – i – й нормований дільник; $f_{H,i}(\overline{x})$ – нормоване значення i – го часткового критерію.

Власні критерії мають різну фізичну природу і тому різну розмірність. А значить просто підсумовувати їх некоректно. У зв'язку з цим у попередній формулі числові значення власних критеріїв поділяються на деякі дільники, що нормують і призначається в такий спосіб:

1. Як нормуючі дільники приймаються директивні значення чи параметри критеріїв, які задаються замовником (що можна отримати з технічного завдання). Вважається, що значення проектних параметрів, закладені в технічному завданні, є оптимальними чи найкращими.

2. Як нормуючі дільники приймаються максимальні (мінімальні) значення критеріїв, що досягаються в області припустимих рішень.

Розмірності власних критеріїв оптимальності та відповідних дільників, що нормують, однакові, тому в підсумку узагальнений адитивний критерій виходить безрозмірною величиною. Алгоритм розв’язання задачі багатокритеріальної оптимізації зображено на рис.3.1.

Наведемо приклад, який призначений для визначення оптимального варіанта машини з використанням узагальненого (інтегрального) адитивного критерію. Частковими критеріями, з допомогою яких оцінені варіанти машини, являються її продуктивність та надійність. Два критерії “працюють” на максимум, тобто найкращими варіантами машини являються ті з них, які забезпечують найбільшу її продуктивність та надійність. Початкові дані для розв’язання задачі наведені в таблиці 3.1.

Цільова функція на основі узагальненого адитивного критерію запишеться в такий спосіб:

$$F(x) = \alpha_1 \frac{f_1(\overline{x})}{f_1^{(0)}(\overline{x})} + \alpha_2 \frac{f_2(\overline{x})}{f_2^{(0)}(\overline{x})} \rightarrow \max. \qquad (3.6)$$

Як нормуючі дільники в цій задачі приймемо найкращі (максимальні) значення власних критеріїв:

$f_1^{(0)}(\overline{x}) = 4000 шт/год$, $f_2^{(0)}(\overline{x}) = 1500 год$.

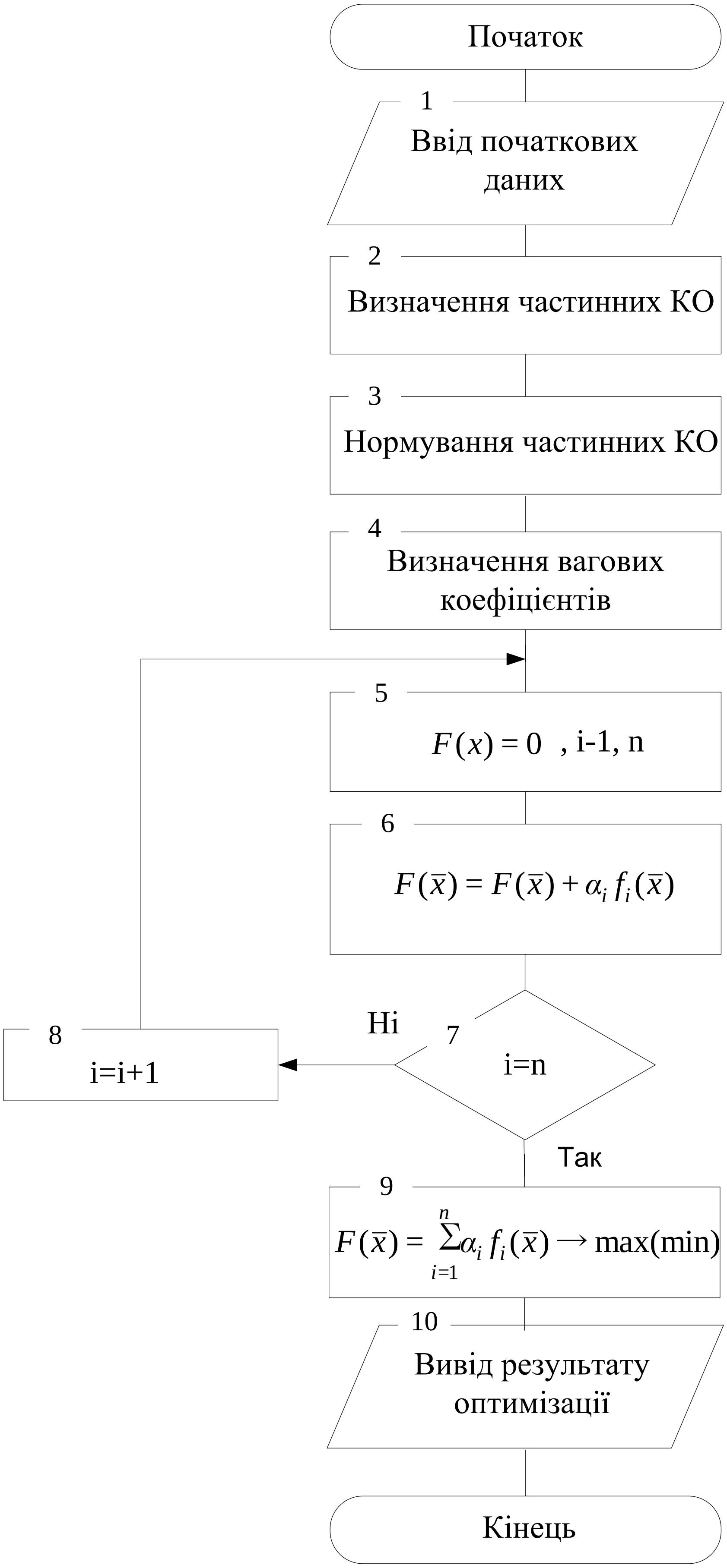

Рис.3.1. Блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням узагальненого адитивного критерію

Початкові дані для визначення оптимального варіанта виконання машини

Таблиця 3.1.

Критерій	Ваговий коефіцієнт	Значення критеріїв для варіантів виконання машини		
		Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3
Продуктивність, шт.год	0,6	1000	2000	4000
Надійність, год	0,4	1500	1000	500

Значення узагальненого адитивного критерію розраховуються для кожного варіанта машини:

Варіант 1. $F(\bar{x}) = 0{,}6(1000/4000) + 0{,}4(1500/1500) = 0{,}55$, (3.7)

Варіант 2. $F(\bar{x}) = 0{,}6(2000/4000) + 0{,}4(1000/1500) = 0{,}558$,

Варіант 3. $F(\bar{x}) = 0{,}6(4000/4000) + 0{,}4(500/1500) = 0{,}732$.

Оптимальним є 3-й варіант машини, тому що йому відповідає максимальне значення узагальненого адитивного критерію.

Один з недоліків цього методу полягає в тому, що вагові коефіцієнти призначає, в більшості випадків, сам проектувальник. Різні проектувальники можуть призначати різні вагові коефіцієнти. Розглянемо дещо іншу ситуацію, для прикладу, $\alpha_1 = 0{,}4$; $\alpha_2 = 0{,}6$. Визначимо тепер значення адитивних критеріїв для варіантів машини:

Варіант 1. $F(\bar{x}) = 0{,}4 * 0{,}25 + 0{,}6 * 1 = 0{,}7$, (3.8)

Варіант 2. $F(\bar{x}) = 0{,}4 * 0{,}5 + 0{,}6 * 0{,}67 = 0{,}602$,

Варіант 3. $F(\bar{x}) = 0{,}4 * 1 + 0{,}6 * 0{,}33 = 0{,}598$.

Тобто, при такій зміні значень вагових коефіцієнтів оптимальним уже буде 1 варіант машини.

Перевага даного методу полягає в тому, що, як правило, завжди вдається визначити єдиний оптимальний варіант розв’язання оптимізаційної задачі.

До недоліків цього методу можна віднести таке:

1. Труднощі (суб'єктивізм) у визначенні вагових коефіцієнтів.

2. Адитивний критерій не випливає з об'єктної ролі власних критеріїв і тому виступає як формальний математичний прийом.

3. В адитивному критерії відбувається взаємна компенсація власних критеріїв, тобто зменшення одного з них може бути компенсовано збільшенням іншого критерію.

3.3. Мультиплікативний критерій

Цільова функція з використанням мультиплікативного критерію записується наступним чином:

$$F(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\bar{x}) \to \max(\min), \tag{3.9}$$

де $\prod$ – знак добутку; α_i - ваговий коефіцієнт i -го часткового критерію; $f_i(\bar{x})$ - числове значення i -го часткового критерію.

На рис.3.2 зображено блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням узагальненого мультиплікативного критерію.

Переваги мультиплікативного критерію є наступні:

1. Не потрібно нормування власних критеріїв.
2. Практично завжди визначається одне оптимальне рішення.

До недоліків можна віднести наступне:

1. Труднощі (суб'єктивізм) у визначенні вагових коефіцієнтів.
2. Перемножування різних розмірностей.
3. Взаємна компенсація значень власних критеріїв.

Застосовуємо цей метод до розв’язання задачі (Див. табл.3.1)

Цільова функція на основі мультиплікативного критерію запишеться в такий спосіб:

$$F(\bar{x}) = \alpha_1 \frac{f_1(\bar{x})}{f_1^{(0)}(\bar{x})} * \alpha_2 \frac{f_2(\bar{x})}{f_2^{(0)}(\bar{x})} \to \max. \tag{3.10}$$

Як нормуючі дільники в цій задачі приймемо найкращі (максимальні) значення власних критеріїв:

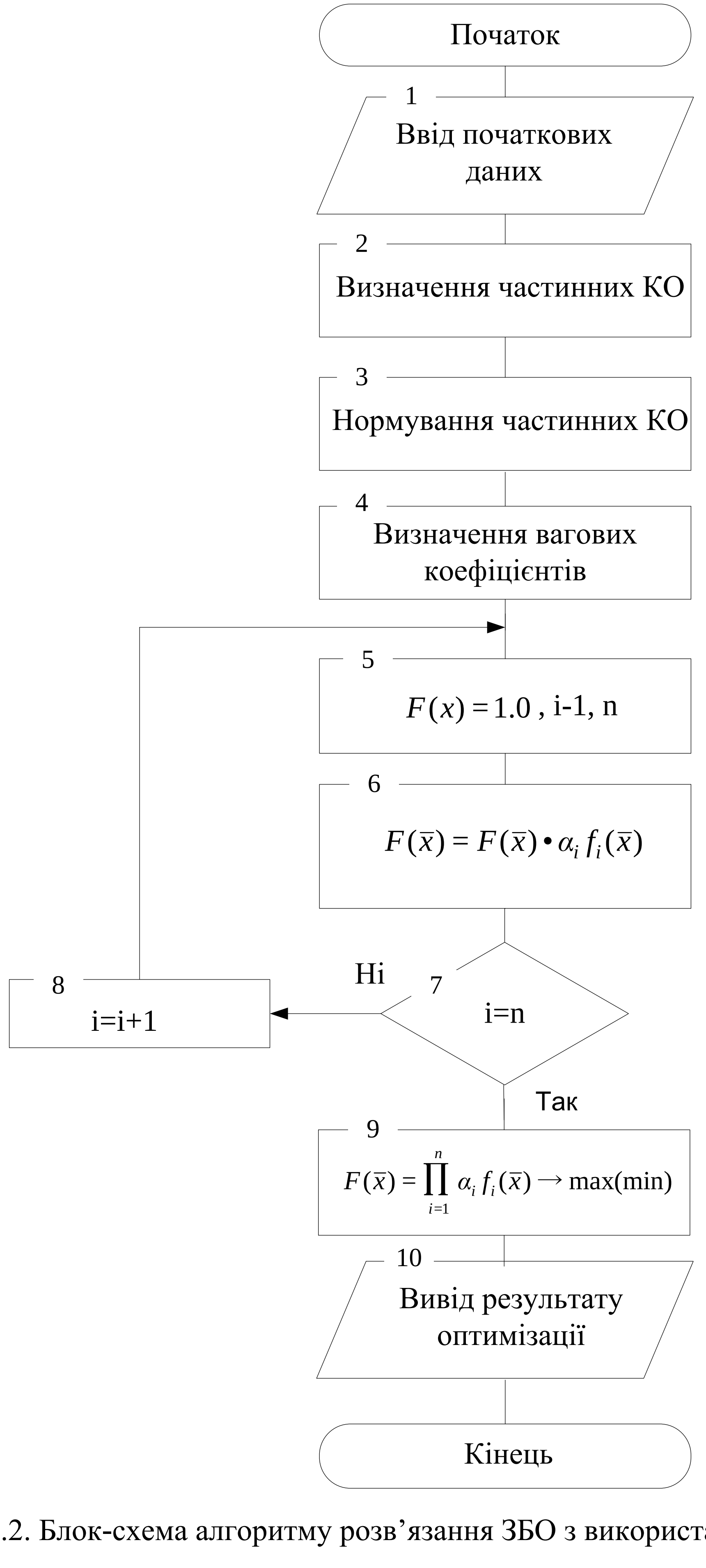

Рис.3.2. Блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням узагальненого мультиплікативного критерію

$f_1^{(0)}(\bar{x}) = 4000 шт/год$, $f_2^{(0)}(\bar{x}) = 1500 год$.

Значення узагальненого мультиплікативного критерію розраховуються для кожного варіанта машини і отримаємо:

Варіант 1. $F(\bar{x}) = \{0,6(1000/4000)\} * \{0,4(1500/1500)\} = 0,15 * 0,4 \approx 0,06$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = \{0,6(2000/4000)\} * \{0,4(1000/1500)\} = 0,3 * 0,267 \approx 0,08$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = \{0,6(4000/4000)\} * \{0,4(500/1500)\} = 0,6 * 0,13 \approx 0,08$.

Оптимальними є 2-й варіант і 3-й варіанти машини.

Один з недоліків цього методу полягає також в тому, що вагові коефіцієнти призначає проектувальник. Різні проектувальники можуть призначати різні вагові коефіцієнти. Нехай, для прикладу, $\alpha_1 = 0,4$; $\alpha_2 = 0,6$. Визначимо тепер значення мультиплікативних критеріїв для варіантів машини:

Варіант 1. $F(\bar{x}) = (0,4 * 0,25) * (0,6 * 1) \approx 0,06$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = (0,4 * 0,5) * (0,6 * 0,67) \approx 0,08$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = (0,4 * 1) * (0,6 * 0,33) \approx 0,08$.

Тобто, при такій зміні значень вагових коефіцієнтів не змінилося.

Розглянемо іншу ситуацію, для прикладу $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,9$. Визначимо тепер значення адитивних та мультиплікативних критеріїв для варіантів машини:

Варіант 1. $F(\bar{x}) = 0,1 * 0,25 + 0,9 * 1 = 0,925$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = 0,1 * 0,5 + 0,9 * 0,67 = 0,653$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = 0,1 * 1 + 0,9 * 0,33 = 0,397$.

Тобто, при такій зміні значень вагових коефіцієнтів оптимальним буде 1 варіант машини.

Варіант 1. $F(\bar{x}) = (0,1 * 0,25) * (0,9 * 1) \approx 0,0225$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = (0,1 * 0,5) * (0,9 * 0,67) \approx 0,03$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = (0,1 * 1) * (0,9 * 0,33) \approx 0,03$.

Оптимальними є 2-й варіант і 3-й варіанти машин.

Отже, з даного прикладу можна зробити висновок, що мультиплікативний критерій менш чутливий до неточності визначення вагових коефіцієнтів.

Розглянемо іншу ситуацію, для прикладу $\alpha_1 = 0{,}0$; $\alpha_2 = 1{,}0$. Визначимо тепер значення адитивних та мультиплікативних критеріїв для варіантів машини (адитивний):

Варіант 1. $F(\bar{x}) = 0{,}0 * 0{,}25 + 1{,}0 * 1 = 1{,}0$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = 0{,}0 * 0{,}5 + 1{,}0 * 0{,}67 = 0{,}67$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = 0{,}0 * 1 + 1{,}0 * 0{,}33 = 0{,}33$.

Тобто, при такій зміні значень вагових коефіцієнтів оптимальним буде 1 варіант машини (мультиплікативний).

Варіант 1. $F(\bar{x}) = (0{,}0 * 0{,}25) * (1{,}0 * 1) = 0{,}0$.

Варіант 2. $F(\bar{x}) = (0{,}0 * 0{,}5) * (1{,}0 * 0{,}67) = 0{,}0$.

Варіант 3. $F(\bar{x}) = (0{,}0 * 1) * (1{,}0 * 0{,}33) = 0{,}0$.

Оптимальні альтернативи відсутні.

Отже, з даного прикладу можна зробити висновок, що якщо в мультиплікативному критерії рівний нулю (або близький до нуля) хоча б один частковий критерій, то результуючий критерій рівний нулю також.

Наведемо інший приклад застосування адитивної та мультиплікативної згорток в процесі розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації.

Задача векторної оптимізації (знайти максимум)

$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3$,	$f_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3$,
$x_1 + x_2 + x_3 \le 45$,	$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 40$,
$2x_1 + 3x_3 \le 75$,	$2x_1 + 4x_3 \le 90$,
$3x_1 + 4x_2 \le 50$.	$3x_1 + 2x_2 \le 25$
	$x_1, x_2 \ge 0$.

Відомо, що $\alpha_1 = 0{,}2$, а $\alpha_2 = 0{,}8$.

(Розв'язання: при $\alpha_1 = 0{,}2$, а $\alpha_2 = 0{,}8$, $F_{\max}^{(1)} = 126{,}75$.

$\alpha_1 = 0{,}7$, а $\alpha_2 = 0{,}3$, $F_{\max}^{(1)} = 131{,}125$)

Використаємо адитивну згортку

$$\max F(x_1, x_2) = \alpha_1 f_1(x_1, x_2) + \alpha_2 f_2(x_1, x_2),$$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 45,$

$2x_1 + 3x_3 \le 75,$

$3x_1 + 4x_2 \le 50$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 40,$

$2x_1 + 4x_3 \le 90,$

$3x_1 + 2x_2 \le 25,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Можемо використати графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування чи симплекс метод.

$$\max F(x_1, x_2) = 0{,}2(2x_1 + 5x_2 + 4x_3) + 0{,}8(3x_1 + 4x_2 + 4x_3) =$$

$$= 0{,}4x_1 + x_2 + 0{,}8x_3 + 2{,}4x_1 + 3{,}2x_2 + 3{,}2x_3 = 2{,}8x_1 + 4{,}2x_2 + 4x_3$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 45,$

$2x_1 + 3x_3 + x_5 = 75,$

$3x_1 + 4x_2 + x_6 = 50$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_7 = 40,$

$2x_1 + 4x_3 + x_8 = 90,$

$3x_1 + 2x_2 + x_9 = 25$

$\alpha_1 = 0{,}4, \quad \alpha_2 = 0{,}6,$

$$\max F(x_1, x_2) = 0{,}4(2x_1 + 5x_2 + 4x_3) + 0{,}6(3x_1 + 4x_2 + 4x_3) =$$

$$= 0{,}8x_1 + 2x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_1 + 2{,}4x_2 + 2{,}4x_3 = 2{,}6x_1 + 4{,}4x_2 + 4x_3,$$

$\alpha_1 = 0{,}6, \quad \alpha_2 = 0{,}4,$

$$\max F(x_1, x_2) = 0{,}6(2x_1 + 5x_2 + 4x_3) + 0{,}4(3x_1 + 4x_2 + 4x_3) =$$

$$=1{,}2x_1+3x_2+2{,}4x_3+1{,}2x_1+1{,}6x_2+1{,}6x_3=2{,}4x_1+4{,}6x_2+4x_3,$$

$\alpha_1=0{,}7, \quad \alpha_2=0{,}3,$

$$\max F(x_1,x_2)=0{,}7(2x_1+5x_2+4x_3)+0{,}3(3x_1+4x_2+4x_3)=$$
$$=1{,}4x_1+3{,}5x_2+2{,}8x_3+0{,}9x_1+1{,}2x_2+1{,}2x_3=2{,}3x_1+4{,}7x_2+4x_3,$$

Згрупуємо отримані результати оптимізації:

$\alpha_1=0{,}2$, а $\alpha_2=0{,}8$, тоді $F^{(1)}_{\max}=126{,}75$,

$\alpha_1=0{,}4$, а $\alpha_2=0{,}6$, тоді $F^{(1)}_{\max}=128{,}5$,

$\alpha_1=0{,}6$, а $\alpha_2=0{,}4$, тоді $F^{(1)}_{\max}=130{,}25$,

$\alpha_1=0{,}7$, а $\alpha_2=0{,}3$, тоді $F^{(1)}_{\max}=131{,}125$,

$\alpha_1=1{,}0$, а $\alpha_2=0{,}0$, тоді $F^{(1)}_{\max}=133{,}75$.

До недоліків цих методів можна віднести те, що рішення, які оптимізують узагальнену функцію, може виявитися незадовільним по одному чи декількох часткових критеріїв.

Це можна пояснити тим, що при досягненні максимуму узагальненої функції надзвичайно малі значення деяких показників $f_i(\bar{x})$ компенсуються великими значеннями інших.

3.4. Максімінний (мінімаксний) критерій

Максімінний (мінімаксний) критерії працюють за принципом компромісу, який ґрунтується на ідеї рівномірності. Сутність принципу максіміна полягає в наступному. При проектуванні складних технічних систем і наявності великого числа власних критеріїв встановити між ними аналітичний взаємозв'язок дуже складно, а в більшості випадків і неможливо. Тому намагаються знайти такі значення проектних (параметрів) $\bar{x}=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, при яких нормовані значення всіх власних критеріїв рівні між собою:

$$\alpha_i f_i(X)=K, \tag{3.11}$$

де $f_i(X)$ – нормоване значення i -го часткового критерію; K – константа.

При великій кількості власних критеріїв через складні взаємозв'язки домогтися виконання зазначеного вище співвідношення дуже складно. Тому, на практиці, так варіюють значеннями проектних змінних проектування x_1, x_2,..., x_m, при яких послідовно "підтягуються" ті нормовані критерії, чисельні значення яких у вихідному рішенні виявилися найменшими. Оскільки ця операція виробляється в області компромісу, підтягування “відстаючого” критерію неминуче призводить до зниження значень частини інших критеріїв. Але при проведенні ряду кроків можна домогтися визначеного ступеня зрівноважування суперечливих власних критеріїв, що і є метою принципу максиміна.

Формально принцип максиміна формулюється в такий спосіб: вибрати такий набір змінних $X^{(0)} \in X$, при якому реалізується максимум з мінімальних нормованих значень власних критеріїв, тобто $F(X^{(0)}) = \max\min f_i(X)$.

Такий принцип вибору $X^{(0)}$ іноді називають гарантований результат. Він запозичений з теорії ігор, де є основним принципом. Блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням максимінного підходу (рис.3.3).

Якщо часткові критерії необхідно мінімізувати, то найбільш відстаючим критерієм є той, який приймає максимальне значення. В цьому випадку застосовують принцип мінімакса: $F(X^{(0)}) = \max\min f_i(X)$.

Наведемо приклад застосування максимінного підходу. Отже в Таблиці 3.2 наведено результати вхідних даних.

Таблиця 3.2

$K_1^* = 8$, $K_1^* = 9$, $K_1^* = 6$, $K_1^* = 10$.

	S₁	**S₂**	**S₃**	**S₄**	**S₅**	**S₆**	**S₇**	**S₈**	**S₉**
K_1	3	6	7	4	8	5	9	3	2
K_2	3	4	4	9	4	8	7	7	5
K_3	3	7	9	2	4	7	6	6	9
K_4	9	5	3	7	9	3	7	5	3

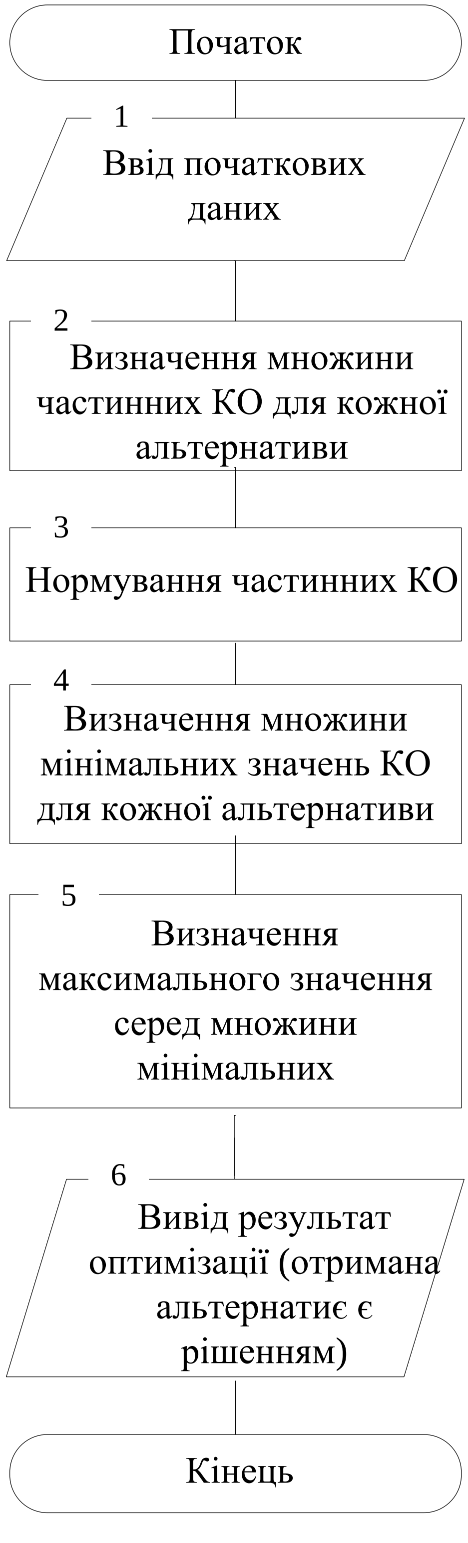

Рис.3.3 Блок-схема алгоритму розв'язання ЗБО з використанням максимінного підходу

В Таблиці 3.2 S_i - i-й варіант рішення задачі багатокритеріальної оптимізації, K_i - i-й критерій оптимізації, K_i^* - номінальне значення i-го КО. В кожній комірці таблиці розміщено значення частинного критерія оптимальності для *i*-го варіант рішення частинного критерія. На наступному кроці необхідно звести усі значення критеріїв до безрозмірного виду. Для цього розділимо кожне значення частинного критерія оптимальності на номінальне значення даного КО. Отримані результати зображено в Таблиці 3.3 (від другої до п'ятої стрічки таблиці). Далі для кожної альтернативи вибирається мінімальне значення безрозмірного значення критерія (шоста стрічка Таблиці 3.3). Наступний крок алгоритму передбачає вибір максимального значення з шостої стрічки таблиці. В даному випадку вибраним варіантом є друга альтернатива.

Результати розв'язання максимінної задачі Таблиця 3.3

	S_1	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**	**S_6**	**S_7**	**S_8**	**S_9**
K_1	3/8	6/8	7/8	4/8	8/8	5/8	9/8	2/8	2/8
K_2	3/9	4/9	4/9	9/9	3/9	8/9	7/9	7/9	5/9
K_3	3/6	7/6	9/6	2/6	4/6	7/6	6/6	6/6	9/6
K_4	9/10	5/10	3/10	7/10	9/10	3/10	4/10	5/10	3/10
Min	3/9	4/9	3/10	2/6	3/9	3/10	4/10	2/8	2/8
	0,33	0,44	0,3	0,33	0,33	0,3	0,4	0,25	0,25
		Max							

Інший приклад, де наведемо особливості застосування мінімаксного підходу. Вхідні дані розміщені в тій же Таблиці 3.2, а результати в Таблиці 3.4.

Отже, перші кроки застосування мінімаксного підходу подібні до застосування максимінного підходу. Тобто, необхідно отримати значення часткових критеріїв оптимізації для кожної альтернативи і звести до безрозмірного виду шляхом ділення на номінальне значення кожного критерія оптимальності (див. від другої до п'ятої стрічки Таблиці 3.4). Далі для кожної альтернативи вибирається максимальне значення безрозмірного значення критерія (шоста стрічка Таблиці 3.4). Наступний крок алгоритму передбачає вибір мінімальне значення з шостої стрічки таблиці. В даному випадку вибраним варіантом є перша альтернатива (див. рис.3.4).

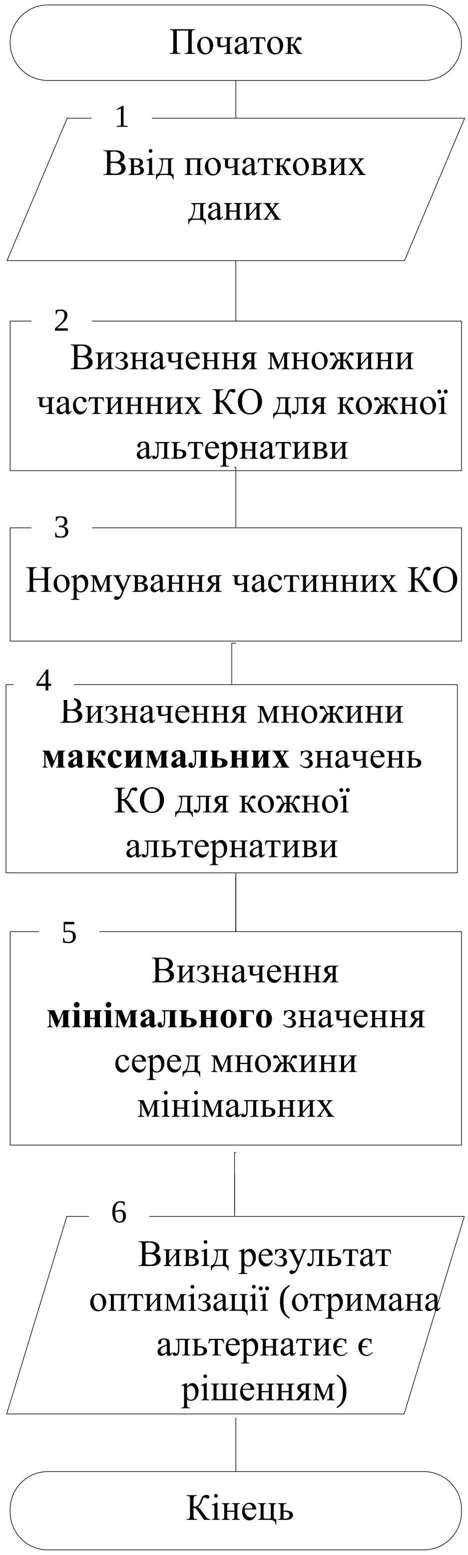

Рис.3.4 Блок-схема алгоритму розв’язання ЗБО з використанням мінімаксного підходу

Результати розв’язання мінімаксної задачі Таблиця 3.4

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
K_1	3/8	6/8	7/8	4/8	8/8	5/8	9/8	2/8	2/8
K_2	3/9	4/9	4/9	9/9	3/9	8/9	7/9	7/9	5/9
K_3	3/6	7/6	9/6	2/6	4/6	7/6	6/6	6/6	9/6
K_4	9/10	5/10	3/10	7/10	9/10	3/10	4/10	5/10	3/10
Max	9/10	7/6	9/6	9/9	8/8	7/6	9/8	6/6	9/6
	0,9	1,17	1,5	1,0	1,0	1,17	1,125	1,0	1,5
	Min								

3.5. Методи визначення значень вагових коефіцієнтів

У випадку рівноцінних критеріїв оптимальності w_i вибираються однаковими

$$w_i = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\dots,n, \tag{3.13}$$

де n - кількість критеріїв оптимальності.

Для нерівноцінних критеріїв, тобто критеріїв, для яких особа, що приймає рішення може встановити пріоритет по важливості. В цьому випадку значення вагових коефіцієнтів вибираються відповідно до важливості критерію.

$$w_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ i = 1,2,\dots,n. \tag{3.14}$$

Найбільш відомими, які широко використовуються проектуванні є метод ранжування та метод приписування балів.

3.5.1. Метод ранжування

Маємо: l - експертів та n - часткових критеріїв $f_i(\bar{x})$, де $i = \overline{1,n}$.

Цифрою 1 – позначаємо найбільш важливий КО, 2 – наступний за важливістю і цифрою n - критерій з найменшим значенням важливості.

Потім присвоюємо ранг кожному КО. Ранг 1 має оцінку n і є найбільш важливим з точки зору експерта, а ранг 2 – оцінка $(n-1)$ і так далі до рангу n, якому присвоюємо оцінку 1.

Позначимо ранг $i-го$ критерію (всіх є n) k-им експертом (який є l) $r_i^{(k)}$ вагові коефіцієнти w_i, $i=\overline{1,n}$ визначається з допомогою наступної формули:

$$C_i = \sum_{k=1}^{l} r_i^{(k)} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} r_i^{(k)}, \; i=\overline{1,n}. \tag{3.15}$$

Наведемо приклад застосування методу ранжування. Візьмемо п'ять критеріїв $F_i(\bar{x})$ і трьох експертів. Припустимо, що поставлені оцінки експертами наступні:

Таблиця 3.5.

експерт / критерій	експерт 1	експерт 2	експерт 3
f_1	1 (5)	3 (3)	2 (4)
f_2	4 (2)	2 (4)	3 (3)
f_3	3 (3)	1 (5)	1 (5)
f_4	5 (1)	4 (2)	4 (2)
f_5	2 (4)	5 (1)	5 (1)

Результати розв'язання задачі:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} r_i^{(k)}, \; i=\overline{1,n} = 3*15 = 45,$$

$$i=1,\; C_1 = \sum_{k=1}^{l} r_1^{(k)} \Big/ 45 = (5+3+4)\big/45 \approx 0{,}27, \tag{3.16}$$

$$i=2,\; C_2 = \sum_{k=1}^{l} r_2^{(k)} \Big/ 45 = (2+4+3)\big/45 \approx 0{,}2,$$

$$i=3,\; C_3 = \sum_{k=1}^{l} r_3^{(k)} \Big/ 45 = (3+5+5)\big/45 \approx 0{,}29,$$

$$i = 4,\ C_4 = \sum_{k=1}^{l} r_4^{(k)} \Big/ 45 = (1+2+2)\Big/45 \approx 0{,}11,$$

$$i = 5,\ C_5 = \sum_{k=1}^{l} r_5^{(k)} \Big/ 45 = (4+1+1)\Big/45 \approx 0{,}13.$$

3.5.2. Метод приписування балів

Використаємо в якості вхідних даних з попереднього прикладу. Визначимо параметри ваги $i-го$ критерію на основі $k-го$ експерта

Таблиця 3.6

експерт / критерій	експерт 1	експерт 2	експерт 3
f_1	5/15=0,33	3/15=0,20	4/15=0,27
f_2	2/15=0,13	4/15=0,27	3,15=0,20
f_3	3/15=0,20	5/15=0,33	5/15=0,33
f_4	1/15=0,07	2/15=0,13	2/15=0,13
f_5	4/15=0,27	1/15=0,07	1/15=0,07

Експерти оцінюють важливість КО по шкалі від 0 до 10 балів. Причому, можуть бути оцінки з дробовим значеннями та оцінки з однаковими значеннями для різних КО.

Знаючи бали $h_i^{(k)}$ $i-\tilde{a}\hat{\imath}$ критерію на основі $k-\tilde{a}\hat{\imath}$ експерта

$$H_i^{(k)} = h_i^{(k)} \Big/ \sum_{i=0}^{n} h_i^{k} . \qquad (3.17)$$

Вага визначення для $i-\tilde{a}\hat{\imath}$ критерію $F_i(\bar{x})$ на основі оцінок $k-\tilde{a}\hat{\imath}$ експерта. Потім використовують формулу

$$C_i = {\sum_{k=1}^{l} H_i^{(k)}} \Big/ {\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} H_i^{(k)}}, \; i = \overline{1,n},$$

$$i=1,\; C_1 = {\sum_{k=1}^{l} H_1^{(k)}} \Big/ 3 = {(0{,}33 + 0{,}2 + 0{,}27)} \Big/ 3 \approx 0{,}27, \tag{3.18}$$

$$i=2,\; C_2 = {\sum_{k=1}^{l} H_2^{(k)}} \Big/ 3 = {(0{,}13 + 0{,}27 + 0{,}2)} \Big/ 3 \approx 0{,}2,$$

$$i=3,\; C_3 = {\sum_{k=1}^{l} H_3^{(k)}} \Big/ 3 = {(0{,}2 + 0{,}33 + 0{,}33)} \Big/ 3 \approx 0{,}29,$$

$$i=4,\; C_4 = {\sum_{k=1}^{l} H_4^{(k)}} \Big/ 3 = {(0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}13)} \Big/ 3 \approx 0{,}11,$$

$$i=5,\; C_5 = {\sum_{k=1}^{l} H_5^{(k)}} \Big/ 3 = {(0{,}27 + 0{,}07 + 0{,}07)} \Big/ 3 \approx 0{,}13.$$

Отже, наведемо переваги та недоліки використання методів на основі згорток для розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації.

Переваги:

1. Широко використовується в процесі проектування.
2. Дає змогу максимізувати запас по працездатності технічного вибору.
3. Шляхом зміни значень вагових коефіцієнтів є можливість досліджувати область слабо ефективних рішень (оптимальних за Слейтером).

Недоліки:

В процесі розв’язання задачі приходиться вирішувати багато однокритеріальних задач, які є складними та нелінійними і інколи зробити це неможливо.

3.6. Контрольні запитання до розділу 3

1. Що Ви розумієте під узагальненим критерієм?
2. Як будується адитивний узагальнений критерій?
3. Які переваги та недоліки адитивного критерію?
4. Як будується мультиплікативний узагальнений критерій?
5. Які переваги та недоліки мультиплікативного узагальненого критерія
6. Який алгоритм розв'язання ЗБО з використанням адитивної згортки?
7. Який алгоритм розв'язання ЗБО з використанням мультиплікативної згортки?
8. З якою метою виконують нормування часткових КО?
9. Який алгоритм застосування максимінного(мінімаксного) узагальненого критерія?
10. Які переваги та недоліки максимінного(мінімаксного) узагальненого критерія?
11. Які методи визначення вагових коефіцієнтів Ви знаєте?
12. Наведіль приклади зведення критеріїв оптимізації до безрозмірного виду.
13. Який алгоритм розв'язання ЗБО з використанням максимінної згортки?
14. Який алгоритм розв'язання ЗБО з використанням мінімаксної згортки?

Список використаної літератури

1. Сучасний тлумачний словник української мови: 60 000 слів / За заг. Ред. д-ра філол. наук, проф. В.В. Дубічинського. – Х. : ВД «ШКОЛА», 2007. – 832 с.

2. Словник іншомовних слів. За редакцією член-кореспондента АН УРСР О.С. Мельничука. – Київ, Головна редакція Української радянської енциклопедії, 1977. – 776 с.

3. http://wiki.tntu.edu.ua/параметри оптимізації

4. Теслюк В.М. Математичне моделювання в САПР: Ч.1. Конспект лекцій з курсу "Математичне моделювання в САПР" для студентів базового напрямку "Комп'ютерні науки". – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2009. – 64 с.

5. Словарь по кибернетике: Св. 2000 ст./Под ред. В.С. Михалевича, 2-е изд.-К.: Гл.ред.УСЭ им.М.П.Бажана, 1989. – 751с.

6. Steuer, R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application. — New York : John Wiley & Sons, Inc , 1986. ISBN 047188846X.

7. Sawaragi, Y. Theory of Multiobjective Optimization (vol. 176 of Mathematics in Science and Engineering). — Orlando, FL : Academic Press Inc , 1985. ISBN 0126203709.

8. Jürgen Branke, Kalyanmoy Deb, Kaisa Miettinen та Roman Slowinski Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches (Lecture Notes in Computer Science). — Springer, 2008. ISBN 3-540-88907-8.

9. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Уч. пособие. М.: Издат. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. – 197 с.

10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.- М.: Наука, 1982.- 256 с.

11. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления, и приложения.- М.: Радио и связь,1992.- 504 с.

12. Р. Л. Кини, Х. Райфа. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. - М.: Радио и связь, 1981.

13. О. И. Ларичев. Теория и методы принятия решений. - М.: Логос, 2000.

14. В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982.

15. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.

16. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.

17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

18. Лотов А. В., Бушенков В. А., Каменев Г. К., Черных О. Л.. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. - М.: Наука, 1997.

19. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 479 с.

20. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 496 с.

21. Теслюк В.М., Андрійчук М.І. Конспект лекцій з курсу «Методи синтезу та оптимізації» для студентів базового напряму «Комп'ютерні науки», Ч.1. - Львів, 2005 – 64 с.

22. Теслюк В.М. Моделі та інформаційні технології синтезу мікроелектромеханічних систем: Монографія. – Львів: Видавництво ПП "Вежа і Ко", 2008 – 192 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Теслюк Василь Миколайович

Загарюк Роман Вікторович

МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(Частина 1)

з курсу “ Методи багатокритеріальної оптимізації”
для студентів
спеціальності 8.05010103 “Системне проектування ”